Remarque. Il est à remarquer que l'ensemble A dont les propriétés d'homologie sont celles des sphères euclidiennes diffère de ces sphères par les propriétés d'homotopie. On peut notamment prouver que le groupe fondamental de A [1]) ne disparaît pas; plus précisément que la circonférence $\underset{(z,t)}{E}[|z|=1;\ t=3]$ ne se laisse pas contracter dans A [2]) d'une manière continue vers l'ensemble constitué par le seul point $(1,3)$. La question s'il existe une relation entre cette dernière propriété de A et l'existence d'une transformation continue de A en sous-ensemble de A sans point invariant, reste ouverte.

[1]) Quant à la définition du groupe fondamental, voir p. ex. S. Lefschetz, l. c., p. 82—83.

[2]) Au sens de ma note des Fund. Math. 19 (1932), p. 235.

Wiązowszczyzna, 20. VII. 1934.

Sur un problème de M. J. Schreier.

Par

Karol Borsuk (Warszawa).

J'appelle un point a d'un espace [1]) E *point de biunivocité* d'une fonction f définie dans E, lorsque $f(x) \neq f(a)$ pour tout $x \in E-(a)$. Dans le cas où f est continue, E compact et tous les points de E sont des points de biunivocité de f, la transformation f est une homéomorphie et toutes les propriétés topologiques de $f(E)$ coïncident avec celles de E. Si, au lieu de supposer que tous les points de E sont des points de biunivocité de f, on suppose seulement que les points de biunivocité sont dans E suffisamment nombreux (dans un sens qu'on peut préciser de différentes manières), on constate maintes fois que cette supposition, si faible qu'elle soit, suffit plus ou moins pour déterminer les propriétés topologiques de l'image $f(E)$. Dans le cas p. ex. où E est une circonférence et les points de biunivocité de f constituent un ensemble de deuxième catégorie (rel. à E), resp. un ensemble dont le complémentaire est dénombrable, resp. fini, on constate aisément que $f(E)$ est un continu péanien non unicohérent [2]), resp. une courbe rationnelle [3]) contenant une infinité au plus dénombrable d'éléments cycliques [4]) différents, resp. une courbe élémentaire dont tous les points sont d'ordre [3]) paire

[1]) J'entendrai dans cette note par espace un espace métrique.

[2]) Continu péanien non unicohérent = image de l'intervalle fermé $\langle 0,1\rangle$ admettant une décomposition en deux continus dont la partie commune n'est pas connexe. Voir pour cette notion L. Vietoris, Proc. Amsterdam 29 (1926), p. 445 et C. Kuratowski, Fund. Math. 13 (1929), p. 307.

[3]) Quant à la définition des courbes rationnelles, des courbes élémentaires, d'ordre etc. voir K. Menger, *Kurventheorie*, Leipzig—Berlin, Teubner 1933, p. 96—98.

[4]) Au sens de G. T. Whyburn, Proc. Nat. Acad. Sc. 13, p. 31—38. Voir aussi C. Kuratowski et G. T. Whyburn, Fund. Math. 16 (1930), p. 305—331.

M. J. Schreier a posé récemment le problème qui sa laisse formuler comme il suit:

E étant une coupure irréductible de l'espace euclidien n-dimensionnel R_n et f une transformation continue de E en un sous-ensemble de R_n dont l'ensemble des points de biunivocité n'est pas frontière (rel. à E), est-il vrai que $f(E)$ est une coupure de R_n?

Dans cette note je vais démontrer un théorème contenant comme cas particulier la solution affirmative du problème de M. Schreier.

Termes et notations. S_n désigne la surface sphérique n-dimensionnelle de centre 0 et de rayon 1 située dans l'espace euclidien R_{n+1} à $n+1$ dimensions. E étant un espace arbitraire, S_n^E désigne l'espace dont les éléments sont des fonctions continues qui transforment E en sous-esembles de S_n. Cet espace est supposé métrisé par la formule $\varrho(\varphi, \varphi') = \operatorname{Sup}_{x \in E} \varrho[\varphi(x), \varphi'(x)]$. Une transformation $\varphi \in S_n^E$ est dite *essentielle* lorsque dans la composante de S_n^E qui contient φ il n'existe aucune fonction transformant E en un seul point. Pour qu'une transformation $\varphi \in S_n^E$ soit non essentielle, il faut et il suffit qu'il existe une famille de fonctions $\{\varphi_t\} \subset S_n^E$ dépendante d'une manière continue du paramètre t parcourant l'intervalle fermé $\langle 0, 1 \rangle$ et telle que $\varphi_0(x) \equiv \varphi(x)$ et $\varphi_1(x) \equiv a$, où a est un point fixe de S_n [5]). Enfin, pour abréger le langage, je dirai qu'une fonction $\varphi \in S_n^E$ transforme un sous-essemble A de E d'une manière essentielle en S_n, lorsque la fonction partielle [6]) $(\varphi|A) \in S_n^A$ est une transformation essentielle de A en S_n.

Etant donné un vecteur v dans R_n, $p+v$ désigne, pour $p \in R_n$, le point final du vecteur égal à v dont p est le point initial; $|v|$ désigne la longueur de v. Le vecteur v, dont a est le point initial et b point final sera désigné aussi par $\overrightarrow{a, b}$.

Théorème (I). *Prémisses*: 1. *A_1 et A_2 sont deux sous-ensembles fermés d'un espace compact $E = A_1 + A_2$,*

2. *f est une transformation continue de E telle que $f(A_1 \cdot A_2) = f(A_1) \cdot f(A_2)$ et que les points de biunivocité de f constituent un sur-ensemble de $A_1 \cdot A_2$,*

3. *Il existe une fonction $\varphi \in S_n^E$ transformant E d'une manière essentielle et chacun des ensembles A_1 et A_2 d'une manière non essentielle en S_n.*

Thèse: Il existe une transformation essentielle de $f(E)$ en S_n.

[5]) Voir p. ex. Fund. Math. 18 (1932), p. 202.

[6]) c. à d. fonction obtenue de φ en restreignant des arguments de f à l'ensemble A. Je désignerai cette fonction, en suivant M. C. Kuratowski (*Topologie I*, Monografje Matematyczne III, Varsovie 1933, p. 12) par $\varphi|A$.

Nous établirons d'abord le

Lemme. *Prémisses*: 1° *f est une fonction continue définie dans l'espace A.*

2° *B est un sous-ensemble fermé de A contenu dans l'ensemble des points de biunivocité de f,*

3° *φ est une transformation non essentielle de A en S_n.*

Thèse: Il existe une famille des fonctions $\{\varphi_t\} \subset S_n^A$ dépendante d'une manière continue du paramètre $t \in \langle 0, 1 \rangle$ et une fonction $\psi \in S_n^{f(A)}$ telles que $\varphi_0(x) = \varphi(x)$, $\varphi_1(x) = \psi f(x)$ pour tout $x \in A$ et $\varphi_t(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in B$ et $t \in \langle 0, 1 \rangle$.

Démonstration du lemme. Dans le cas particulier où $\varphi(x) \equiv a$ et où a est un point fixe de S_n, la thèse de notre lemme sera remplie, si on pose $\varphi_t(x) = \psi(y) = a$ pour chaque $x \in A$, $y \in f(A)$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$. Admettons à présent que la thèse de notre lemme est remplie pour une certaine fonction φ, c. à d. qu'il existe des fonctions φ_t et ψ pour lesquelles les conditions de cette thèse sont réalisées. Notre démonstration sera achevée dès que nous établirons que dans ces conditions la thèse de notre lemme est remplie pour chaque fonction $\varphi' \in S_n^A$ satisfaisante l'inégalité $\varrho(\varphi, \varphi') \leqslant \frac{1}{2}$.

D'après 2°, il existe pour chaque $y \in f(B)$ un point bien défini $f^{-1}(y) \in B$ tel que $f[f^{-1}(y)] = y$. Posons

$$v(y) = \overrightarrow{\psi(y), \varphi'[f^{-1}(y)]} \quad \textit{pour tout} \quad y \in f(B). \tag{1}$$

On conclut:

$$|v(y)| = \varrho(\psi f[f^{-1}(y)], \varphi'[f^{-1}(y)]) = \varrho(\varphi[f^{-1}(y)], \varphi'[f^{-1}(y)]) \leqslant \tfrac{1}{2}.$$

Or, l'ensemble $f(B)$ étant fermé dans $f(A)$, il en résulte [7]) l'existence d'une fonction continue $V(y)$ définie dans l'ensemble $f(A)$ tout entier, dont les valeurs sont des vecteurs dans R_{n+1} à longueur $\leqslant \frac{1}{2}$, qui coïncide sur $f(B)$ avec la fonction $v(y)$. Posons ensuite:

$$w_0(x) = \overrightarrow{\varphi(x), \varphi'(x)} \quad \textit{et} \quad w_1(x) = V[f(x)] \quad \textit{pour} \quad x \in A, \tag{2}$$

$$w_t(x) = \overrightarrow{\varphi(x), \varphi'(x)} \quad \textit{pour} \quad x \in B \quad \textit{et} \quad t \in \langle 0, 1 \rangle. \tag{3}$$

D'après l'égalité $v(y) = V(y)$, valable pour tout $y \in f(B)$, les formules (2) et (3) définissent dans le sous-ensemble fermé $P =$

[7]) Voir p. ex. Monatsh. f. Math. u. Phys. 38 (1931), p. 382—383.

$A\times[(0)+(1)]+B\times\langle 0,1\rangle$ de l'espace $A\times\langle 0,1\rangle$[8]) une fonction continue dont les valeurs sont des vecteurs dans R_{n+1} à longueur $\leqslant\frac{1}{2}$. On en déduit qu'il existe une fonction continue $W(x)$ définie dans l'espace $A\times\langle 0,1\rangle$ dont les valeurs sont des vecteurs dans R_{n+1} à longueur $\leqslant\frac{1}{2}$ et qui coïncide sur P avec le fonction $w(x)$. Posons

$$\chi_t(x)=\varphi_t(x)+W(x) \quad pour \quad x\in A \quad et \quad t\in\langle 0,1\rangle. \tag{4}$$

La fonction χ_t ainsi définie est évidemment continue; elle dépend d'une manière continue du paramètre t et ses valeurs appartiennent à R_{n+1}. Or, $\varphi_t(x)$ appartenant à R_{n+1} et $|W(x)|$ ne dépassant pas $\frac{1}{2}$, les valeurs de χ_t diffèrent de 0. Désignons ensuite pour tout $p\in R_{n+1}-(0)$ par $r(p)$ la projection du point p du centre 0 sur la surface sphérique S_n. La fonction

$$\varphi_t'(x)=r\,\chi_t(x) \tag{5}$$

appartient pour chaque $t\in\langle 0,1\rangle$ à S_n^A et dépend d'une manière continue du paramètre t. En tenant compte des égalités $\varphi_0(x)=\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)=\psi f(x)$ pour tout $x\in A$, on conclut de (2), (4) et (5) que

$$\varphi_0'(x)=r\,\varphi'(x)=\varphi'(x)$$

et

$$\varphi_1'(x)=r(\varphi_1(x)+V[f(x)])=r(\psi[f(x)]+V[f(x)].$$

Cette dernière rélation implique que φ_1' est d'une forme $\psi' f$, où ψ' est une fonction continue définie dans $f(A)$. Si enfin $x\in B$ et $t\in\langle 0,1\rangle$, on a

$$\varphi_t'(x)=r\,\chi_t(x)=r[\varphi(x)+W(x)]=r[\varphi(x)+\overrightarrow{\varphi(x),\varphi'(x)}]=$$
$$=r\,\varphi'(x)=\varphi'(x).$$

La lemme est ainsi démontré complètement.

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e (τ). Soient A_1, A_2 et E les ensembles et f et φ les fonctions remplissant les prémisses du théorème (τ). En vertu du lemme appliqué aux ensembles A_i, $B=A_1\cdot A_2$ et aux fonctions $f|A_i$ et $\varphi|A_i$[6]) il existe une famille de fonctions dépendant d'une manière continue de $t\in\langle 0,1\rangle$ par laquelle les

[8]) $X\times Y$, où X et Y sont deux espaces métriques, désigne le produit cartésien de X et Y. Voir p. ex. C. Kuratowski, l. c., p. 135.

fonctions $\varphi_0=\varphi$ et φ_1 sont liées dans S_n^E. Or, dans l'ensemble A_i la fonction φ_1 coïncide avec $\psi^{(i)}f$, où $\psi^{(i)}$ est une fonction continue définie dans $f(A_i)$. Remarquons que dans la partie commune des ensembles fermés $f(A_1)$ et $f(A_2)$ les fonctions $\psi^{(1)}$ et $\psi^{(2)}$ coïncident. En effet, d'après 2., il existe pour chaque $y\in f(A_1)\cdot f(A_2)$ un $f^{-1}(y)\in A_1\cdot A_2$. On a donc $\psi^{(1)}(y)=\psi^{(1)}f[f^{-1}(y)]=\varphi_1[f^{-1}(y)]$ et pareillement $\psi^{(2)}(y)=\psi^{(2)}f[f^{-1}(y)]=\varphi_1[f^{-1}(y)]$, d'où enfin $\psi^{(1)}(y)=$ $=\psi^{(2)}(y)$. Or, en posant $\psi(y)=\psi^{(i)}(y)$ pour $y\in f(A_i)$, on obtient une fonction bien définie $\psi\in S_n^{f(E)}$ remplissant la condition $\varphi_1(x)=$ $=\psi f(x)$ pour tout $x\in E$.

Nous avons ainsi établi qu'il existe dans la composante de S_n^E qui contient φ une fonction φ_1 de la forme ψf, où $\psi\in S_n^{f(E)}$. Si l'on supposait maintenant que ψ est une transformation non essentielle de $f(E)$ en S_n, il existerait une famille des fonctions $\{\psi_t\}\subset S_n^{f(E)}$ dépendante d'une manière continue du paramètre $t\in\langle 0,1\rangle$ et telle que $\psi_0(y)=\psi(y)$ et $\psi_1(y)\equiv a$, où a est un point fixe de S_n. Les fonctions $\psi_t f$, où $t\in\langle 0,1\rangle$, lieraient ainsi dans l'espace S_n^E la fonction $\psi_0 f(x)\equiv\varphi_1(x)$ avec la fonction $\psi_1 f(x)\equiv a$. Il en résulte que φ_1, ainsi que φ, appartiendrait à la composante de S_n^E contenant la fonction $\psi_1 f(x)\equiv a$. Mais cela contredit l'hypothèse d'après laquelle la transformation φ est essentielle.

Notre théorème est ainsi établi.

Corollaire. *Soit E un espace compact qui, contrairement à chacun de ses vrais sous-ensembles fermés, se laisse transformer d'une manière essentielle en surface sphérique à n dimensions S_n*[9]); *soit f une transformation continue de E dont les points de biunivocité constituent un ensemble non frontière dans E. Dans ces hypothèses l'ensemble $f(E)$ se laisse transformer d'une manière essentielle en S_n.*

En effet, d'après notre hypothèse, il existe un sous-ensemble ouvert G de E dont la fermeture $\overline{G}$ est un vrai sous-ensemble de E, non vide et ne contenant que des points de biunivoque de f. Les ensembles $A_1=E-G$ et $A_2=\overline{G}$ satisfaisant aux prémisses du théorème (τ), notre corollaire est contenu dans la thèse de ce théorème.

[9]) Dans le cas où $\dim E=n$ cela veut dire que E est une variété cantorienne fermée à n dimensions au sens de M. P. Alexandroff. Voir P. Alexandroff Math. Ann. 106 (1932), p. 227.

En tenant compte du théorème [10]) d'après lequel, pour qu'un ensemble compact en soi $E \subset R_{n+1}$ soit une coupure de R_{n+1} il faut et il suffit qu'il existe une transformation essentielle de E en S_n, on conclut que notre corollaire contient la réponse affirmative au problème posé par M. J. Schreier.

Le sens combinatoire du dernier corollaire [11]) impose la question suivante:

Est-il vrai que les points de biunivocité d'une fonction continue f qui transforme une variété cantorienne fermée C à n dimensions en un ensemble acyclique en dimension n [12]) *constituent un ensemble de I-re catégorie dans C?*

[10]) P. Alexandroff, l. c., p. 226. Cf. aussi K. Borsuk, Math. Ann. 106 (1932), p. 247.

[11]) Comp. la note [9]).

[12]) Autrement dit, $f(C)$ est „eine in der n-ten Dimension azyklische Menge" au sens de ma note de Fund. Math. 21 (1933), p. 95.

Sur le plongement des espaces dans les continus acycliques.

Par

Samuel Eilenberg (Varsovie).

Le but de cette Note est de généraliser le théorème suivant, démontré par MM. W. Hurewicz et B. Knaster [1]): *chaque espace* [2]) *compact E se laisse plonger dans un continu E_1 localement connexe, unicohérent et tel que* $\dim(E_1 - E) = 2$. Je montre notamment (th. 2) qu'en remplaçant l'unicohérence par la notion (plus forte déjà pour $n = 2$) de „continu acyclique en dimensions $r = 0, 1, \ldots, n-1$", on peut réaliser la condition $\dim(E_1 - E) = n$.

Je prouverai dans une autre Note que le nombre n de la dernière égalité ne peut pas être abaissé.

Le problème d'une généralisation de ce genre m'a été communiqué par M. C. Kuratowski, qui, indépendemment, a trouvé aussi certaines parties de la démonstration.

Un espace compact E sera dit *acyclique en dimension n*, lorsque chaque vrai cycle n-dimensionnel dans E y est homologue à 0 [3]). On a la proposition suivante:

(1) *Pour qu'un espace compact E soit acyclique en dimension n, il faut et il suffit qu'il existe pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un nombre $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que la relation $z \underset{\varepsilon}{\sim} 0$ dans E subsiste pour chaque δ-cycle n-dimensionnel z* (mod m où $m \geqslant 0$) *dans E.*

[1]) *Ein Einbettungssatz über henkelfreie Kontinua*, Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. XXXVI (1933), p. 557.

[2]) Je ne considère ici que des espaces métriques.

[3]) Les notions combinatoires employées dans cette Note sont à entendre dans le sens de M. P. Alexandroff, *Dimensionstheorie*, Math. Ann. 106 (1932), p. 161.