Comme j'ai démontré [1]), tout ensemble de **L u s i n** jouit de la propriété C. Or, je dis que l'ensemble (plan) H ne jouit pas de la propriété C.

Admettons, en effet, que l'ensemble (plan) H jouit de la propriété C.

Comme on voit sans peine, la projection (sur une droite) d'un ensemble plan jouissant de la propriété C jouit également de cette propriété (puisque le diamètre de la projection d'un ensemble ne dépasse pas le diamètre de cet ensemble lui-même). Soit Q la projection de l'ensemble H sur la droite $y=-x$: l'ensemble Q jouit donc de la propriété C.

Or, soit a un nombre réel donné quelconque.

D'après la propriété de l'ensemble E, on a $a\sqrt{2}\,\epsilon\, R(E)$ et il existe deux nombres x_0 et y_0 de E, tels que $a\sqrt{2}=x_0-y_0$. Le point (x_0, y_0) du plan appartient à H (puisque $x_0 \,\epsilon\, E$ et $y_0 \,\epsilon\, E$): sa projection s sur la droite $y=-x$ appartient donc à Q. Or, l'abscisse du point s sur la droite $y=-x$ est évidemment $\frac{x_0}{\sqrt{2}}-\frac{y_0}{\sqrt{2}}=a$. Le nombre réel a pouvant être quelconque, il en résulte que l'ensemble Q coïncide avec la droite $y=-x$. Or, c'est impossible, l'ensemble Q jouissant de la propriété C.

L'hypothèse que l'ensemble H jouit de la propriété C implique donc une contradiction.

L'ensemble H ne jouit donc pas de la propriété C, et notre assertion est démontrée.

[1]) *Fund. Math.* t. XI, p. 302. Cf. aussi mon livre cité, p. 39.

Sur un continu acyclique qui se laisse transformer topologiquement en lui même sans points invariants.

Par

Karol Borsuk (Varsovie).

D'après le théorème de M. L. E. J. Brouwer [1]), qui devint classique, la sphère euclidienne n-dimensionnelle contient un point invariant par rapport à toute transformation continue en son sous-ensemble. Il résulte d'une formule bien générale, due à M. S. Lefschetz [2]), que la thèse du théorème de M. Brouwer reste valable pour les ensembles bien plus généraux que les sphères euclidiennes, notamment pour tous les espaces métriques compacts qui sont localement connexes au sens de M. Alexander [3]) et dont les nombres de Betti sont égaux à ceux des sphères euclidiennes. La question s'impose, si cette dernière propriété toute seule ne constitue une condition suffisante pour l'existence de tels points invariants dans les espaces métriques compacts arbitraires. En particulier, il pourrait paraître probable que l'existence des points invariants dans le cas des sphères est uniquement une conséquence de leurs propriétés d'homologie; autrement dit, que la thèse du théorème de M. Brouwer resterait vraie pour tous les continus dont les propriétés d'homologie sont celles des sphères euclidiennes, c. à d. pour les continus acycliques [4]).

[1]) L. E. J. Brouwer, Math. Ann. 71 (1912), p. 115. Cf. aussi Knaster, Kuratowski et Mazurkiewicz, Fund. Math. 14 (1929), p. 132.

[2]) S. Lefschetz, *Topology*, New York 1930, p. 359.

[3]) Quant à la définition de la connexité locale au sens de M. Alexander, voir p. ex. S. Lefschetz, l. c. p. 90—91.

[4]) C. à d. pour les „in allen positiven Dimensionen azyklischen Mengen" au sens de ma note de Fund. Math. 21 (1933), p. 95.

Le but de cette Note est de prouver par la construction d'un exemple que la réponse à cette question est *négative*.

Théorème. *Il existe dans l'espace euclidien 3-dimensionnel R_3 un continu péanien acyclique qui se laisse transformer topologiquement en lui-même sans points invariants.*

Démonstration. Soient ϱ et ϱ' deux nombres positifs plus petits que 2. Posons pour tout nombre complexe z

(1) $$\alpha_{\varrho,\varrho'}(z) = 4 + (z-4)\cdot\left[\frac{\varrho-\varrho'}{2\varrho(2-\varrho)}(|z-4|-2-\big||z-4|-2\big|)+1\right].$$

Il vient de cette formule que le quotient $[\alpha_{\varrho,\varrho'}(z)-4]:(z-4)$ est une fonction de $|z-4|$ à valeurs réelles, que cette fonction est linéaire dans l'intervalle $\langle\varrho, 2\rangle$ et qu'elle admet pour $|z-4|=\varrho$ la valeur $\frac{\varrho'}{\varrho}$ et pour $|z-4|\geqslant 2$ la valeur 1. On en conclut que

(2) *la fonction $\alpha_{\varrho,\varrho'}(z)$ transforme topologiquement l'ensemble $B_\varrho = \underset{z}{E}[1\leqslant|z|\leqslant 11] - \underset{z}{E}[|z-4|<\varrho]$ en ensemble $B_{\varrho'}$.*

La formule (1) entraîne en outre que l'on a pour $|z-4|\geqslant 2$ l'égalité $\alpha_{\varrho,\varrho'}(z)=z$ et pour $\varrho\leqslant|z-4|\leqslant 2$:

$$|\alpha_{\varrho,\varrho'}(z)-z| = \left|(z-4)\cdot\left[\frac{\varrho-\varrho'}{2\varrho(2-\varrho)}(|z-4|-2-\big||z-4|-2\big|)\right]\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2\cdot\left|\frac{\varrho-\varrho'}{2\varrho}\right|\cdot\frac{2(2-|z-4|)}{2-\varrho}\leqslant 2\left|\frac{\varrho-\varrho'}{\varrho}\right|.$$

Il en résulte que

(3) $$|\alpha_{\varrho,\varrho'}(z)-z|\leqslant 2\cdot\left|\frac{\varrho-\varrho'}{\varrho}\right| \quad \textit{pour tout} \quad z\,\epsilon\, B_\varrho.$$

Soient $\varkappa$ et $\varkappa-\lambda\leqslant\varkappa$ deux nombres réels de l'intervalle $\langle -2, +2\rangle$. Posons:

(4) $$\beta_{\varkappa,\lambda}(z) = z-\lambda-\tfrac{1}{4}(\big||z-\varkappa|-3-2\lambda\big|-\big||z-\varkappa|-3\big|-2\lambda).$$

Il vient facilement de cette formule que pour tous deux nombres complexes z_1 et z_2 on a

$$|\beta_{\varkappa,\lambda}(z_1)-\beta_{\varkappa,\lambda}(z_2)|\geqslant|z_1-z_2|-\tfrac{1}{4}\cdot 2\,|z_1-z_2| = \tfrac{1}{2}|z_1-z_2|.$$

Il en résulte que $\beta_{\varkappa,\lambda}$ est une homéomorphie. On a en outre, pour $|z-\varkappa|\leqslant 3$, l'égalité $\beta_{\varkappa,\lambda}(z) = z-\lambda-\frac{1}{4}(3+2\lambda-|z-\varkappa|+|z-\varkappa|-3-2\lambda) = z-\lambda$ et pour $|z-\varkappa|\geqslant 11$ l'égalité $\beta_{\varkappa,\lambda}(z) = z-\lambda-\frac{1}{4}(|z-\varkappa|-3-2\lambda-|z-\varkappa|+3-2\lambda)=z$. On en conclut que

(5) *la fonction $\beta_{\varkappa,\lambda}(z)$ transforme topologiquement l'ensemble $C_\varkappa = \underset{z}{E}[|z|\leqslant 11] - \underset{z}{E}[|z-\varkappa+2|<1] - \underset{z}{E}[|z-\varkappa-2|<1]$ en ensemble $C_{\varkappa-\lambda}$.*

Désignons enfin par $\gamma_\varphi(z)$ la rotation du plan R_2 des nombres complexes d'angle $\pi\varphi$ autour de centre 0, c. à d. posons

(6) $$\gamma_\varphi(z) = z\cdot e^{\pi\varphi i}.$$

Posons maintenant:

(7) $$A_{-3} = \underset{z}{E}[1\leqslant|z|\leqslant 11],$$

(8) $$A_t = \underset{z}{E}[1\leqslant|z|\leqslant 11] - \underset{z}{E}\left[|z-4e^{\frac{2\pi i}{3+t}}|<\frac{3+t}{2}\right] \quad \textit{pour} \quad -3<t\leqslant -1,$$

(9) $$A_t = \underset{z}{E}[|z|\leqslant 11] - \underset{z}{E}[|z-2(t-1)|<1] - \underset{z}{E}[|z-2(t+1)|<1] \quad \textit{pour} \quad -1<t\leqslant 1,$$

(10) $$A_t = \underset{z}{E}[1\leqslant|z|\leqslant 11] - \underset{z}{E}\left[|z-4e^{\pi i\frac{t-1}{3-t}}|<\frac{3-t}{2}\right] \quad \textit{pour} \quad 1<t<3$$

(11) $$A_3 = \underset{z}{E}[1\leqslant|z|\leqslant 11].$$

En vertu de (2), (5) et (6) on a:

(8ª) $$A_t = \gamma_{\frac{2}{3+t}}(B_{\frac{3+t}{2}}) \quad \textit{pour} \quad -3<t\leqslant -1,$$

(9ª) $$A_t = C_{2t} \quad \textit{pour} \quad -1\leqslant t\leqslant 1,$$

(10ª) $$A_t = \gamma_{\frac{t-1}{3+t}}(B_{\frac{3-t}{2}}) \quad \textit{pour} \quad 1\leqslant t<3.$$

En désignant pour tout nombre complexe $z=x+iy$ et t réel par (z,t) le point (x,y,t) de l'espace R_3, posons:

(12) $$A = \underset{(z,t)}{E}[z\,\epsilon\, A_t;\ -3\leqslant t\leqslant 3].$$

Ainsi définie, l'ensemble A est un cylindre de révolution (de hauteur 6 et de rayon 11), duquel on a enlevé deux tubes ouverts dont chacun, sans en rencontrer l'autre, prend l'origine respectivement sur une des bases du cylindre et approche asymptotiquement la circonférence de l'autre base, en s'effilant de plus en plus et en se contournant en spirale.

L'ensemble A se laisse évidemment aussi exprimer par la formule

$$A = \prod_{n=1}^{\infty} A^{(n)} \quad \text{où}$$

$$A^{(n)} = A + \underset{(z,t)}{E}\left[1 \leqslant |z| \leqslant 11;\ -3 \leqslant t \leqslant -3 + \frac{1}{n} \ \text{ou}\ 3 - \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 3\right].$$

Or, en posant

$$\psi_n(z) = \beta_{2,2}\, \alpha_{\frac{1}{2n},1}(z) \quad \text{pour} \quad -3 \leqslant t \leqslant -3 + \frac{1}{n},$$

$$\psi_n(z) = \beta_{2,2}\, \alpha_{\frac{3+t}{2},1}\, \gamma_{-\frac{2}{3+t}}(z) \quad \text{pour} \quad -3 + \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant -1,$$

$$\psi_n(z) = \beta_{-2t,-2t}\, \gamma_1(z) \quad \text{pour} \quad -1 \leqslant t \leqslant 1,$$

$$\psi_n(z) = \beta_{-2,-2}\, \gamma_1\, \alpha_{\frac{3-t}{2},1}\, \gamma_{\frac{t-1}{t-3}}(z) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant t \leqslant 3 - \frac{1}{n},$$

$$\psi_n(z) = \beta_{-2,-2}\, \gamma_1\, \alpha_{\frac{1}{2n},1}\, \gamma_1(z) \quad \text{pour} \quad 3 - \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 3,$$

on voit aisément que ψ_n est une homéomorphie où

$$\psi_n(A^{(n)}) = \underset{(z,t)}{E}[|z| \leqslant 11;\ -3 \leqslant t \leqslant 3] +$$

$$- \underset{(z,t)}{E}\left[|z-2| < 1;\ -3 + \frac{1}{n} < t \leqslant 3\right] - \underset{(z,t)}{E}\left[|z+2| < 1;\ -3 \leqslant t < 3 - \frac{1}{n}\right].$$

Ce dernier ensemble étant évidemment homéomorphe à une sphère euclidienne à trois dimensions, on conclut [1]) que l'ensemble $A = \prod_{n=1}^{\infty} A^{(n)}$ est un continu acyclique.

La connexité locale (au sens de MM. Mazurkiewicz et Hahn [2])) du continu A dans le point $(z_0, t_0) \in A$ est dans le cas $||t_0| - 3| + ||z_0| - 4| > 0$ évidente. Dans le cas $|t_0| = 3$ et $|z_0| = 4$ elle résulte des faits bien faciles à vérifier, à savoir que pour tout nombre $0 < \varepsilon < 1$ la droite $\underset{(z,t)}{E}[z = (1+\varepsilon) z_0]$ contient un segment qui joint dans A tous les ensembles A_t où $|t - t_0|$ est suffisament petit et, d'autre part, que tout couple de points z_1 et z_2 de A_t se

[1]) Cf. L. Vietoris, Fund. Math. 19 (1932), p. 266.

[2]) S. Mazurkiewicz, C. R. Soc. Sc. Varsovie 6 (1913), p. 305 et 941. H. Hahn, Jahresber. D. Math. Ver. 23 (1914), p. 319.

laisse lier dans A_t par un continu de diamètre égal à $|z_1 - z_2|$. Par conséquent, A est un continu péanien.

Pour achever la démonstration, il reste à construire une homéomorphie f qui transforme A en lui-même sans point invariant. Posons à ce but:

$$(13) \qquad \theta(t) = -\frac{9+t}{5+t} \quad \text{pour} \quad -3 \leqslant t \leqslant -1,$$

$$(14) \qquad \theta(t) = t - 1 \quad \text{pour} \quad -1 < t \leqslant 2,$$

$$(15) \qquad \theta(t) = \frac{5t-9}{t-1} \quad \text{pour} \quad 2 < t \leqslant 3,$$

Il vient de ces formules que:

(16) *$\theta(t)$ transforme topologiquement l'intervalle $\langle -3, 3\rangle$ en lui-même,*

(17) $\theta(\pm 3) = \pm 3$ et $\theta(t) \neq t$ *pour* $-3 < t < 3$.

Posons en outre:

$$(18) \qquad \mathfrak{z}(z, \pm 3) = -z,$$

$$(19) \qquad \mathfrak{z}(z,t) = \gamma_{\frac{5+t}{3+t}}\, \alpha_{\frac{3+t}{2},\frac{3+t}{5+t}}\, \gamma_{-\frac{2}{3+t}}(z) \quad \text{pour} \quad -3 < t \leqslant -1,$$

$$(20) \qquad \mathfrak{z}(z,t) = \gamma_{\frac{2}{2+t}}\, \alpha_{1,\frac{2+t}{2}}\, \gamma_1\, \beta_{2t,2(t+1)}(z) \quad \text{pour} \quad -1 \leqslant t \leqslant 0,$$

$$(21) \qquad \mathfrak{z}(z,t) = \beta_{2t,2}(z) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

$$(22) \qquad \mathfrak{z}(z,t) = \beta_{2,2(2-t)}\, \alpha_{\frac{3-t}{2},1}\, \gamma_{\frac{1-t}{3-t}}(z) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant t \leqslant 2,$$

$$(23) \qquad \mathfrak{z}(z,t) = \gamma_{\frac{2}{3-t}}\, \alpha_{\frac{3-t}{2},\frac{3-t}{t-1}}\, \gamma_{\frac{1-t}{3-t}}(z) \quad \text{pour} \quad 2 \leqslant t < 3.$$

Pour constater que ces formules définissent $\mathfrak{z}(z,t)$ d'une manière univoque, il suffit de remarquer, en s'appuyant sur (3) et (4), que pour $t = -1$ les valeurs de $\mathfrak{z}(z,t)$ données par (19) coïncident avec celles données par (20) et que la même situation se présente pour $t = 0$, 1 et 2.

Il en résulte en outre que la fonction $\mathfrak{z}$ est continue dans le domaine $\underset{(z,t)}{E}[-3 < t < 3]$. En plus, elle est continue dans la fermeture de ce domaine, c. à d. dans l'ensemble $\underset{(z,t)}{E}[-3 \leqslant t \leqslant 3]$. En effet, d'après (19), la transformation $\mathfrak{z}(z,t)$ se compose de la rotation d'angle $-\dfrac{2\pi}{3+t}$ autour de 0, de la transformation $\alpha_{\frac{3+t}{2},\frac{3+t}{5+t}}$

et de la rotation d'angle $\pi\cdot\frac{5+t}{3+t}=\frac{2\pi}{3+t}+\pi$ autour de 0. On en conclut, en vertu de (3) et (18) que pour $-3<t\leqslant-1$ on a

$$|\mathfrak{z}(z,t)-\mathfrak{z}(z,-3)|=$$
$$=|\mathfrak{z}(z,t)-(-z)|\leqslant 2\cdot\left|\frac{\frac{3+t}{2}-\frac{3+t}{5+t}}{\frac{3+t}{2}}\right|=2\cdot\frac{3+t}{5+t},$$

de sorte que $|\mathfrak{z}(z,t)-\mathfrak{z}(z,-3)|$ tend uniformément avec $3+t$ vers 0. De la même manière, l'égalité $\frac{2\pi}{3-t}=-\pi\frac{1-t}{3-t}+\pi$ et les formules (18), (23) et (3) entraînent l'inégalité $|\mathfrak{z}(z,t)-\mathfrak{z}(z,3)|\leqslant$ $\leqslant 2\cdot\left|\frac{\frac{3-t}{2}-\frac{3-t}{t-1}}{\frac{3-t}{2}}\right|=2\cdot\frac{3-t}{t-1}$ pour $2\leqslant t<3$, de sorte que $|\mathfrak{z}(z,t)-\mathfrak{z}(z,3)|$ tend avec $3-t$ uniformément vers 0. La continuité de $\mathfrak{z}(z,t)$ dans l'ensemble $\underset{(z,t)}{E}[-3\leqslant t\leqslant 3]\supset A$ est ainsi démontrée.

Nous allons prouver maintenant que pour $-3\leqslant t\leqslant 3$

(24) *$\mathfrak{z}(z,t)$ est une transformation homéomorphe de A_t en $A_{\theta(t)}$.*

La fonction $\mathfrak{z}(z,t)$ étant d'après (18)—(23), (2) et (5) une homéomorphie pour tout $-3\leqslant t\leqslant 3$, il suffit à ce but de prouver la formule:

$$\mathfrak{z}(A_t,t)=A_{\theta(t)}\quad \textit{pour}\quad -3\leqslant t\leqslant 3.$$

Si $t=\pm 3$, cette formule est une conséquence directe de (18), (13) (resp. (15)) et (7) (resp. (11)).

Si $-3<t\leqslant-1$, on a d'après (19), (6) et (8[a]):

$$\mathfrak{z}(A_t,t)=\gamma_{\frac{5+t}{3+t}}\alpha_{\frac{3+t}{2},\frac{3+t}{5+t}}(B_{\frac{3+t}{2}})=\gamma_{\frac{5+t}{3+t}}(B_{\frac{3+t}{5+t}}).$$

D'autre part, on a pour $-3<t\leqslant-1$ l'inégalité

$$-3<-\frac{9+t}{5+t}\leqslant-2,$$

ce qui entraîne d'après (13) et (8[a]) l'égalité $A_{\theta(t)}=A_{-\frac{9+t}{5+t}}=$ $=\gamma_{\frac{5+t}{3+t}}(B_{\frac{3+t}{5+t}})$, d'où finalement $\mathfrak{z}(A_t,t)=A_{\theta(t)}$.

Si $-1\leqslant t\leqslant 0$, on a d'après (20), (9[a]), (6), (5) et (2):

$$\mathfrak{z}(A_t,t)=\gamma_{\frac{2}{2+t}}\alpha_{1,\frac{2+t}{2}}\gamma_1(C_{2t-2(t+1)})=\gamma_{\frac{2}{2+t}}\alpha_{1,\frac{2+t}{2}}(B_1)=\gamma_{\frac{2}{2+t}}(B_{\frac{2+t}{2}}).$$

D'autre part, on a pour $-1\leqslant t\leqslant 0$ l'inégalité $-2\leqslant t-1\leqslant-1$, d'où on conclut en vertu de (14) et (8[a]) que $A_{\theta(t)}=A_{t-1}=\gamma_{\frac{2}{2+t}}(B_{\frac{2+t}{2}})$ et enfin que $A_{\theta(t)}=\mathfrak{z}(A_t,t)$.

Pour $0\leqslant t\leqslant 1$ on a l'inégalité $-1\leqslant t-1\leqslant 0$, d'où selon (21), (9[a]) et (5) il vient $\mathfrak{z}(A_t,t)=\beta_{2t,2}(C_{2t})=C_{2(t-1)}=A_{\theta(t)}$.

Pour $1\leqslant t\leqslant 2$ les relations (22), (6), (2), (5) et (10[a]) entraînent que:

$$\mathfrak{z}(A_t,t)=\beta_{2,2(2-t)}\alpha_{\frac{3-t}{2},1}\gamma_{\frac{1-t}{3-t}}(A_t)=\beta_{2,2(2-t)}\alpha_{\frac{3-t}{2},1}(B_{\frac{3-t}{2}})=\beta_{2,2(2-t)}(B_1)=$$
$$=\beta_{2,2(2-t)}(C_2)=C_{2-2(2-t)}=C_{2(t-1)}.$$

D'autre part, on a pour $1\leqslant t\leqslant 2$ l'inégalité $0\leqslant t-1\leqslant 1$, d'où selon (14) et (9[a]) il vient $A_{\theta(t)}=A_{t-1}=C_{2(t-1)}=\mathfrak{z}(A_t,t)$.

Dans le cas $2\leqslant t<3$ on conclut de (23), (6), (10[a]) et (2) que

$$\mathfrak{z}(A_t,t)=\gamma_{\frac{2}{3-t}}\alpha_{\frac{3-t}{2},\frac{3+t}{t-1}}\gamma_{\frac{1-t}{3-t}}(A_t)=\gamma_{\frac{2}{3-t}}\alpha_{\frac{3-t}{2},\frac{3-t}{t-1}}(B_{\frac{3-t}{2}})=\gamma_{\frac{2}{3-t}}(B_{\frac{3-t}{t-1}}).$$

D'autre part, on a pour $2\leqslant t<3$ l'inégalité $1\leqslant\frac{5t-9}{t-1}<3$ dont on conclut d'après (15) et (10[a]) que

$$A_{\theta(t)}=A_{\frac{5t-9}{t-1}}=\gamma_{\frac{2t-4}{3-t}}(B_{\frac{3-t}{t-1}})=\gamma_{\frac{2}{3-t}-2}(B_{\frac{3-t}{t-1}})=\gamma_{\frac{2}{3-t}}(B_{\frac{3-t}{t-1}})=\mathfrak{z}(A_t,t).$$

La proposition (24) est ainsi établie.

En posant maintenant:

$$f(z,t)=(\mathfrak{z}(z,t),\theta(t))\quad \textit{pour tout}\quad (x,t)\in A,$$

on conclut de (16), (24) et (12) que f est une transformation homéomorphe de A en lui-même. Pour $t\neq\pm 3$ on a en outre d'après (17) l'inégalité $f(z,t)\neq(z,t)$. Pour $t=\pm 3$ et $(z,t)\in A$ on a d'après (7) et (11) l'inégalité $|z|\geqslant 1$, d'où $z\neq-z$. En vertu de (18) on obtient donc aussi dans ce cas la relation $f(z,t)\neq(z,t)$.

La transformation f ne laisse donc aucun point invariant,

c. q. f. d.

Remarque. Il est à remarquer que l'ensemble A dont les propriétés d'homologie sont celles des sphères euclidiennes diffère de ces sphères par les propriétés d'homotopie. On peut notamment prouver que le groupe fondamental de A [1]) ne disparaît pas; plus précisément que la circonférence $\underset{(z,t)}{E}[|z|=1;\ t=3]$ ne se laisse pas contracter dans A [2]) d'une manière continue vers l'ensemble constitué par le seul point $(1,3)$. La question s'il existe une relation entre cette dernière propriété de A et l'existence d'une transformation continue de A en sous-ensemble de A sans point invariant, reste ouverte.

[1]) Quant à la définition du groupe fondamental, voir p. ex. S. Lefschetz, l. c., p. 82—83.

[2]) Au sens de ma note des Fund. Math. 19 (1932), p. 235.

Wiązowszczyzna, 20. VII. 1934.

Sur un problème de M. J. Schreier.

Par

Karol Borsuk (Warszawa).

J'appelle un point a d'un espace [1]) E *point de biunivocité* d'une fonction f définie dans E, lorsque $f(x) \neq f(a)$ pour tout $x \in E-(a)$. Dans le cas où f est continue, E compact et tous les points de E sont des points de biunivocité de f, la transformation f est une homéomorphie et toutes les propriétés topologiques de $f(E)$ coïncident avec celles de E. Si, au lieu de supposer que tous les points de E sont des points de biunivocité de f, on suppose seulement que les points de biunivocité sont dans E suffisamment nombreux (dans un sens qu'on peut préciser de différentes manières), on constate maintes fois que cette supposition, si faible qu'elle soit, suffit plus ou moins pour déterminer les propriétés topologiques de l'image $f(E)$. Dans le cas p. ex. où E est une circonférence et les points de biunivocité de f constituent un ensemble de deuxième catégorie (rel. à E), resp. un ensemble dont le complémentaire est dénombrable, resp. fini, on constate aisément que $f(E)$ est un continu péanien non unicohérent [2]), resp. une courbe rationnelle [3]) contenant une infinité au plus dénombrable d'éléments cycliques [4]) différents, resp. une courbe élémentaire dont tous les points sont d'ordre [3]) paire

[1]) J'entendrai dans cette note par espace un espace métrique.

[2]) Continu péanien non unicohérent = image de l'intervalle fermé $\langle 0,1\rangle$ admettant une décomposition en deux continus dont la partie commune n'est pas connexe. Voir pour cette notion L. Vietoris, Proc. Amsterdam 29 (1926), p. 445 et C. Kuratowski, Fund. Math. 13 (1929), p. 307.

[3]) Quant à la définition des courbes rationnelles, des courbes élémentaires, d'ordre etc. voir K. Menger, *Kurventheorie*, Leipzig—Berlin, Teubner 1933, p. 96—98.

[4]) Au sens de G. T. Whyburn, Proc. Nat. Acad. Sc. 13, p. 31—38. Voir aussi C. Kuratowski et G. T. Whyburn, Fund. Math. 16 (1930), p. 305—331.