notamment aux ensembles $A^i = (x_i, x_{i+1})$, on détermine dans X d'une façon *univoque* un η_0-parcours $_g[W(y_0)] = (y_0 \to y_1 \to \ldots \to y_{n-1} \to y_n)$ tel que $g(y_i) = x_i$. Dans le cas où $y_0 = y_n$, on dit que le *ε_0-parcours $W(y_0)$ est univoque.*

Il est évident que chaque parcours de diamètre $< \varepsilon_0$ est univoque et que la somme de deux parcours univoques est univoque. Il en résulte que:

Si $W(y_0) \equiv 0$, alors $W(y_0)$ est un parcours univoque.

11. ***Théorème III.*** *Toute transformation localement homéomorphe g d'un continu „arcwise connected“* [8]) *X en un continu Y dont le groupe fondamental disparait est une homéomorphie* [9])

Démonstration. Supposons, par contre, que $x_0 \neq x_1$ et que $g(x_0) = g(x_1) = y_0$. Le continu X étant „arcwise connected“, il existe une fonction continue $x(t)$, où $0 \leqslant t \leqslant 1$, telle que $x(0) = x_0$ et $x(1) = x_1$.

Posons:

$$W_n = \left(x_0 = x(0) \to x\left(\frac{1}{n}\right) \to \ldots \to x\left(\frac{n-1}{n}\right) \to x(1) = x_1\right)$$

et

$$W_g^n(x_0) = \left(g(x_0) = y_0 = g(x(0)) \to g\left(x\left(\frac{1}{n}\right)\right) \to \ldots\right.$$
$$\left.\ldots \to g\left(x\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) \to g(x(1)) = g(x_1) = y_0\right).$$

La suite $\{W_g^n(x_0)\}$ est donc une suite fondamentale des parcours clos issus du point y_0. Il existe en conséquence un n_0 tel que $W_g^n(x_0)$ est pour tout $n > n_0$ un ε_0-parcours dans Y et que W^n est un η_0-parcours dans X. On a donc $_g[W_g^n(x_0)] = W^n$ pour $n > n_0$, de sorte que $W_g^n(x_0)$ ne serait pas, pour $n > n_0$, un parcours univoque, puisque $x_0 \neq x_1$. Il en résulte que $W_g^n(x_0)$ *non* $\underset{\infty}{\equiv} 0$ pour $n > n_0$ et, par conséquent, que le groupe fondamental de Y contiendrait un élément différent de zéro, contrairement à l'hypothèse.

[8]) au sens des topologistes américains (c. à d. un continu dont toute paire de points se laissent joindre par un arc simple situé dans lui).

[9]) Cf. S. Stoïlow, *Sur les transformations continues des espaces topologiques*, Bull. Math. de la Soc. Roumaine de Sc. 35, (1934), p. 229.

Sur deux problèmes de M. Ruziewicz concernant la décomposition de l'intervalle en paires de points.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

M. Ruziewicz a posé récemment deux problèmes suivants:

Problème I. *L'intervalle $I = [0 \leqslant x \leqslant 1]$ étant décomposé en paires disjointes de points, peut-on toujours, en prenant certaines de ces paires, former un ensemble de mesure donnée quelconque α, où $0 < \alpha < 1$?*

Problème II. *Existe-t-il une décomposition de l'intervalle $I = [0 \leqslant x \leqslant 1]$ en paires disjointes de points, telle que toute somme S d'une infinité non dénombrable de ces paires pour laquelle l'ensemble $I - S$ est non dénombrable, soit non mesurable?*

Je démontrerai que *la réponse au premier problème est négative et* que, *si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *la réponse au second problème est positive.*

1. ***Lemme I.*** *Il existe une décomposition de l'intervalle $I = [0 \leqslant x \leqslant 1]$ en paires disjointes de points, telle que toute somme de ces paires qui contient un ensemble parfait, a au moins un point commun avec tout ensemble parfait contenu dans I.*

Démonstration. En utilisant le théoréme de M. Zermelo (Wohlordnungssatz) on démontre, comme on sait, qu'il existe une décomposition de l'intervalle I en $2^{\aleph_0}$ ensembles disjoints, dont chacun a au moins un point (donc $2^{\aleph_0}$ points communs) avec tout ensemble parfait contenu dans I [1]). Soit φ le plus petit nombre ordinal de puissance $2^{\aleph_0}$ et soit

$$Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_\omega, Q_{\omega+1}, \ldots, Q_\xi, \ldots \qquad (\xi < \varphi)$$

[1]) Voir p. e. W. Sierpiński, *Bull. Acad. Cracovie* 1918, p. 150.

une suite transfinie du type φ formée de ces ensembles. Or, soit

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_\omega, P_{\omega+1}, \ldots, P_\xi, \ldots \qquad (\xi < \varphi)$$

une suite transfinie du type φ formée de tous les ensembles parfaits de mesure nulle contenus dans I.

ξ étant un nombre ordinal $< \varphi$, nous décomposerons l'ensemble Q_ξ en paires disjointes de points comme il suit.

Il résulte de la propriété de l'ensemble Q_ξ que l'ensemble $P_\xi Q_\xi$ est de puissance $2^{\aleph_0}$. L'ensemble P_ξ étant de mesure nulle, l'ensemble $I-P_\xi$ contient un sous-ensemble parfait. L'ensemble $(I-P_\xi)Q_\xi$ est donc (d'après la propriété de Q_ξ) aussi de puissance $2^{\aleph_0}$. Il existe donc une correspondance biunivoque entre les points des ensembles $P_\xi Q_\xi$ et $(I-P_\xi)Q_\xi$ et il existe une décomposition de l'ensemble Q_ξ en paires disjointes de points, telle que toute paire contient un et un seul point de chacun des ensembles P_ξ et $I-P_\xi$.

Les ensembles Q_ξ $(\xi < \varphi)$ étant disjoints et leur somme constituant l'intervalle I, les décompositions ainsi définies des ensembles Q_ξ $(\xi < \varphi)$ en paires disjointes donnent évidemment une décomposition de l'intervalle I en paires disjointes.

Je dis que cette décomposition satisfait aux conditions de notre lemme.

Soit, en effet, S une somme quelconque de notres paires et supposons que S contient un sous-ensemble parfait P. Tout ensemble parfait linéaire contenant un sous-ensemble parfait de mesure nulle, il existe un nombre ordinal ξ, tel que $P_\xi \subset P$. D'après $S \supset P$, on a donc $S \supset P_\xi \supset P_\xi Q_\xi$. Je dis qu'on a aussi $S \supset (I-P_\xi)Q_\xi$.

En effet, d'après la définition de la décomposition de l'ensemble Q_ξ en paires, si $a \in (I-P_\xi)Q_\xi$, il existe un point $b \in P_\xi Q_\xi$, tel que la paire (a, b) est une de celles, en lesquelles est décomposé l'ensemble Q_ξ. Or, d'après $S \supset P_\xi Q_\xi$, on a $b \in S$, donc $(a, b) \subset S$ et $a \in S$. La formule $a \in (I-P_\xi)Q_\xi$ entraîne donc $a \in S$, ce qui prouve que $(I-P_\xi)Q_\xi \subset S$. D'après $S \supset P_\xi Q_\xi$ on a donc $S \supset P_\xi Q_\xi + (I-P_\xi)Q_\xi = Q_\xi$ et il résulte de la propriété de l'ensemble Q_ξ que S a au moins un point commun avec tout ensemble parfait contenu dans I.

Le lemme I est ainsi démontré.

Soit maintenant F une famille de paires de points qui fournit une décomposition de l'intervalle I satisfaisant aux conditions du lemme I, et soit S une somme donnée de paires de la famille F, telle que S est un ensemble mesurable de mesure positive: mes $S = \alpha > 0$. L'ensemble S (en tant que de mesure > 0) contient un sous-ensemble parfait P. D'après les conditions du lemme I, S a donc au moins un point commun avec tout ensemble parfait contenu dans I, et, S étant mesurable (et $\subset I$), il en résulte que mes $S = 1$. Donc:

Il existe une décomposition de l'intervalle $I = [0 \leqslant x \leqslant 1]$ en paires disjointes de points, telle que tout ensemble mesurable formé de ces paires est ou bien de mesure nulle, ou bien de mesure $= 1$.

Cela prouve que la réponse au premier problème de M. Ruziewicz est négative.

2. *Lemme II.* *Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe un ensemble E contenu dans l'intervalle $I = [0 \leqslant x \leqslant 1]$ et tel que: 1) tout sous-ensemble non dénombrable de E est de mesure extérieure (lebesguienne) positive et 2) E a $2^{\aleph_0}$ points communs avec tout ensemble parfait de mesure positive contenu dans I.*

Démonstration.

Comme j'ai démontré [1]), si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe un ensemble non dénombrable N contenu dans I et tel que tout sous-ensemble non dénombrable de N est non mesurable. r étant un nombre rationnel, désignons par $N(r)$ la translation de N de longueur r et posons $E = \sum_r I\, N(r)$, la sommation Σ s'étendant à tous les nombres rationnels r.

Comme on voit sans peine, l'ensemble E est contenu dans I et de mesure extérieure $= 1$, d'où il résulte que E a une infinité non dénombrable de points communs avec tout ensemble parfait de mesure positive contenu dans I. Or, tout sous-ensemble non dénombrable de E contient une infinité non dénombrable de points d'un au moins de termes de la somme $\sum_r I\, N(r)$ (qui contient $\aleph_0$ termes), donc est (d'après la propriété de N) de mesure extérieure > 0.

Le lemme II est ainsi démontré.

Comme on sait, si E est un ensemble de puissance $\aleph_1$ et Φ une famille de puissance $\aleph_1$ d'ensembles, dont chacun a $\aleph_1$ éléments

[1]) *Fund. Math.* t. V, p. 184.

communs avec E, alors E est une somme de $\aleph_1$ ensembles disjoints, dont chacun a $\aleph_1$ éléments communs avec tout ensemble de la famille Φ [1]).

Il résulte donc de notre lemme que si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe une suite transfinie Q_ξ $(\xi<\Omega)$ d'ensembles $\subset I$, telle que 1) tout sous-ensemble non dénombrable de l'ensemble $E=\sum_{\xi<\Omega} Q_\xi$ est de mesure extérieure positive, et 2) pour tout nombre ordinal $\xi<\Omega$ l'ensemble Q_ξ a $2^{\aleph_0}$ points communs avec tout ensemble parfait de mesure positive contenu dans I.

Soit maintenant

$$R_1,\ R_2,\ R_3,\ldots,\ R_\omega,\ R_{\omega+1},\ldots,\ R_\xi,\ldots \qquad (\xi<\Omega)$$

une suite transfinie du type Ω, formée de tous les ensembles parfaits de mesure positive <1 contenus dans I (Une telle suite existe, d'après l'hypothèse que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$).

Il résulte de la propriété de la suite transfinie Q_ξ $(\xi<\Omega)$ que, pour tout nombre ordinal $\xi<\Omega$, l'ensemble $R_\xi Q_\xi$ est de puissance $2^{\aleph_0}$. Or, R_ξ étant un ensemble de mesure <1 contenu dans I, l'ensemble $I-R_\xi$ contient un sous-ensemble parfait de mesure positive: l'ensemble $(I-R_\xi)Q_\xi$ est donc (d'après la propriété de Q_ξ) aussi de puissance $2^{\aleph_0}$. Les ensembles $R_\xi Q_\xi$ et $(I-R_\xi)Q_\xi$ ont donc la même puissance, et on peut, pour $1<\xi<\Omega$, décomposer l'ensemble Q_ξ en paires disjointes de points, dont chacune contient un (et un seul) point de chacun des ensembles R_ξ et $I-R_\xi$.

Or, les ensembles R_1Q_1 et $(I-R_1)Q_1+(I-E)$ étant aussi chacun de puissance $2^{\aleph_0}$ (et étant disjoints, puisque $Q_1\subset E$), on peut décomposer l'ensemble $Q_1+(I-E)$ en paires disjointes de points, dont chacune contient un (et un seul) point de chacun des ensembles R_1Q_1 et $(I-R_1)Q_1+(I-E)$.

Cela fournit (comme dans la démonstration du lemme I) une décomposition de l'intervalle I en paires disjointes de points.

Tout ensemble parfait de mesure positive contenu dans I contenant évidemment un sous-ensemble parfait de mesure positive <1, on prouve tout à fait comme dans la démonstration du lemme I que toute somme de notres paires qui contient un sous-ensemble parfait de mesure positive a au moins un point commun avec tout

[1]) Voir p. e. mon livre *Hypothese du continu* (Monografje Matematyczne t. IV) Warszawa 1934, p. 113.

ensemble parfait de mesure positive contenu dans I, donc est de mesure extérieure $=1$.

Or, soit S une somme d'une infinité non dénombrable quelconque de notres paires. Il résulte tout de suite de la définition de notres paires que S contient une infinité non dénombrable de points de l'ensemble E, donc (d'après la propriété de E), S est de mesure extérieure positive. Donc, si S est mesurable, on a (d'après ce que nous venons de démontrer) mes $S=1$.

Nous avons ainsi démontré que

Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe une décomposition de l'intervalle $I=[0\leqslant x\leqslant 1]$ en paires disjointes de points, telle que tout ensemble mesurable qui est une somme d'une infinité non dénombrable de ces paires est de mesure $=1$.

Il en résulte tout de suite que si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, la réponse au second problème de M. Ruziewicz est positive.