Sur le produit combinatoire de deux ensembles jouissant de la propriété C.

(Solution d'un problème de M. Szpilrajn).

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

On dit qu'un ensemble E situé dans un espace métrique *jouit de la propriété* C, s'il existe pour toute suite infinie de nombres positifs $a_1, a_2, a_3, \ldots$ une décomposition de l'ensemble E, $E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$, où $\delta(E_n) \leqslant a_n$, $\delta(E_n)$ désignant le diamètre de l'ensemble E_n [1]).

M. E. Szpilrajn a posé récemment le problème suivant:

Un produit combinatoire de deux ensembles linéaires jouissant de la propriété C, est-il nécessairement un ensemble (plan) jouissant de la propriété C?

Le but de cette Note est de démontrer que *si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *la réponse au problème de M. Szpilrajn est négative.*

Lemme I. *K étant un ensemble linéaire de 1re catégorie et a un nombre réel donné, il existe toujours deux nombres réels x et y n'appartenant pas à K et tels que $x - y = a$.*

Démonstration. Soit K_a la translation de l'ensemble K (le long de la droite) de longueur a. L'ensemble K étant de 1re catégorie, les ensembles K_a et $K + K_a$ le sont évidemment aussi. Il existe donc un nombre réel x qui n'appartient pas à $K + K_a$. Posons $y = x - a$. S'il était $y \in K$, on aurait évidemment $x = y + a \in K_a$, contrairement à la définition du nombre x. On a donc $y \text{ non} \in K$, $x \text{ non} \in K$ et $x - y = a$, et le lemme I est démontré.

[1]) Cf. *Fund. Math.* t. XI, p. 304; t. XV, p. 126; cf. aussi mon livre *Hypothèse du continu* (Monografje Matematyczne t. IV), Warszawa 1934, p. 37 ainsi que la Note de M. A. Besikovitch, *Acta Mathematica* t. 62, p. 290.

E étant un ensemble linéaire donné, désignons par $R(E)$ l'ensemble de tous les nombres $x - y$, où $x \in E$ et $y \in E$.

Appelons *ensemble de Lusin* tout ensemble linéaire qui ne contient aucun sous-ensemble indénombrable non dense [1]).

Lemme II. *Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe un ensemble de Lusin E, tel que $R(E)$ est l'ensemble de tous les nombres réels.*

Démonstration. Admettons que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Il existe donc une suite transfinie du type Ω

$$(1) \qquad x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\xi, \ldots \qquad (\xi < \Omega)$$

formée de tous les nombres réels, et une suite transfinie du type Ω

$$(2) \qquad P_1, P_2, P_3, \ldots, P_\omega, P_{\omega+1}, \ldots, P_\xi, \ldots \qquad (\xi < \Omega)$$

formée de tous les ensembles linéaires parfaits non denses.

Nous définirons pour tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$ un couple de nombres réels p_α et q_α comme il suit.

Posons $p_1 = x_1$ et $q_1 = 0$. Soit maintenant α un nombre ordinal donné quelconque > 1 et $< \Omega$.

L'ensemble $S_\alpha = \sum_{\xi<\alpha} P_\xi$ étant de 1re catégorie (puisque $\alpha < \Omega$), il existe, d'après le lemme I, deux nombres réels p_α et q_α n'appartenant pas à S_α et tels que $p_\alpha - q_\alpha = x_\alpha$.

Soit E l'ensemble formé de tous les nombres p_α et q_α, où $\alpha < \Omega$. Il résulte tout de suite de la définition des nombres p_α et q_α que $p_\alpha \text{ non} \in P_\xi$ et $q_\alpha \text{ non} \in P_\xi$ pour $\xi < \alpha$: tout ensemble P_ξ, où $\xi < \Omega$ a donc un ensemble au plus dénombrable de points communs avec l'ensemble E. La suite transfinie (2) étant formée de tous les ensembles linéaires parfaits non denses, il en résulte que E est un ensemble de Lusin.

Or, la suite (1) étant formé de tous les nombres réels, et la formule $p_\alpha - q_\alpha = x_\alpha$ ayant lieu pour tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$, l'ensemble $R(E)$ contient tout nombre réel.

Le lemme II est ainsi démontré.

Soit maintenant E un ensemble satisfaisant aux conditions du lemme II et soit H son carré combinatoire, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $x \in E$ et $y \in E$.

[1]) Cf. *Fund. Math.* t. XI, p. 302 ainsi que mon livre *Hypothèse du continu*, p. 37.

Comme j'ai démontré[1]), tout ensemble de Lusin jouit de la propriété C. Or, je dis que l'ensemble (plan) H ne jouit pas de la propriété C.

Admettons, en effet, que l'ensemble (plan) H jouit de la propriété C.

Comme on voit sans peine, la projection (sur une droite) d'un ensemble plan jouissant de la propriété C jouit également de cette propriété (puisque le diamètre de la projection d'un ensemble ne dépasse pas le diamètre de cet ensemble lui-même). Soit Q la projection de l'ensemble H sur la droite $y = -x$: l'ensemble Q jouit donc de la propriété C.

Or, soit a un nombre réel donné quelconque.

D'après la propriété de l'ensemble E, on a $a\sqrt{2} \in R(E)$ et il existe deux nombres x_0 et y_0 de E, tels que $a\sqrt{2} = x_0 - y_0$. Le point (x_0, y_0) du plan appartient à H (puisque $x_0 \in E$ et $y_0 \in E$): sa projection s sur la droite $y = -x$ appartient donc à Q. Or, l'abscisse du point s sur la droite $y = -x$ est évidemment $\frac{x_0}{\sqrt{2}} - \frac{y_0}{\sqrt{2}} = a$. Le nombre réel a pouvant être quelconque, il en résulte que l'ensemble Q coïncide avec la droite $y = -x$. Or, c'est impossible, l'ensemble Q jouissant de la propriété C.

L'hypothèse que l'ensemble H jouit de la propriété C implique donc une contradiction.

L'ensemble H ne jouit donc pas de la propriété C, et notre assertion est démontrée.

[1]) *Fund. Math.* t. XI, p. 302. Cf. aussi mon livre cité, p. 39.

Sur un continu acyclique qui se laisse transformer topologiquement en lui même sans points invariants.

Par

Karol Borsuk (Varsovie).

D'après le théorème de M. L. E. J. Brouwer[1]), qui devint classique, la sphère euclidienne n-dimensionnelle contient un point invariant par rapport à toute transformation continue en son sous-ensemble. Il résulte d'une formule bien générale, due à M. S. Lefschetz[2]), que la thèse du théorème de M. Brouwer reste valable pour les ensembles bien plus généraux que les sphères euclidiennes, notamment pour tous les espaces métriques compacts qui sont localement connexes au sens de M. Alexander[3]) et dont les nombres de Betti sont égaux à ceux des sphères euclidiennes. La question s'impose, si cette dernière propriété toute seule ne constitue une condition suffisante pour l'existence de tels points invariants dans les espaces métriques compacts arbitraires. En particulier, il pourrait paraître probable que l'existence des points invariants dans le cas des sphères est uniquement une conséquence de leurs propriétés d'homologie; autrement dit, que la thèse du théorème de M. Brouwer resterait vraie pour tous les continus dont les propriétés d'homologie sont celles des sphères euclidiennes, c. à d. pour les continus acycliques[4]).

[1]) L. E. J. Brouwer, Math. Ann. 71 (1912), p. 115. Cf. aussi Knaster, Kuratowski et Mazurkiewicz, Fund. Math. 14 (1929), p. 132.

[2]) S. Lefschetz, *Topology*, New York 1930, p. 359.

[3]) Quant à la définition de la connexité locale au sens de M. Alexander, voir p. ex. S. Lefschetz, l. c. p. 90—91.

[4]) C. à d. pour les „in allen positiven Dimensionen azyklischen Mengen" au sens de ma note de Fund. Math. 21 (1933), p. 95.