Sur les transformations des ensembles par les fonctions de Baire.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

E étant un ensemble linéaire donné, désignons, pour $\alpha = 0, 1, 2$, par $\Phi_\alpha(E)$ la famille de tous les ensembles $f(E)$, où $f(x)$ est une fonction d'une variable réelle de classe α.

Il est aisé de donner des exemples d'ensembles E, tels que $\Phi_0(E) \neq \Phi_1(E)$: tels sont p. e. les intervalles. Or, la difficulté est d'une nature tout à fait différente pour le problème d'existence des ensembles linéaires E, tels que $\Phi_1(E) \neq \Phi_2(E)$ [1]). Non seulement nous ne connaissons aucun exemple effectif d'un tel ensemble [2]), mais même nous ne savons pas démontrer son existence qu'en admettant l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$). Le but de cette Note est de démontrer ce

Théorème. *Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe un ensemble linéaire E et une onction $\varphi(x)$ d'une variable réelle de classe 2, telle que $\varphi(E) \neq f(E)$ pour toute fonction $f(x)$ d'une variable réelle de classe $\leqslant 1$.*

Démonstration.

Lemme I. *Il existe une fonction $\varphi(x)$ d'une variable réelle de classe 2, à valeurs distinctes et qui diffère de toute fonction $f(x)$ d'une variable réelle de classe $\leqslant 1$ sur un ensemble de points de mesure positive.*

[1]) Cf. le problème que j'ai posé dans *Fund. Math.* t. XV, p. 198.

[2]) Les ensembles E, tels que $\Phi_1(E) \neq \Phi_2(E)$, ne peuvent pas être analytiques (voir l. c., p. 195); or, on ne sait pas s'il ne peuvent pas être des complémentaires analytiques.

Dém. Il existe, comme on sait, une suite infinie $P_1, P_2, P_3, \dots$ d'ensembles linéaires parfaits non denses et disjoints, telle que les ensembles

$$S = P_1 + P_3 + P_5 + \dots \quad \text{et} \quad T = P_2 + P_4 + P_6 + \dots$$

sont chacun de mesure positive dans tout intervalle.

Posons $\varphi(x) = x$ pour $|x| \in S$ et posons $\varphi(x) = -x$ pour tous les autres x réels. On voit sans peine que la fonction $\varphi(x)$ est à valeurs distinctes. Or, l'ensemble S étant un F_σ, on voit sans peine que, pour tout a réel, les ensembles $\underset{x}{\mathrm{E}}[\varphi(x) > a]$ et $\underset{x}{\mathrm{E}}[\varphi(x) < a]$ sont des $G_{\delta\sigma}$, ce qui entraîne que la fonction $\varphi(x)$ est de classe $\leqslant 2$.

Soit maintenant $f(x)$ une fonction (d'une variable réelle) de classe $\leqslant 1$ et admettons que l'ensemble $H = \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) \neq \varphi(x)]$ est de mesure nulle.

Soit x_0 un nombre réel donné quelconque > 0 et soit δ un nombre réel, tel que $0 < \delta < x_0$. Les ensembles S et T étant de mesure positive dans tout intervalle, on voit que les ensembles $S - H$ et $T - H$ sont de mesure positive dans l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Il existe donc deux nombres réels x_1 et x_2, tels que

$$(1) \qquad x_1 \in S - H, \quad x_0 - \delta < x_1 < x_0 + \delta, \quad x_2 \in T - H, \quad x_0 - \delta < x_2 < x_0 + \delta.$$

D'après $x_1 \in S - H$, on a $x_1 \in S$, donc, d'après $x_1 > x_0 - \delta > 0$ et la définition de la fonction $\varphi(x)$, $\varphi(x_1) = x_1$, et on a $x_1 \bar{\epsilon} H$, donc, d'après la définition de l'ensemble H, $f(x_1) = \varphi(x_1)$. On a donc $f(x_1) = x_1$. Or, d'après $x_2 \in T - H$ et d'après $ST = 0$, on a $x_2 \bar{\epsilon} S$ et $x_2 \bar{\epsilon} H$, ce qui prouve, d'après $x_2 > x_0 - \delta > 0$ et d'après les définitions de la fonction $\varphi(x)$ et de l'ensemble H, que $f(x_2) = \varphi(x_2) = -x_2$. On a donc, d'après (1):

$$(2) \qquad f(x_1) - f(x_2) = x_1 + x_2 > 2(x_0 - \delta).$$

Nous avons ainsi démontré qu'il existe, pour tout nombre positif $\delta < x_0$, dans l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ deux nombres x_1 et x_2, tels qu'on a l'inégalité (2). Le nombre x_0 étant > 0, cela prouve que la fonction $f(x)$ est discontinue au point x_0.

La fonction $f(x)$ est donc discontinue pour tout $x_0 > 0$, ce qui est impossible, $f(x)$ étant une classe $\leqslant 1$. L'ensemble H n'est pas donc de mesure nulle: les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ étant mesurables, il est donc de mesure positive. Le lemme I est ainsi démontré.

Lemme II. Si F est une famille de puissance $\aleph_1$ de fonctions mesurables d'une variable réelle et $\varphi(x)$ une fonction d'une variable réelle à valeurs distinctes qui diffère de chaque fonction $f(x)$ de F sur un ensemble de mesure positive, il existe un ensemble linéaire E, tel que $\varphi(E) \neq f(E)$ pour toute fonction $f(x)$ de la famille F.

Dém. Soit F une famille de puissance $\aleph_1$ de fonctions mesurable d'une variable réelle. Il existe donc une suite transfinie du type Ω,

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\omega(x), f_{\omega+1}(x), \ldots, f_\xi(x), \ldots, \qquad (\xi<\Omega) \tag{3}$$

formée de toutes les fonctions de la famille F.

Soit $\varphi(x)$ une fonction à valeurs distinctes qui diffère de chaque fonction $f(x)$ de la famille F sur un ensemble de mesure positive. L'ensemble $H_1 = \underset{x}{\mathrm{E}}\,[f_1(x) \neq \varphi(x)]$ est donc de mesure positive, donc non dénombrable.

Les ensembles $Q_1(a) = \underset{x}{\mathrm{E}}\,[f_1(x) = \varphi(a)]$, où $a \in H_1$ sont donc en infinité non dénombrable et, évidemment deux à deux sans éléments communs. La fonction $f_1(x)$ étant mesurable, il ne peuvent pas donc être tous de mesure positive. Il existe donc un nombre $a_1 \in H_1$, tel que l'ensemble $N_1 = Q_1(a_1)$ est de mesure nulle.

Soit maintenant α un nombre ordinal donné quelconqoe >1 et $<\Omega$ et supposons que nous avons déjà défini tous les nombres a_ξ et tous les ensembles de mesure nulle N_ξ pour $\xi<\alpha$.

L'ensemble $S_\alpha = \sum_{\xi<\alpha} N_\xi$ est donc de mesure nulle. Soit E_α l'ensemble de tous les nombres a_ξ, où $\xi<\alpha$: c'est donc un ensemble au plus dénombrable. La fonction $\varphi(x)$ étant à valeurs distinctes, l'ensemble $T_\alpha = \underset{x}{\mathrm{E}}\,[\varphi(x) \in f_\alpha(E_\alpha)]$ est donc aussi au plus dénombrable.

Or, la fonction $\varphi(x)$ diffère de la fonction $f_\alpha(x)$ sur un ensemble de mesure positive. Les ensembles

$$H_\alpha = \underset{x}{\mathrm{E}}\,[f_\alpha(x) \neq \varphi(x)] \quad \text{et} \quad H_\alpha - (S_\alpha + T_\alpha)$$

sont donc de mesure positive, donc non dénombrables.

La fonction $\varphi(x)$ étant à valeurs distinctes, les ensembles

$$Q_\alpha(a) = \underset{x}{\mathrm{E}}\,[f_\alpha(x) = \varphi(a)], \quad \text{où} \quad a \in H_\alpha - (S_\alpha + T_\alpha)$$

sont donc en infinité non dénombrable et évidemment deux à deux sans éléments communs. La fonction $f_\alpha(x)$ étant mesurable, il ne peuvent donc être tous de mesure positive. Il existe donc un nombre $a_\alpha \in H_\alpha - (S_\alpha + T_\alpha)$, tel que l'ensemble $N_\alpha = Q_\alpha(a_\alpha)$ est de mesure nulle.

Les nombres a_α et les ensembles de mesure nulle N_α, où $\alpha<\Omega$, sont ainsi définis par l'induction transfinie.

Désignons maintenant par E l'ensemble de tous les nombres a_α, où $\alpha<\Omega$. Je dis que l'ensemble E satisfait aux conditions du lemme II.

En effet, soit $f(x)$ une fonction donnée quelconque de la famille F. D'après la définition de la suite transfinie (3), il existe donc un nombre ordinal $\alpha<\Omega$, tel que $f(x) = f_\alpha(x)$ (pour x réels). D'après la définition du nombre a_α on a $a_\alpha \in H_\alpha$ et a_α non $\in T_\alpha$. De $a_\alpha \in H_\alpha$ on tire, d'après la définition de H_α, $f_\alpha(a_\alpha) \neq \varphi(a_\alpha)$. Or, d'après a_α non $\in T_\alpha$ et la définition de T_α, on a $\varphi(a_\alpha)$ non $\in f_\alpha(E_\alpha)$, donc, vu la définition de E_α: $\varphi(a_\alpha) \neq f_\alpha(a_\xi)$ pour $\xi<\alpha$.

Or, soit ξ un nombre ordinal, tel que $\alpha<\xi<\Omega$.

D'après la définition du nombre a_ξ, $a_\xi \in H_\xi - (S_\xi + T_\xi)$, donc a_ξ non $\in S_\xi$, ce qui donne, d'après la définition de S_ξ et d'après $\alpha<\xi$: a_ξ non $\in N_\alpha = Q_\alpha(a_\alpha)$. Or, d'après la définition de $Q_\alpha(a)$, on a $Q_\alpha(a_\alpha) = \underset{x}{\mathrm{E}}\,[f_\alpha(x) = \varphi(a_\alpha)]$, et la formule a_ξ non $\in Q_\alpha(a_\alpha)$ donne $f_\alpha(a_\xi) \neq \varphi(a_\alpha)$.

La formule

$$f_\alpha(a_\xi) \neq \varphi(a_\alpha)$$

est ainsi établie pour tous les nombres ordinaux $\xi<\Omega$. Vu la définition de l'ensemble E il en résulte que $\varphi(a_\alpha)$ non $\in f_\alpha(E)$, donc, d'après $\varphi(a_\alpha) \in \varphi(E)$ (puisque $a_\alpha \in E$), que $\varphi(E) \neq f_\alpha(E) = f(E)$.

Le lemme II est ainsi démontré.

Pour déduire des lemmes I et II notre théorème, il suffit de remarquer que, si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, on peut, dans le lemme II, prendre comme F la famille de toutes les fonctions d'une variable réelle de classe $\leqslant 1$ et, comme $\varphi(x)$, une fonction de classe 2 satisfaisant aux conditions du lemme I.