Sur une propriété de fonctions quelconques d'une variable réelle.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Le but de cette Note est de démontrer ce

Théorème. *Quelles que soient la fonction d'une variable réelle $f(x)$ et la suite infinie h_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ convergente vers 0, de nombres réels non nuls, il existe une fonction $F(x)$ d'une variable réelle telle que l'on ait pour tout x réel*

$$(1) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{F(x+h_n)-F(x)}{h_n} = f(x).$$

Démonstration. Il suffit évidemment de démontrer le théorème pour les suites h_n $(n=1, 2, \ldots)$ de nombres distincts.

Soit donc h_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ une suite infinie de nombres différents, non nuls et tels que

$$(2) \qquad \lim_{n=\infty} h_n = 0.$$

Etant donnés deux nombres réels x et y, nous écrirons xRy, s'il existe une suite finie de nombres naturels (distincts ou non) $n_1, n_2, \ldots, n_k$ et une suite d'autant de nombres réels $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ dont chacun soit égal à $+1$ ou à -1 et qui remplissent la condition

$$x-y = \varepsilon_1 h_{n_1} + \varepsilon_2 h_{n_2} + \ldots + \varepsilon_k h_{n_k}.$$

On voit sans peine que la relation R est symétrique et transitive. On peut donc partager tous les nombres réels en classes disjointes, en rangeant dans la même classe deux nombres réels x et y dans ce cas et seulement dans ce cas, si xRy. On voit aussi que chacune de ces classes est dénombrable.

Pour définir une fonction d'une variable réelle $F(x)$, il suffit donc de la définir (indépendamment) dans chacune des classes en question.

Soit donc E une classe donnée. Comme elle est dénombrable, nous pouvons ranger tous les nombres (différents) constituant E en une suite infinie

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

Les nombres x_i+h_j, où $i=1,2,3,\ldots$ et $j=1,2,3,\ldots$, appartiennent évidemment, eux aussi, à la classe E, puisque $(x_i+h_j)\,R\,x_i$ pour $i=1,2,\ldots$ et $j=1,2,\ldots$.

Désignons, pour $i=1,2,3,\ldots$, par E_i l'ensemble formé du nombre x_i et de tous les nombres x_i+h_j où $j=1,2,3,\ldots$ Nous avons évidemment

$$E=E_1+E_2+E_3+\ldots$$

Il suffit donc de définir la fonction $F(x)$ dans l'ensemble $R_1=E_1$ et, ensuite, pour $m=2,3,4,\ldots$, dans l'ensemble

$$R_m=E_m-(E_1+E_2+\ldots+E_{m-1}), \tag{3}$$

en supposant qu'elle est déjà définie dans l'ensemble

$$E_1+E_2+\ldots E_{m-1}.$$

L'ensemble $R_1=E_1$ est formé du nombre x_1 et des nombres x_1+h_j où $j=1,2,3,\ldots$. Posons $F(x_1)=0$ et

$$F(x)=F(x_1)+(x-x_1)f(x_1) \quad \text{pour} \quad x \in R_1 \tag{4}$$

et pour $x \neq x_1$; la formule (4) est évidemment vraie aussi pour $x=x_1$.

Soit maintenant $m>1$ un nombre naturel donné et supposons que la fonction $F(x)$ est déjà définie dans l'ensemble $E_1+E_2+\ldots+E_{m-1}$. Nous définirons la fonction $F(x)$ dans l'ensemble (3) comme il suit.

Si $x_m \in R_m$, nous poserons $F(x_m)=0$. Si x_m *non* $\in R_m$, on a, d'après $x_m \in E_m$ et d'après (3), $x_m \in E_1+E_2+\ldots+E_{m-1}$, de sorte que, d'après notre hypothèse, le nombre $F(x_m)$ se trouve alors défini; nous poserons dans ce cas:

$$F(x)=F(x_m)+(x-x_m)f(x_m), \quad \text{pour} \quad x \in R_m \tag{5}$$

et pour $x \neq x_m$; la formule (5) est évidemment vraie aussi pour $x=x_m$.

La fonction $F(x)$ est ainsi définie pour tous les nombres x de la classe E. La formule (4) étant un cas particulier (pour $m=1$) de la formule (5), on a donc la formule (5) pour $m=1,2,3,\ldots$

Définie ainsi dans chacune des classes (disjointes) en lesquelles nous avons décomposé l'ensemble de tous les nombres réels, la fonction $F(x)$ se trouve définie pour tous les x réels.

Je dis qu'on a, pour tout x réel, la formule (1).

Soient, en effet, x_0 un nombre réel quelconque et E la classe à laquelle il appartient. On a donc, pour un indice m, $x_0=x_m$.

Je dis qu'il existe un indice μ, tel que

$$x_m+h_n \in R_m \quad \text{pour} \quad n>\mu. \tag{6}$$

Comme $x_m+h_n \in E_m$ pour $n=1,2,3,\ldots$ et $R_1=E_1$, cela est évident pour $m=1$. Or, pour $m>1$, il suffit de démontrer d'après (3) qu'il existe pour tout nombre i de la suite $1,2,\ldots,m-1$ un indice μ_i tel que

$$x_m+h_n \;\textit{non}\in E_i \quad \text{pour} \quad n>\mu_i.$$

Supposons donc que pour un nombre i de la suite $1,2,\ldots,m-1$ un tel indice μ_i n'existe pas. Il existe donc une suite infinie croissante d'indices n_k $(k=1,2,3,\ldots)$, telle que

$$x_m+h_{n_k} \in E_i \quad \text{pour} \quad k=1,2,3,\ldots \tag{7}$$

Les nombres $x_1, x_2, x_3, \ldots$ étant différents deux à deux, on a, $x_m \neq x_i$ car $i<m$. La suite d'indices n_k $(k=1,2,3,\ldots)$ étant croissante, il existe donc, d'après (2), un indice ν, tel que $|h_{n_k}|<|x_i-x_m|$ pour $k>\nu$, d'où:

$$x_m+h_{n_k} \neq x_i \quad \text{pour} \quad k>\nu. \tag{8}$$

D'après (7), (8) et selon la définition de l'ensemble E_i, on conclut donc qu'il existe, pour tout indice $k>\nu$, un indice l_k tel que

$$x_m+h_{n_k}=x_i+h_{l_k} \quad \text{pour} \quad k>\nu. \tag{9}$$

Les termes de la suite infinie h_n $(n=1,2,3,\ldots)$ étant par hypothèse différents deux à deux et la suite infinie d'indices n_k $(k=1,2,\ldots)$ étant croissante, les nombres h_{n_k} $(k=1,2,3,\ldots)$ sont également différents, ce qui prouve, d'après (9), que les nombres h_{l_k} (où $k>\nu$) sont différents eux-aussi. D'après (2) on aurait donc

$$\lim_{k=\infty} h_{n_k}=0, \qquad \lim_{k=\infty} h_{l_k}=0$$

et la formule (9) donnerait à la limite avec $k \to \infty$

$$x_m = x_i,$$

ce qui est impossible, puisque $i \neq m$.

Nous avons ainsi démontré qu'il existe un indice μ satisfaisant à la condition (6).

D'après (5) on a donc pour $x = x_m + h_n$ où $n > \mu$:

$$F(x_m + h_n) = F(x_m) + h_n f(x_m) \quad \text{pour} \quad n > \mu,$$

donc, comme $x_0 = x_m$:

$$\frac{F(x_0 + h_n) - F(x_0)}{h_n} = f(x_0) \quad \text{pour} \quad n > \mu,$$

ce qui donne tout de suite

$$\lim_{n=\infty} \frac{F(x_0 + h_n) - F(x_0)}{h_n} = f(x_0).$$

Le nombre réel x_0 étant supposé arbitraire, la formule (1) se trouve ainsi établie pour tous les x réels c. q. f. d.

Sur un théorème de M. Sierpiński.

Par

Stefan Banach (Lwów).

M. W. Sierpiński a démontré récemment [1]) ce

Théorème: *$f_1(p)$, $f_2(p)$, $f_3(p)$,... étant une suite infinie de fonctions définies dans un ensemble infini E* (formé d'éléments quelconques) *et ne prenant que les valeurs appartenant à E, il existe deux fonctions de même nature, $\varphi(p)$ et $\psi(p)$ telles que toute fonction de la suite considérée est une superposition (finie) de ces deux fonctions.*

Le but de cette Note est de donner une démonstration plus simple de ce théorème.

Démonstration.

Décomposons l'ensemble E en une infinité dénombrable d'ensembles disjoints $E_0, E_1, E_2, \ldots$, dont chacun a la même puissance que l'ensemble E, et décomposons l'ensemble E_0 en une infinité dénombrable d'ensembles $E_{0,1}, E_{0,2}, E_{0,3}, \ldots$, dont chacun a la même puissance que E_0 (donc aussi que E).

Définissons maintenant dans l'ensemble E la fonction $\psi(p)$ de sorte qu'elle transforme d'une façon biunivoque l'ensemble E_n en l'ensemble E_{n+1} pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

Or, définissons la fonction $\varphi(p)$, d'abord seulement dans l'ensemble $E - E_0 = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$, de sorte qu'elle transforme d'une façon biunivoque l'ensemble E_n en l'ensemble $E_{0,n}$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

On vérifie sans peine que, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, la fonction

(1) $$\theta_n(p) = \varphi\,\psi^n\,\varphi\,\psi(p)$$

[1]) Fund. Math. t. XXIV, p. 209.