Posons

$$F(x) = x \quad \text{pour tout} \quad x \in I - N$$

$$F(x) = \varphi(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in N.$$

Il est clair que

(a) *La fonction $F(x)$ jouit de la propriété (s) (et même tout sous-ensemble parfait de I contient un ensemble parfait P tel que la fonction $F|P$ est une homéomorphie).*

Démontrons ensuite que

(b) *La fonction inverse $F^{-1}(y)$ ne jouit pas de la propriété (s).*

Soit, en effet, U un sous-ensemble de $J - I$ qui ne jouit pas de la propriété (s). $F^{-1}(U)$ étant contenu dans N, il jouit de la propriété (s). La fonction F ne satisfait donc pas à la condition (t_2) du théorème 4·4. Par conséquent, en vertu de ce théorème, elle ne satisfait pas à la condition (t), donc $F^{-1} \overline{\in} S(J, I)$, c. q. f. d.

Il résulte de (a) et 4·6 (ii) que

(c) *L'image de la fonction F (donc aussi de la fonction F^{-1}) jouit de la propriété (s).*

Sur quelques propriétés des transformations localement homéomorphes.

Par

Samuel Eilenberg (Varsovie).

Une transformation g d'un espace métrique et compact X en un autre espace métrique et compact Y[1]) sera dite *localement homéomorphe*, s'il existe pour tout $x \in X$ un entourage[2]) $U(x)$ que la fonction g transforme par homéomorphie en entourage $g[U(x)]$ de $g(x)$.

Le but de cette Note est l'étude des relations entre les groupes de Betti des espaces X et Y. J'établis aussi un théorème sur le groupe fondamental (th. III), qui offre certaines analogies avec le théorème de la „monodromie" de la théorie des fonctions analytiques.

1. **Lemme.** *Pour chaque couverture de l'espace Y par des ensembles ouverts $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$, il existe un nombre $\varepsilon_0 > 0$ tel que chaque ensemble $A \subset Y$ de diamètre $\delta(A) < \varepsilon_0$ est contenu dans un au moins des ensembles $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$.*

Démonstration. Si un tel nombre ε_0 n'existait pas, il existerait une suite $\{A_n\}$ de sous-ensembles de Y telle que $\delta(A_n) < \frac{1}{n}$ et $A_n - Q_i \neq 0$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, p$. En désignant par y_n un point arbitraire de A_n, on aurait donc

$$\varrho[(y_n), (Y - Q_i)] < \frac{1}{n} \text{[3])}.$$

[1]) Dans la suite je me sers des symboles g, X et Y seulement dans ce sens. Les lettres x et y, munies ou non d'indices, désigneront respectivement des points de X et de Y.

[2]) c. à d. un ensemble ouvert contenant x.

[3]) $\varrho(A, B) = \underset{x \in A, y \in B}{\mathrm{Min}}\, \varrho(x, y)$.

L'espace Y étant compact, il existe un point d'accumulation y de la suite $\{y_n\}$, d'où $\varrho[(y),(Y-Q_i)]=0$. Les ensembles $Y-Q_i$ sont fermés, puisque les ensembles Q_i ont été supposés ouverts. On aurait par conséquent $y \epsilon Y-Q_i$ pour $i=1,2,\dots,p$, contrairement à l'hypothèse que les ensembles Q_i couvrent l'espace Y.

2. Lemme. *Il existe un nombre $\eta_0>0$ tel que les relations $x', x'' \epsilon X$, $x' \neq x''$ et $g(x')=g(x'')$ entraînent $\varrho(x',x'')>4\eta_0$.*

Démonstration. Dans le cas contraire il existerait dans X, par suite de la compacité de cet espace, deux suites convergentes $\{x_n'\}$ et $\{x_n''\}$ telles que $x_n' \neq x_n''$, $g(x_n')=g(x_n'')$ et $\lim\limits_{n\to\infty}\varrho(x_n, x_n'')=0$. Les deux suites convergent donc vers le même point x, ce qui prouve que la fonction g n'est pas une homéomorphie locale en ce point.

3. Soit d'une façon générale Y_k l'ensemble de tous les points $y \epsilon Y=g(X)$ tels que l'ensemble $g^{-1}(x)$ contienne exactement k points. Nous allons démontrer le suivant

Lemme. *Les ensembles Y_k sont à la fois ouverts et fermés dans Y et il existe un nombre naturel N tel que*

$$Y=Y_1+Y_2+\dots+Y_N.$$

Démonstration. Remarquons que la deuxième partie de ce lemme résulte immédiatement de **2**. Il reste donc à montrer que chacun des ensembles Y_k est ouvert. Soit à ce but $y \epsilon Y_k$, c.-à-d. $g^{-1}(y)=(x_1,x_2,\dots x_k)$. Il existe donc des entourages $U_1, U_2,\dots U_k$ des points $x_1, x_2,\dots x_k$ respectivement, disjoints deux à deux et que la fonction g transforme par homéomorphie en entourages $g(U_i)$ de y. Il en résulte que l'ensemble ouvert $\prod\limits_{i=1}^{k} g(U_i)$ est contenu dans la somme $Y_k+Y_{k+1}+\dots+Y_N$. La démonstration sera donc achevée, si l'on prouve qu'il n'existe dans Y aucune suite $\{y_n\}$ convergeant vers y et telle que $y_n \epsilon Y_{k+1}+Y_{k+2}+\dots+Y_N$. Or, si une telle suite existait, on aurait $g^{-1}(y_n)-\sum\limits_{i=1}^{k}U_i \neq 0$ et il existerait donc dans X une suite $\{x_n'\}$ convergeant vers un point x' et telle que $g(x_n')=y_n$ et x_n' *non*-$\epsilon \sum\limits_{i=1}^{k}U_i$; on aurait par conséquent $g(x')=y$ et x' *non*-$\epsilon \sum\limits_{i=1}^{k}U_i$, contrairement à la relation

$$g^{-1}(y)=(x_1,x_2,\dots x_k)\subset\sum_{i=1}^{k}U_i.$$

4. Lemme. *Il existe deux nombres $\eta_0>0$ et $\varepsilon_0>0$ tels que chaque sous-ensemble A de Y de diamètre $\delta(A)<\varepsilon_0$ détermine une décomposition de l'ensemble $g^{-1}(A)$*

$$g^{-1}(A)=A_1+A_2+\dots+A_k$$

assujettie aux conditions:

1) g transforme A_i en A par homéomorphie,

2) $\delta(A_i)<\eta_0$,

3) $\varrho(A_i,A_j)>2\eta_0$ [3]) *pour $i\neq j$,*

4) pour chaque nombre $\eta>0$ il existe un nombre ε tel que $\varepsilon_0\geqslant\varepsilon>0$ et que $\delta(A)<\varepsilon$ entraîne $\delta(A_i)<\eta$.

Démonstration. Nous allons prouver qu'on peut prendre pour η_0 le nombre satisfaisant à **2**. La transformation g étant une homéomorphie locale, on trouve pour tout x un entourage $U(x)$ de diamètre $\delta[U(x)]<\eta_0$ et tel que l'ensemble $g[U(x)]$ soit ouvert dans Y et que l'ensemble $\overline{U(x)}$ soit transformé par homéomorphie. L'espace X étant compact, on trouve parmi les entourages $U(x)$ une suite finie $U_1, U_2,\dots U_n$ couvrant X.

En vertu de **3**, il existe pour tout $y \epsilon Y$ un k tel que $y \epsilon Y_k$. Posons

$$Q(y)=Y_k\cdot\prod_{y\epsilon g(U_i)}g(U_i).$$

D'après **3** les ensembles Y_k sont ouverts et leur nombre est fini. Les ensembles $Q(y)$ forment ainsi une famille finie d'ensembles ouverts couvrant Y. Soient ε_0 le nombre déterminé par **1** et A un sous-ensemble arbitraire de Y de diamètre $\delta(A)<\varepsilon_0$. Il existe donc un y tel que $A\subset Q(y)$. Soit $g^{-1}(y)=(x_1,x_2,\dots,x_k)$ et $x_i \epsilon U_{p_i}$ où $1\leqslant p_i\leqslant n$. Posons enfin $A_i=U_{p_i}\cdot g^{-1}(A)$.

Nous allons montrer que les ensembles A_i ainsi définis satisfont aux conditions *1)*—*4)*. En effet, on a $\delta(A_i)\leqslant\delta(U_{p_i})<\eta_0$ (cond. *2)*) et pour $i\neq j$ on a $\varrho(x_i,x_j)>4\eta$ d'après **2**, d'où $\varrho(A_i,A_j)\geqslant\geqslant\varrho(U_{p_i},U_{p_j})\geqslant\varrho(x_i,x_j)-\delta(U_{p_i})-\delta(U_{p_j})>4\eta_0-\eta_0-\eta_0=2\eta_0$ (cond. *3)*). D'autre part, l'ensemble U_{p_i} étant transformé par homéomorphie en ensemble $g(U_{p_i})\supset Q(y)\supset A$, l'ensemble $A_i=U_{p_i}\cdot g^{-1}(A)$ est aussi transformé en A d'une façon homéomorphe (cond. *1)*).

On a $A\subset Q(y)\subset Y_k$, car $y \epsilon Y_k$, d'où $g^{-1}(A)=A_1+A_2+\dots+A_k$, puisque, comme nous l'avons montré, $\varrho(A_i,A_j)>2\eta_0$ pour $i\neq j$. Enfin, pour prouver la condition *4)*, il suffit de remarquer que chacun des ensembles A_i est situé dans un au moins des ensembles $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \dots, \overline{U}_n$, dont chacun se trouve transformé par homéomorphie.

Il est à observer que la décomposition de $g^{-1}(\Delta)$, donnée dans le lemme qui vient d'être établi, est déterminée par les propriétés 2) et 3) d'une façon *univoque* et indépendante du choix d'ensembles auxiliaires qui entrent dans la démonstration.

5. Soit f une fonction continue transformant X en un sous-ensemble de Y. Faisons correspondre à chaque simplexe n-dimensionnel orienté[4]) $\Delta = |x_0, x_1, \dots, x_n|$ de X le simplexe n-dimensionnel orienté $(\Delta)_f = |f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)|$ de Y. D'après cette convention, à chaque complexe algébrique K de X à coefficients rationnels vient correspondre un complexe algébrique $(K)_f$ de Y de façon que les conditions suivantes se trouvent remplies:

(1) $(K + K')_f = (K)_f + (K')_f$,

(2) *Si le complexe n-dimensionnel K de X est homogène, $(K)_f$ est un complexe homogène n-dimensionnel de Y (y compris $(K)_f = 0$),*

(3) *A la frontière $\dot{K}$ de K correspond la frontière de $(K)_f$.*

Il résulte de (2) et (3) que

(4) *Si C est un cycle n-dimensionnel dans X, $(C)_f$ est un cycle n-dimensionnel dans Y.*

La transformation f étant uniformément continue, on a la proposition suivante:

(5) *Pour chaque nombre $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\eta > 0$ tel que si K est un η-complexe dans X, alors $(K)_f$ est un ε-complexe dans Y.*

Les propositions (1)—(5) entraînent les propositions suivantes sur les suites fondamentales:

[4]) Les notions combinatoires employées dans cette note sont à entendre dans le sens de M. L. Vietoris, *Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und die Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen*, Math. Ann. 97, (1927), p. 454. Les notions d'homologie sont introduites chez M. Vietoris seulement mod 0 et mod 2.

(I) *Pour chaque suite fondamentale $Z = \{C_p\}$ de cycles n-dimensionnels dans X, $(Z)_f = \{(C)_f\}$ en est une dans Y.*

(II) *Z_1 et Z_2 étant deux suites fondamentales de cycles n-dimensionnels dans X, on a $(Z_1 + Z_2)_f = (Z_1)_f + (Z_2)_f$ et la relation $Z_1 \sim Z_2$ entraîne $(Z_1)_f \sim (Z_2)_f$.*

6. Soit Δ un ε_0-simplexe orienté arbitraire dans Y. D'après **4** on peut faire correspondre à ce simplexe k η_0-simplexes $\Delta^1, \Delta^2, \dots, \Delta^k$ de X tels que $(\Delta^i)_g = \Delta$ et que la distance de deux sommets des deux simplexes différents Δ^i et Δ^j dépasse $2\eta_0$. Il en résulte aussitôt que Δ est un ε_0-simplexe de Y_k.

Soit K un ε_0-complexe algébrique à coefficients rationnels de Y. On peut donc écrire

$$K = K_1 + K_2 + \dots + K_N,$$

où

$$K_k = \sum_{j=1}^{p} a_j \Delta_j$$

est un ε_0-complexe algébrique de Y_k. Posons

$$_g(K_k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{p} a_j \sum_{l=1}^{k} \Delta_j^l$$

et

$$_g(K) = {}_g(K_1) + {}_g(K_2) + \dots + {}_g(K_N).$$

Evidemment:

(1') $_g(K + K') = {}_g(K) + {}_g(K')$,

(2') *Pour tout ε_0-complexe K n-dimensionnel homogène dans Y, $_g(K)$ est un η_0-complexe n-dimensionnel homogène dans X.*

Remarquons que si Δ_1 est un des „cotés" du ε_0-simplexe Δ de X, les simplexes $\Delta_1^1, \Delta_1^2, \dots, \Delta_1^k$, convenablement numérotés, sont des „cotés" des simplexes $\Delta^1, \Delta^2, \dots, \Delta^k$ respectivement. Par conséquent:

(3') *A la frontière $\dot{K}$ de chaque ε_0-complexe K de Y correspond la frontière du complexe $_g(K)$ de X,*

(4') *Pour tout ε_0-cycle n-dimensionnel C dans Y, $_g(C)$ est un η_0-cycle n-dimensionnel dans X.*

En vertu de **4**, 4) on a la proposition suivante:

(5′) *Pour chaque nombre* $\eta > 0$ *il existe un nombre* ε *tel que* $\varepsilon_0 \geqslant \varepsilon > 0$ *et que pour tout* ε*-complexe* K *de* Y, ${}_g(K)$ *est un* η*-complexe de* X.

Les définitions des opérations $(K)_g$ et ${}_g(K)$ impliquent que

(6′) *Si* K *est un* ε_0*-complexe dans* Y, *alors* $[{}_g(K)]_g = K$.

Les propositions (1′)—(6′) et (I) entraînent les propositions suivantes sur les suites fondamentales:

(I′) *Pour toute suite fondamentale* $Z = \{C_p\}$ *de* ε_0*-cycles* n*-dimensionnels dans* Y, ${}_g(Z)$ *en est une dans* Y.

(II′) Z_1 *et* Z_2 *étant deux suites fondamentales de* ε_0*-cycles* n*-dimensionnels dans* Y, *on a* ${}_g(Z_1 + Z_2) = {}_g(Z_1) + {}_g(Z_2)$ *et la relation* $Z_1 \sim Z_2$ *entraîne* ${}_g(Z_1) \sim {}_g(Z_2)$.

(III′) *Si* Z *est une suite fondamentale de* ε_0*-cycles* n*-dimensionnels dans* Y, *alors* $[{}_g(Z)]_g = Z$.

7. ***Théorème I.*** *Toute fonction* g *qui transforme un espace métrique et compact* X *en un espace* Y *d'une façon localement homéomorphe détermine une transformation homomorphe des groupes de Betti de* X *à coefficients rationnels en groupes correspondants de l'espace* Y.

Ce théorème résulte immédiatement de **5**, **6** et de la simple remarque que chaque suite fondamentale de cycles n-dimensionnels de Y est homologue d'une suite fondamentale de ε_0-cycles n-dimensionnels de Y.

8. Soit Y^X l'espace des transformations continues de l'espace X en sous-ensembles de l'espace Y[5]). On dit qu'une transformation $f \in Y^X$ n'est pas *essentielle*[6]), s'il existe un y_0 tel que les transformations $f_0(x) \equiv y_0$ et f se trouvent dans une même composante de l'espace Y^X.

[5]) Voir p. ex. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografje Matematyczne, Warszawa—Lwów 1933, p. 199.

[6]) Cf. H. Hopf, *Über wesentliche und unwesentliche Abbildungen von Komplexen*, Recueil Soc. Math. de Moscou 37, (1932), p. 51.

Théorème II. *Si une transformation localement homéomorphe* g *d'un espace métrique et compact* X *en un espace* Y *n'est pas essentielle, les groupes de Betti de* Y *à coefficients rationnels et de dimension positive disparaissent.*

Démonstration. Il suffit évidemment de prouver que pour chaque ε_0-cycle n-dimensionnel C de Y on a $C \underset{2\varepsilon_0}{\simeq} 0$, si $n > 0$. La transformation g n'étant pas essentielle, il existe un y_0 et une suite finie $f_0, f_1, \ldots, f_p = g$ de fonctions de Y^X telles que $\varrho(f_i, f_{i+1}) < \varepsilon_0$ où $i = 0, 1, \ldots, p-1$ et que $f_0(x) \equiv y_0$. Considérons les cycles $C_i = [{}_g(C)]_{f_i}$ de Y. On a $C_i \underset{2\varepsilon_0}{\simeq} C_{i+1}$, puisque C_{i+1} est une ε_0-translation du cycle C_i[7]), que $C = C_p$ d'après **6** (6′) et enfin que $C_0 \underset{2\varepsilon_0}{\simeq} 0$, car $f_0(X) = (y_0)$. Il en résulte que $C \underset{2\varepsilon_0}{\simeq} 0$, c. q. f. d.

9. Dans **5**—**8** l'homologie a été traitée dans le champs des coefficients rationnels. Quand on passe aux coefficients mod m, on voit aussitôt que l'opération $(K)_f$, définie de la même façon, jouit de toutes les propriétés démontrées dans **5**. Quant à l'opération ${}_g(K)$, elle ne peut pas être définie, puisque la division joue dans sa définition un rôle essentiel

Admettons maintenant qu'il existe un k pour lequel $Y = Y_k$. Nous dirons dans ce cas que k est le *dégré* de la transformation localement homéomorphe g. Faisons correspondre à chaque ε_0-complexe K de Y le complexe $k \cdot {}_g(K)$. Il est évident que pour cette opération les propositions (1′)—(5′), (I′) et (II′) de **6** restent valables mod m. S'il s'agit d'une formule analogue à (6′), on a

$$[k \cdot {}_g(K)]_g = [{}_g(k \cdot K)]_g = k \cdot K,$$

donc dans le cas $k \equiv 1 \pmod{m}$

$$[k \cdot {}_g(K)]_g = K \pmod{m}.$$

C'est une formule qui remplace la formule (6′) de **6**.

On obtient ainsi les théorèmes suivants, analogues aux précédents:

Théorème I′. *Si* g *est une transformation localement homéomorphe de degré* k *de l'espace métrique et compact* X *en un espace* Y, *les groupes de Betti mod* m *de* Y *s'obtiennent, pour tout diviseur* m *de* $k-1$, *des groupes correspondants mod* m *de l'espace* X *par une transformation homomorphe.*

Théorème II′. *Si la transformation localement homéomorphe* g *de degré* k *de l'espace métrique et compact* X *en un espace* X *n'est pas essentielle, les groupes* n*-dimensionnels de Betti mod* m *de l'espace* X *disparaissent pour tout* $n > 0$ *et pour tout diviseur* m *de* $k-1$.

10. Soit $W(y_0) = (g(y_0) = x_0 \to x_1 \to \ldots \to x_{n-1} \to x_n = x_0)$ un ε_0-parcours clos arbitraire dans Y. Par l'application multiple de **4**,

[7]) Pour le démonstration voir p. ex. L. Vietoris, l. c., p. 401.

notamment aux ensembles $A^i = (x_i, x_{i+1})$, on détermine dans X d'une façon *univoque* un η_0-parcours $_g[W(y_0)] = (y_0 \to y_1 \to \ldots \to y_{n-1} \to y_n)$ tel que $g(y_i) = x_i$. Dans le cas où $y_0 = y_n$, on dit que le *ε_0-parcours $W(y_0)$ est univoque.*

Il est évident que chaque parcours de diamètre $< \varepsilon_0$ est univoque et que la somme de deux parcours univoques est univoque. Il en résulte que:

Si $W(y_0) \equiv 0$, alors $W(y_0)$ est un parcours univoque.

11. ***Théorème III.*** *Toute transformation localement homéomorphe g d'un continu „arcwise connected“* [8]) *X en un continu Y dont le groupe fondamental disparait est une homéomorphie* [9])

Démonstration. Supposons, par contre, que $x_0 \neq x_1$ et que $g(x_0) = g(x_1) = y_0$. Le continu X étant „arcwise connected“, il existe une fonction continue $x(t)$, où $0 \leqslant t \leqslant 1$, telle que $x(0) = x_0$ et $x(1) = x_1$.

Posons:

$$W_n = \left(x_0 = x(0) \to x\left(\frac{1}{n}\right) \to \ldots \to x\left(\frac{n-1}{n}\right) \to x(1) = x_1\right)$$

et

$$W_g^n(x_0) = \left(g(x_0) = y_0 = g(x(0)) \to g\left(x\left(\frac{1}{n}\right)\right) \to \ldots \right.$$
$$\left. \ldots \to g\left(x\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) \to g(x(1)) = g(x_1) = y_0\right).$$

La suite $\{W_g^n(x_0)\}$ est donc une suite fondamentale des parcours clos issus du point y_0. Il existe en conséquence un n_0 tel que $W_g^n(x_0)$ est pour tout $n > n_0$ un ε_0-parcours dans Y et que W^n est un η_0-parcours dans X. On a donc $_g[W_g^n(x_0)] = W^n$ pour $n > n_0$, de sorte que $W_g^n(x_0)$ ne serait pas, pour $n > n_0$, un parcours univoque, puisque $x_0 \neq x_1$. Il en résulte que $W_g^n(x_0)$ *non* $\underset{\varepsilon_0}{\equiv} 0$ pour $n > n_0$ et, par conséquent, que le groupe fondamental de Y contiendrait un élément différent de zéro, contrairement à l'hypothèse.

[8]) au sens des topologistes américains (c. à d. un continu dont toute paire de points se laissent joindre par un arc simple situé dans lui).

[9]) Cf. S. Stoïlow, *Sur les transformations continues des espaces topologiques*, Bull. Math. de la Soc. Roumaine de Sc. 35, (1934), p. 229.

Sur deux problèmes de M. Ruziewicz concernant la décomposition de l'intervalle en paires de points.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

M. Ruziewicz a posé récemment deux problèmes suivants:

Problème I. *L'intervalle $I = [0 \leqslant x \leqslant 1]$ étant décomposé en paires disjointes de points, peut-on toujours, en prenant certaines de ces paires, former un ensemble de mesure donnée quelconque α, où $0 < \alpha < 1$?*

Problème II. *Existe-t-il une décomposition de l'intervalle $I = [0 \leqslant x \leqslant 1]$ en paires disjointes de points, telle que toute somme S d'une infinité non dénombrable de ces paires pour laquelle l'ensemble $I - S$ est non dénombrable, soit non mesurable?*

Je démontrerai que *la réponse au premier problème est négative* et que, *si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, la réponse au second problème est positive.*

1. ***Lemme I.*** *Il existe une décomposition de l'intervalle $I = [0 \leqslant x \leqslant 1]$ en paires disjointes de points, telle que toute somme de ces paires qui contient un ensemble parfait, a au moins un point commun avec tout ensemble parfait contenu dans I.*

Démonstration. En utilisant le théoréme de M. Zermelo (Wohlordnungssatz) on démontre, comme on sait, qu'il existe une décomposition de l'intervalle I en $2^{\aleph_0}$ ensembles disjoints, dont chacun a au moins un point (donc $2^{\aleph_0}$ points communs) avec tout ensemble parfait contenu dans I [1]). Soit φ le plus petit nombre ordinal de puissance $2^{\aleph_0}$ et soit

$$Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_\omega, Q_{\omega+1}, \ldots, Q_\xi, \ldots \qquad (\xi < \varphi)$$

[1]) Voir p. e. W. Sierpiński, *Bull. Acad. Cracovie* 1918, p. 150.