vant être quelconque, on voit que la fonction $f(x)$ jouit de la propriété Π, c. q. f. d.

Soit maintenant $f_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ une suite infinie de fonctions de la famille Φ_2 et soit

$$(1) \qquad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n f_{n-1} \ldots f_2 f_1(x).$$

Posons, pour $n=1, 2, 3, \ldots$

$$(2) \qquad \varphi_n(x) = f_n f_{n-1} \ldots f_2 f_1(x).$$

La famille $F=\Phi_2$ satisfaisant à la condition 1°, les fonctions $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ appartiennent à Φ_2, donc jouissent de la propriété Π, et il en résulte, (d'après (2)), comme nous venons de démontrer, que la fonction (1) jouit de la propriété Π et par suite appartient à Φ_2. La famille $F=\Phi_2$ satisfait donc à la condition 2°.

La formule $S(\Phi_2)=\Phi_2$ est ainsi démontrée. Or, d'après $\Phi_1 \subset \Phi_2$, on a $S(\Phi_1) \subset S(\Phi_2)$: on a donc $S(\Phi_1) \subset \Phi_2$, c'est-à-dire *toute fonction obtenue par un nombre fini ou une infinité dénombrable de superpositions de fonctions jouissant de la propriété de Baire jouit de la propriété Π.*

Pour démontrer qu'il existe une fonction d'une variable réelle qui n'appartient pas à la famille $S(\Phi_1)$ il suffit donc de démontrer qu'il existe des fonctions $f(x)$ qui ne jouissent pas de la propriété Π.

Or, telle est p. e. toute fonction discontinue sur tout ensemble parfait, en particulier toute fonction caractéristique d'un ensemble linéaire qui est totalement imparfait ainsi que son complémentaire (et dont l'existence on démontre à l'aide du théorème de M. Zermelo).

Notre assertion est ainsi démontrée.

Remarque. Nous avons démontré que $\Phi_1 \subset \Phi_2$. Or, la question se pose si l'on a $\Phi_1 = \Phi_2$ ou non. Nous ne savons pas résoudre cette question (négativement) qu'en admettant l'hypothèse du continu. En admettant que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ j'ai démontré [1]) qu'une superposition de deux fonctions de la famille Φ_1 peut n'appartenir pas a cette famille, ce qui est incompatible avec l'égalité $\Phi_1 = \Phi_2$ qui donne (d'après $S(\Phi_2)=\Phi_2$) $S(\Phi_1) = S(\Phi_2) = \Phi_2 = \Phi_1$, donc $S(\Phi_1)=\Phi_1$.

[1]) *Fund. Math.* t. XXII, p. 21.

Sur une classe de fonctions de M. Sierpiński et la classe correspondante d'ensembles [1]).

Par

Edward Szpilrajn (Varsovie).

Introduction. M. W. Sierpiński a considéré récemment la classe des fonctions $f(x)$ (réelles d'une variable réelle) qui satisfont à la condition suivante: *pour tout ensemble parfait P (de nombres réels) il existe un ensemble parfait $P_1 \subset P$ tel que la fonction $f|P_1$ est continue* [2]).

La note présente contient une étude détaillée des fonctions qui satisfont à cette condition de M. Sierpiński ainsi que l'étude des ensembles qui satisfont à la condition correspondante (cf. 2·1). Nous dirons que ces fonctions et ensembles jouissent de *la propriété* (s). Nous considérons de même les ensembles dont tous les sous-ensembles possèdent cette propriété. Nous dirons qu'ils jouissent de *la propriété* (s^0).

D'après M. Sierpiński, la propriété de Baire au sens restreint entraîne la propriété (s) et, d'autre part, il résulte de l'hypothèse du continu que le théorème inverse n'est pas vrai [3]). Nous ne savons pas, si l'on peut se passer de l'hypothèse du continu pour obtenir ce dernier résultat. Nous ne savons non plus, si tout ensemble PCA (ou, plus généralement, tout ensemble projectif) jouit de la propriété (s).

Ce qui paraît intéressant, c'est que la propriété (s) est un invariant de diverses opérations: de l'opération (A) (2·5), de l'homéomorphie généralisée (2·6), de la multiplication cartésienne (2·7), de la superposition [4]) (4·5), etc.

[1]) Les résultats principaux de cet ouvrage ont été présentés à la Société Polonaise de Mathématique (section de Varsovie) le 18 mai 1934.

[2]) *Sur un problème de M. Ruziewicz concernant les superpositions de fonctions jouissant de la propriété de Baire*, ce volume, pp. 12—16.

[3]) Sierpiński l. c. et la note présente 5·1 et 5·3.

[4]) Sierpiński l. c.

Rappelons ici les théorèmes de M. Sierpiński (démontrés à l'aide de l'hypothèse du continu), d'après lesquels la propriété de Baire au sens restreint n'est pas invariante par rapport à la multiplication cartésienne, ni à la superposition [1]), ni à l'homéomorphie de classe 1, 0 [2]).

En général, les relations, obtenues dans le domaine des fonctions et des ensembles jouissant de la propriété (s), paraissent former une théorie assez simple et liée d'une façon naturelle à divers problèmes de la théorie des ensembles de points.

Prémisses sur l'espace, termes et notations. Les espaces considérés dans cette note sont supposés toujours *métriques, séparables* et *complets*. Ils sont désignés par les lettres X, Y, Z.

Notre terminologie et nos notations ne diffèrent en général de ceux qui sont employés dans la *Topologie* de M. Kuratowski [3]).

Nous appelons:

Ensemble jouissant de *la propriété de Baire (au sens large) relativement à X* — un ensemble de la forme $G-K_1+K_2$, où G est un sous-ensemble ouvert de X et K_1 avec K_2 deux ensembles de première catégorie dans X;

Ensemble jouissant de *la propriété de Baire au sens restreint* — un ensemble $E\subset X$ tel que pour tout sous-ensemble parfait $P\subset X$, l'ensemble PE jouit de la propriété de Baire (au sens large) rel. à P;

Ensemble *toujours de première catégorie* — un ensemble qui est de première catégorie sur tout ensemble parfait;

Ensemble *de Cantor* — un ensemble homéomorphe à un sous-ensemble non dense, parfait de l'intervalle $[0, 1]$ (en d'autres mots: un ensemble parfait, compact et 0-dimensionnel);

Fonction *mesurable* B — une fonction $f(x)$ telle que pour tout sous-ensemble ouvert G de l'espace des valeurs, l'ensemble $f^{-1}(G)$ est borelien;

Homéomorphie généralisée entre les ensembles E_1 et E_2 — une fonction f définie sur E_1, biunivoque et mesurable B, dont l'inversion est mesurable B et telle que $f(E_1)=E_2$.

Image de la fonction f — l'ensemble des points (x, y) tels que $y=f(x)$.

Projection sur l'axe X d'un ensemble $E\subset X\times Y$ — l'ensemble des points $x\in X$, pour lesquels il existe un $y\in Y$, tel que $(x, y)\in E$.

Nous désignons par:

$f|E$ ou bien $f(x|E)$ (où l'ensemble E est contenu dans l'ensemble sur lequel la fonction f est définie) — la fonction $\varphi(x)$ définie (seulement) pour $x\in E$ par l'égalité $\varphi(x)=f(x)$.

$N\{E_{n_1,n_2,\ldots,n_k}\}$ — le noyau du système déterminant $\{E_{n_1,n_2,\ldots,n_k}\}$ d'ensembles, c.-à-d. l'ensemble

$$\sum_{n_1,n_2,\ldots} E_{n_1}\cdot E_{n_1n_2}\cdot\ldots$$

(où la sommation s'étend à toutes les suites $n_1, n_2, \ldots$ de nombres naturels).

En parlant des ensembles *parfaits*, nous supposons toujours qu'ils ne sont pas vides.

1) W. Sierpiński: *Hypothèse du continu*, Monografje Matematyczne **4**, Warszawa—Lwów 1934, pp. 70—75.

2) W. Sierpiński: *La propriété de Baire et l'homéomorphie généralisée*, Fund. Math. **22** (1934), p. 262.

3) C. Kuratowski: *Topologie I*, Monografje Matematyczne **3**, Warszawa—Lwów 1933.

1. *Familles denses d'ensembles parfaits.*

1·1. Définitions. Une famille P de sous-ensembles parfaits d'un espace X sera dite *héréditaire* lorsque tout sous-ensemble parfait d'un ensemble quelconque $P\in\mathsf{P}$ appartient à P. Elle est *additive (au sens large)* lorsque la somme de chaque couple d'ensembles disjoints, appartenant à P, appartient de même à P. Enfin, la famille P est *dense sur* Z (où $Z\subset X$) lorsque tout sous-ensemble parfait de Z contient un ensemble $P\in\mathsf{P}$. Elle est appelée *dense*, lorsqu'elle est dense sur l'espace X.

1·2 Produit des familles denses. *$\{\mathsf{P}_n\}$ étant une suite de familles additives (au sens large), héréditaires et denses d'ensembles parfaits, la famille $\mathsf{P}=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}_n$ est dense* [1]).

Remarquons d'abord que tout ensemble parfait contient deux ensembles parfaits disjoints de diamètres arbitrairement petits.

Soit D un ensemble parfait quelconque. La famille P_1 étant dense, il existe dans D deux ensembles parfaits disjoints P_0 et P_1 appartenant à P_1 est dont les diamètres sont <1. Supposons à présent que les ensembles $P_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ (tous les indices étant égaux à 0 ou 1) sont déjà définis pour un nombre n. La famille P_{n+1} étant dense, il existe dans $P_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ deux ensembles parfaits disjoints $P_{i_1,i_2,\ldots,i_n,0}$ et $P_{i_1,i_2,\ldots,i_n,1}$, appartenant à P_{n+1} et dont les diamètres sont $<\frac{1}{n}$.

L'ensemble

$$P=\prod_{n=1}^{\infty}\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n}P_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$$

1) Évidemment, elle est aussi héréditaire et additive (au sens large).

(la sommation s'étendant à tous les systèmes de n indices égaux à 0 ou 1) est un sous-ensemble parfait de D. Les familles $\mathbf{P}_n$ étant additives (au sens large) et héréditaires, on a: $P \in \mathbf{P}_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et par conséquent $P \in \mathbf{P}$.

La famille $\mathbf{P}$ est donc dense, c. q. f. d.

1·3. Application à la propriété de Baire.

(i) *E étant un sous-ensemble de l'espace X la famille $\mathbf{P}$ des sous-ensembles parfaits de X, non denses sur E, est héréditaire, additive et dense.*

L'hérédité et l'additivité de la famille $\mathbf{P}$ étant évidentes, il reste à démontrer que $\mathbf{P}$ est une famille dense. Soient: D un sous-ensemble parfait arbitraire de X, et N le noyau parfait de $\overline{E}$. Il résulte de l'égalité:

$$D = (D - \overline{E}) + DN + D(\overline{E} - N)$$

que l'ensemble $D - \overline{E}$, ou bien l'ensemble DN, est indénombrable.

$D - \overline{E}$ étant un G_δ, il contient dans le premier cas un ensemble parfait, disjoint à E, donc — à plus forte raison — non dense sur E.

Dans le second cas, l'ensemble fermé DN contient un ensemble parfait non dense dans DN, donc à plus forte raison, non dense sur E.

La proposition (i) étant ainsi démontrée, il résulte de 1·2 que

(ii) *$\{E_n\}$ étant une suite arbitraire de sous-ensembles de X, la famille des sous-ensembles parfaits de X, non denses simultanément sur E_n* ($n = 1, 2 \ldots$) — *est dense.*

Supposons maintenant que l'espace X est *indénombrable*. Soit $\{E_n\}$ une suite de sous-ensembles de X. D'après (ii) il existe un ensemble parfait $P \subset X$, non dense simultanément sur E_n ($n = 1, 2 \ldots$). On sait que tout ensemble parfait se laisse décomposer en deux ensembles totalement imparfaits [1]), donc ne satisfaisant pas à la condition de Baire au sens restreint. Soit $P = T + U$ une telle décompositions. On parvient ainsi à la conclusion suivante:

(iii) *$\{E_n\}$ étant une suite arbitraire de sous-ensembles de X, il existe un ensemble T tel que l'ensemble TE_n jouit de la propriété de Baire par rapport à E_n (pour $n = 1, 2 \ldots$) et qui ne jouit pas de cette propriété au sens restreint* [2]).

1·4. Familles denses dans le produit cartésien. *Soient $\mathbf{P}_1$ une famille dense de sous-ensembles parfaits de Y et $\mathbf{P}$ une famille héréditaire de sous-ensembles parfaits de $X \times Y$, dense sur tout ensemble $X \times (\eta)$, où $\eta \in Y$, et contenant tout ensemble $X \times Q$, où $Q \in \mathbf{P}_1$. Thèse: la famille $\mathbf{P}$ est dense.*

[1]) Cf. p. ex. Kuratowski l. c., p. 267.

[2]) C'est la réponse à une question posée par M. Ulam.

Soit donc D un sous-ensemble parfait de $X \times Y$. Supposons que la projection de D sur Y est au plus dénombrable. Il existe donc un point $\eta \in Y$ tel que l'ensemble $[X \times (\eta)] \cdot D$ est indénombrable et par conséquent il contient un ensemble parfait. La famille $\mathbf{P}$ étant dense sur $X \times (\eta)$, il existe un ensemble parfait $P \in \mathbf{P}$ tel que $P \subset [X \times (\eta)] \cdot D \subset D$.

Supposons maintenant que la projection de l'ensemble D sur Y est indénombrable. Cette projection étant un ensemble analytique, elle contient un ensemble parfait et par conséquent un ensemble $Q \in \mathbf{P}_1$. L'ensemble $D \cdot (X \times Q)$ étant un ensemble fermé indénombrable, il contient un ensemble parfait P. Il résulte de nos prémisses que $P \in \mathbf{P}$.

2. *Ensembles à propriété* (s).

2·1. Définition. *Un sous-ensemble E d'un espace X jouit de la propriété (s), lorsque tout sous-ensemble parfait de X contient un ensemble parfait P tel que $P \subset E$ ou bien $PE = 0$.*

La classe des sous-ensembles de X qui jouissent de la propriété (s) sera désignée $\mathbf{S}(X)$.

2·2. Ensembles dépourvus de la propriété (s). Il résulte directement de 2·1 que

(i) *La relation $E \,\overline{\in}\, \mathbf{S}(X)$ équivaut à l'existence d'un ensemble parfait $P \subset X$ de la sorte que les ensembles PE et $P - E$ sont totalement imparfaits.*

Or, tout ensemble parfait se laisse décomposer en deux parties totalement imparfaites [1]). Par conséquent

(ii) *Tout ensemble parfait $P \subset X$ contient un ensemble $E \,\overline{\in}\, \mathbf{S}(X)$.*

2·3. Équivalences. *Pour qu'un sous-ensemble E d'un espace X jouisse de la propriété (s) il faut et il suffit qu'il possède une des propriétés suivantes:*

(s_1) *tout sous-ensemble parfait de X contient un ensemble parfait P tel que l'ensemble PE est ouvert dans P;*

(s_2) *tout sous-ensemble parfait de X contient un ensemble parfait P tel que l'ensemble PE est analytique;*

[1]) Voir p. 20 [1]).

(s_3) *tout sous-ensemble borelien indénombrable de X contient un ensemble borelien indénombrable B_1 tel que l'ensemble $B_1 E$ est borelien;*

(s_4) *il existe un sous-ensemble borelien B de X, contenant E, tel que dans tout sous-ensemble borelien indénombrable de B il existe un ensemble borelien indénombrable B_1 tel que l'ensemble $B_1 E$ est borelien.*

Pour démontrer cette équivalence nous considérons encore deux propriétés suivantes de l'ensemble E:

(s_5) tout sous-ensemble analytique indénombrable de X contient un ensemble parfait P tel que $P \subset E$ ou bien $PE = 0$;

(s_6) il existe un sous-ensemble analytique A de X, contenant E et tel que tout ensemble parfait, contenu dans A, contient un ensemble analytique indénombrable A_1 tel que l'ensemble $A_1 E$ est analytique;

et nous allons démontrer que les propriétés (s) et (s_1)—(s_6) sont équivalentes. Les relations $(s_5) \to (s) \to (s_1) \to (s_2) \to (s_6)$ et $(s_5) \to (s_3) \to \to (s_4) \to (s_6)$ étant évidentes, il reste à démontrer que $(s_6) \to (s_5)$.

Soit donc E un ensemble jouissant de la propriété (s_6). Soit L un sous-ensemble analytique indénombrable de X. Si AL est un ensemble au plus dénombrable, $L - AL$ contient un ensemble parfait P. On a donc $PA = 0$ et par conséquent $PE = 0$. Si AL est un ensemble indénombrable, il existe un ensemble parfait $P \subset AL$. Il existe donc un ensemble analytique indénombrable $A_1 \subset P$ tel que $A_1 E$ est un ensemble analytique. L'ensemble $A_1 E$ étant indénombrable resp. au plus dénombrable, l'ensemble A_1 contient un ensemble parfait contenu dans E resp. disjoint à E. L'ensemble E jouit donc de la propriété (s_5), c. q. f. d.

2·4. **Suites d'ensembles à propriété (s).** *$\{E_n\}$ étant une suite de sous-ensembles de l'espace X qui jouissent de la propriété (s), tout sous-ensemble parfait de X contient un ensemble parfait P tel que les ensembles PE_n sont ouverts dans P pour $n = 1, 2, \ldots$*

Désignons par $\mathbf{P}_n$ la classe des sous-ensembles parfaits P de X, tels que l'ensemble PE_n est ouvert dans P. Les ensembles E_n jouissant de la propriété (s), donc de même de la propriété (s_1), les classes $\mathbf{P}_n$ sont denses. D'autre part elles sont héréditaires et additives. Il résulte donc de 1·2 que la classe $\prod_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}_n$ est aussi dense, c. q. f. d.

2·5. **Addition, soustraction, opération *(A)*.**

(i) *Si $E \epsilon \mathbf{S}(X)$, on a $X - E \epsilon \mathbf{S}(X)$.*

C'est une conséquence immédiate de la définition 2·1

(ii) *La somme d'une suite dénombrable d'ensembles jouissant de la propriété (s) en jouit également.*

En effet: il existe, en vertu de 2·4, dans tout ensemble parfait un ensemble parfait P tel que PE_n est un ensemble ouvert dans P pour $n = 1, 2\ldots$ Par conséquent, l'ensemble $PE = PE_1 + PE_2 + \ldots$ est aussi ouvert dans P. Ainsi l'ensemble E jouit de la propriété (s_1), donc, de même, de la propriété (s).

Nous allons démontrer directement un théorème plus général:

(iii) *La propriété (s) est un invariant de l'opération (A).*

Soit donc $\{E_{n_1, n_2, \ldots n_k}\}$ un système déterminant d'ensembles jouissant de la propriété (s) et posons $E = N\{E_{n_1, n_2, \ldots n_k}\}$. La classe de tous les systèmes finis de nombres naturels étant dénombrable, il existe (d'après 2·4) dans tout ensemble parfait un ensemble parfait P tel que l'ensemble $PE_{n_1, n_2, \ldots n_k}$ est ouvert dans P pour tout système $n_1, n_2, \ldots n_k$ de nombres naturels. Par conséquent, l'ensemble

$$PE = P \cdot N\{E_{n_1, n_2, \ldots n_k}\} = N\{PE_{n_1, n_2, \ldots n_k}\}$$

est analytique. Ainsi, l'ensemble E jouit de la propriété (s_2), donc, de même, de la propriété (s).

2·6. **Homéomorphie généralisée.** *La propriété (s) est un invariant de l'homéomorphie généralisée.*

Soient donc X et Y deux espaces; $E_1 \epsilon \mathbf{S}(X)$; $E_2 \subset Y$. Supposons qu'il existe une homéomorphie généralisée entre E_1 et E_2. D'après un théorème dû à M. Kuratowski, cette homéomorphie généralisée se laisse prolonger sur deux ensembles boreliens situés resp. dans X et Y et contenant resp. E_1 et E_2 [1]). La propriété d'être un ensemble borelien étant invariante par rapport aux transformations biunivoques mesurables B [2]) et l'ensemble E_1 satisfaisant à la condition (s_3) (cf. 2·3), l'ensemble E_2 satisfait évidemment à la condition (s_4).

On peut démontrer que *la propriété (s) n'est pas invariante par rapport aux transformations biunivoques, inverses aux transformations conti-*

[1]) Kuratowski l. c., p. 221.

[2]) Cf. p. ex. Kuratowski l. c., p. 253.

nues. Soit notamment $I = T + U$ la décomposition de l'intervalle $I = [0, 1]$ en deux ensembles totalement imparfaits et U_1 l'ensemble de tous les points $x + 1$, où $x \epsilon U$. Posons $\Phi(x) = x$ pour $x \epsilon T$ et $\Phi(x) = x + 1$ pour $x \epsilon U$. Évidemment $\Phi(I) = T + U_1$. La fonction $\Phi^{-1}(y)$ est biunivoque et continue, et — en même temps — l'ensemble $\Phi(I)$ ne jouit pas de la propriété (s).

Quant aux transformations continues des ensembles jouissant de la propriété $s)$ — cf. 5·1 (iv).

2·7. Multiplication cartésienne.

(i) La relation: $E \epsilon \mathbf{S}(Y)$ entraîne: $X \times E \epsilon \mathbf{S}(X \times Y)$.

Désignons par $\mathbf{P}$ la classe des sous-ensembles parfaits de $X \times Y$ qui sont contenus dans $X \times E$ ou bien disjoints à $X \times E$. Soit ensuite $\mathbf{P}_1$ la classe des sous-ensembles parfaits de Y qui sont contenus dans E ou bien disjoints à E. Les classes $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_1$ sont évidemment héréditaires. L'ensemble E jouissant de la propriété (s), la classe $\mathbf{P}_1$ est dense (sur Y).

Tout sous-ensemble parfait de $X \times Y$, dont la projection sur Y se réduit à un point — appartient à $\mathbf{P}$. De même, tout ensemble $X \times P$, où $P \epsilon \mathbf{P}_1$ — appartient à $\mathbf{P}$. Il résulte donc de 1·4 que la classe $\mathbf{P}$ est dense dans $X \times Y$ et par conséquent $X \times E \epsilon \mathbf{S}(X \times Y)$.

La proposition (i) étant ainsi démontrée, nous allons prouver un théorème plus général:

(ii) *Pour que le produit cartésien $E = E_1 \times E_2 \times \ldots$ fini ou dénombrable (où les ensembles E_n sont non vides et situés resp. dans les espaces X_n) jouisse de la propréte (s), il faut et il suffit que tous les facteurs en jouissent également.*

N é c e s s i t é. Soit $x_n \epsilon E_n$. L'ensemble

$$E_1 \times (x_2) \times (x_3) \times \ldots = (E_1 \times E_2 \times \ldots) \cdot [X_1 \times (x_2) \times (x_3) \times \ldots]$$

est homéomorphe à E_1 et il jouit de la propriété (s). Par conséquent, l'ensemble E_1 (et évidemment tous les autres facteurs) en jouit de même.

S u f f i s a n c e. Il résulte de (i) que l'ensemble

$$[X_1 \times \ldots \times X_{k-1} \times E_k \times X_{k+1} \times \ldots]$$

jouit (pour $k = 1, 2 \ldots$) de la propriété (s). L'égalité

$$E = \prod_k [X_1 \times \ldots \times X_{k-1} \times E_k \times X_{k+1} \times \ldots]$$

entraîne donc la relation: $E \epsilon \mathbf{S}(X_1 \times X_2 \times$.

3. Ensembles dont tous les sous-ensembles jouissent de la propriété (s).

3·1. **Équivalences.** *Les propriétés suivantes d'un ensemble E (situé dans l'espace X) sont équivalentes:*

(s^0) *tout sous-ensemble de l'ensemble E jouit de la propriété (s);*

(s^0_1) *l'ensemble E est totalement imparfait, jouissant de la propriété (s);*

(s^0_2) *tout sous-ensemble parfait de X contient un ensemble parfait disjoint à E* [1]).

La relation $(s^0) \rightarrow (s^0_1)$ est une conséquence immédiate de 2·2 (ii) et la relation $(s^0_1) \rightarrow (s^0_2)$ de la définition 2·1. La propriété (s^0_2) est héréditaire et elle entraîne la propriété (s); il en résulte que $(s^0_2) \rightarrow (s^0)$.

3·2. Addition.

(i) *La somme d'une suite dénombrable d'ensembles jouissant de la propriété (s^0) en jouit également.*

C'est une conséquence immédiate de 2·5 (ii).

(ii) *Pour que la somme d'un ensemble E et de chaque ensemble totalement imparfait soit totalement imparfaite, il faut et il suffit que l'ensemble E jouisse de la propriété (s^0).*

N é c e s s i t é. Supposons que l'ensemble E ne jouit pas de la propriété (s^0). Il existe donc, en vertu de 3·1, un ensemble parfait P tel qu'on a $P_1 \cdot E \neq 0$ pour tout ensemble parfait $P_1 \subset P$. Par conséquent l'ensemble $P - E$ est totalement imparfait, tandis que l'ensemble $E + (P - E)$ contient l'ensemble parfait P.

S u f f i s a n c e. Soient: E_1 un ensemble totalement imparfait et P un ensemble parfait. D'après 3·1 il existe un ensemble parfait $P_1 \subset P$ disjoint à E. L'ensemble E_1 étant totalement imparfait, on a $P_1 - E_1 \neq 0$, donc $P - (E_1 + E) \supset P_1 - (E_1 + E) \neq 0$. L'ensemble $E + E_1$ est donc totalement imparfait.

3·3. **Transformations mesurables B.** Il résulte directement de 2·6 que

(i) La propriété (s^0) est un invariant de l'homéomorphie généralisée.

[1]) Il existe des ensembles indénombrables qui jouissent de ces propriétés; cf. 5·1 (iii).

Nous allons démontrer, en nous appuyant sur (i), le théorème suivant, plus général:

(ii) *Soit* $f(x)$ *une fonction mesurable* B, *définie sur un ensemble* $E \subset X$ *qui transforme cet ensemble en un ensemble jouissant de la propriété* (s^0), *situé dans un espace* Y. *Pour que l'ensemble* E *jouisse de la propriété* (s^0), *il faut et il suffit que l'ensemble* $f^{-1}(y)$ *en jouisse également pour tout* $y \in f(E)$.

La n é c e s s i t é de cette condition étant évidente, nous allons démontrer sa s u f f i s a n c e.

Désignons par I l'image de f, par $\mathbf{P}$ la classe des sous-ensembles parfaits de $X \times Y$, disjoints à I et par $\mathbf{P}_1$ la classe des sous-ensembles parfaits de Y, disjoints à $f(E)$.

L'ensemble $f^{-1}(y)$ jouissant de la propriété (s^0) pour tout $y \in f(E)$, la classe $\mathbf{P}$ est dense sur chaque ensemble $X \times (y)$, où $y \in Y$. L'ensemble $f(E)$ jouissant de même de la propriété (s^0), la classe $\mathbf{P}_1$ est dense sur Y. Tout ensemble $X \times P$, où $P \in \mathbf{P}_1$, appartient évidemment à $\mathbf{P}$. Il résulte donc de 1·4 que la classe $\mathbf{P}$ est dense sur $X \times Y$ et par conséquent l'ensemble I jouit de la propriété (s^0).

La fonction f étant mesurable B, la projection de I sur X établie une homéomorphie généralisée entre I et E[1]. Il résulte donc de (i) que l'ensemble E jouit de la propriété (s^0), c. q. f. d.

Il résulte de (ii) que *la propriété* (s^0) *est invariante par rapport aux transformations biunivoques, inverses aux transformations mesurables* B. Quant aux transformations continues et biunivoques — cf. 5·1 (iv).

3·4. **Multiplication cartésienne.** *Pour que le produit cartésien* $E_1 \times E_2$ *(de deux ensembles non vides situés resp. dans* X *et* Y*) jouisse de la propriété* (s^0), *il faut et il suffit que les ensembles* E_1 *et* E_2 *en jouissent.*

N é c e s s i t é. Soit $x_0 \in E_1$, $y_0 \in E_2$. Les ensembles $E_1 \times (y_0)$ et $(x_0) \times E_2$ étant contenus dans $E_1 \times E_2$, ils jouissent de la propriété (s^0). Par conséquent, les ensembles E_1 et E_2, homéomorphes resp. à $E_1 \times (y_0)$ et $(x_0) \times E_2$, en jouissent également.

[1]) La fonction $\Phi(x) = (x, f(x))$ est une fonction mesurable B (cf. K u r a t o w s k i l. c., p. 182) telle que $\Phi(E) = I$. La projection de I sur X est l'inversion de Φ, et par conséquent elle est une homéomorphie généralisée.

S u f f i s a n c e. Supposons donc que les ensembles E_1 et E_2 jouissent de la propriété (s^0). Considérons pour $(x, y) \in E_1 \times E_2$ la fonction $p(x, y) = x$ (c.-à-d. la projection du point (x, y) sur X). C'est une fonction continue et pour tout $x \in p(E_1 \times E_2)$ l'ensemble $p^{-1}(x)$ jouit de la propriété (s^0). On a, d'autre part, $p(E_1 \times E_2) = E_1$. En vertu de 3·3 (ii) l'ensemble $E_1 \times E_2$ jouit de la propriété (s^0), c. q. f. d.

Remarquons que la propriété (s^0) n'est pas invariante par rapport à la multiplication cartésienne dénombrable. Il suffit de rappeler que l'ensemble $A \times A \times \ldots$, où A se compose de deux points, est un ensemble de Cantor[1])

4. *Fonctions à propriété* (s).

4·1. **Définition et équivalences.** *Une fonction* $f(x)$ *(qui transforme l'espace* X *en un sous-ensemble de l'espace* Y*) jouit d e l a p r o p r i é t é* (s) *lorsque tout sous-ensemble parfait de* X *contient un ensemble parfait* P *tel que*

(a) *la fonction* $f \mid P$ *est continue.*

La classe des fonctions jouissant de la propriété (s) qui transforment X en sous-ensembles de Y sera désignée par $S(X, Y)$.

La condition (a) peut être remplacée par la condition

(b) *la fonction* $f \mid P$ *est mesurable* B,

car il existe pour toute fonction mesurable B sur P un sous-ensemble parfait de P sur lequel cette fonction est continue.

Évidemment, *la propriété* (s) *d'un ensemble et de sa fonction caractéristique sont équivalentes.*

4·2. **Passage à la limite.** *La limite* $f(x)$ *d'une suite convergente* $\{f_n(x)\}$ *de fonctions jouissant de la propriété* (s) *(définies sur un espace* X*) en jouit également*[2]).

Désignons par $\mathbf{P}_n$ la classe des sous-ensembles parfaits P de X tels que la fonction $f_n(x \mid P)$ est continue. Les classes $\mathbf{P}_n$ sont additives et héréditaires, et les fonctions f_n jouissant de la propriété (s), ces classes sont denses. Il résulte de 1·2 que la classe $\prod_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}_n$ est

[1]) K u r a t o w s k i l. c., p. 79.

[2]) Théorème de M. S i e r p i ń s k i. Voir la note *Sur un problème de M. Ruziewicz...*, ce volume, p. 14.

dense également. Par conséquent, tout sous-ensemble parfait de X contient un ensemble parfait P tel que les fonctions $f_n|P$ $(n=1,2\ldots)$ sont continues simultanément. La fonction $f|P$ est donc mesurable B. Nous venons ainsi de démontrer que la fonction f jouit de la propriété (s).

4·3. **Fonctions et ensembles à propriété (s).** *Pour qu'une fonction $f(x)$ appartienne à $\boldsymbol{S}(X, Y)$ il faut et il suffit que l'ensemble $f^{-1}(G)$ appartienne à $\mathbf{S}(X)$ pour tout sous-ensemble ouvert G de Y.*

Nécessité. Soient: G un sous-ensemble ouvert de Y et D un sous-ensemble parfait de X. Il existe donc un ensemble parfait $P\subset D$ tel que la fonction $\varphi(x)=f(x|P)$ est continue. Par conséquent l'ensemble $\varphi^{-1}(G)=P\cdot f^{-1}(G)$ est ouvert dans P. On a donc $f^{-1}(G)\in\mathbf{S}(X)$ pour tout sous-ensemble ouvert de Y.

Suffisance. Désignons par $G_1, G_2,\ldots$ une base de l'espace Y. Remarquons que, si pour une fonction $g(x)$ qui transforme un ensemble Z en un sous-ensemble de Y, tout ensemble $g^{-1}(G_n)$ $(n=1,2\ldots)$ est ouvert dans Z — la fonction g est continue sur Z. Soit, en effet, $G=G_{k_1}+G_{k_2}+\ldots$ un sous-ensemble ouvert arbitraire de Y. On a donc $g^{-1}(G)=g^{-1}(G_{k_1})+g^{-1}(G_{k_2})+\ldots$ et cet ensemble étant ouvert dans Z, la fonction g est continue sur Z

Soit à présent $f(x)$ une fonction telle que $f^{-1}(G)\in\mathbf{S}(X)$ pour tout ensemble ouvert $G\subset Y$. Considérons la suite: $f^{-1}(G_1)$, $f^{-1}(G_2),\ldots$ D'après 2·4, tout sous-ensemble parfait de X contient un ensemble parfait P tel que l'ensemble $P\cdot f^{-1}(G_n)$ est ouvert dans P pour $n=1,2\ldots$ La fonction $f|P$ est donc continue d'après la remarque précedente et par conséquent $f\in\boldsymbol{S}(X, Y)$.

4·4. **Fonctions biunivoques.** *Pour chaque fonction biunivoque $f(x)$ qui transforme l'espace X en l'espace Y les conditions suivantes sont équivalentes:*

(t) $f\in\boldsymbol{S}(X,Y)$ *et* $f^{-1}\in\boldsymbol{S}(Y,X)$;

(t_1) *tout sous-ensemble parfait de X contient un ensemble C de Cantor tel que la fonction $f|C$ est une homéomorphie et tout sous-ensemble parfait de Y contient un ensemble C_1 de Cantor tel que la fonction $f^{-1}|C_1$ est une homéomorphie* [1]*;*

(t_2) *la relation: $E\in\mathbf{S}(X)$ équivaut à la relation: $f(E)\in\mathbf{S}(Y)$.*

[1]) Il résulte de l'hypothèse du continu que la deuxième partie de la condition (t_1) est essentielle. Voir 5·4 (a) et (b).

$(t)\to(t_1)$. On peut se borner évidemment à démontrer la première partie de la condition (t_1). Soit donc D un sous-ensemble parfait de X. L'ensemble D contient un ensemble parfait P sur lequel la fonction f est continue. L'ensemble P contient ensuite un ensemble C de Cantor [1]). La fonction f étant biunivoque et continue sur C, la fonction $f|C$ est une homéomorphie.

$(t_1)\to(t_2)$. On peut se borner évidemment à démontrer que la relation $E\in\mathbf{S}(X)$ entraîne: $f(E)\in\mathbf{S}(Y)$. Soit donc P un sous-ensemble parfait de Y. Il existe donc un ensemble de Cantor $C\subset P$, tel que la fonction $f^{-1}|C$ est une homéomorphie. L'ensemble $C_1=f^{-1}(C)$ est de même un ensemble de Cantor. L'ensemble E jouissant de la propriété (s), il existe un sous-ensemble parfait D de C_1, contenu dans E ou bien disjoint à E. Par conséquent, l'ensemble $f(D)$ est un sous-ensemble parfait de P, contenu dans $f(E)$ ou bien disjoint à $f(E)$. On a donc $f(E)\in\mathbf{S}(Y)$.

$(t_2)\to(t)$. On peut se borner à démontrer que la condition (t_2) entraîne: $f\in\boldsymbol{S}(X, Y)$. Soit donc G un sous-ensemble ouvert de Y. On a donc $G\in\mathbf{S}(Y)$ et — en vertu de (t_2) — $f^{-1}(G)\in\mathbf{S}(X)$. La proposition 4·3 entraîne donc la relation $f\in\boldsymbol{S}(X, Y)$.

4·5. **Superposition.** *Prémisses: $f\in\boldsymbol{S}(X, Y)$; $g\in\boldsymbol{S}(Y, Z)$ et $h(x)=g(f(x))$ pour tout $x\in X$. Thèse: $h\in\boldsymbol{S}(X, Z)$* [2]).

Soit D un sous-ensemble parfait de X. Il existe donc un ensemble parfait $D_1\subset D$ tel que la fonction $\psi(x)=f(x|D_1)$ est continue. Examinons deux cas:

1⁰. L'ensemble $f(D_1)$ est au plus dénombrable. Il existe donc un point η tel que l'ensemble $\psi^{-1}(\eta)$ est indénombrable. Cet ensemble étant fermé, il existe un ensemble parfait $P\subset\psi^{-1}(\eta)$. La fonction f et, par conséquent, la fonction h sont donc constantes sur P. La fonction $h|P$ est donc continue.

2⁰. L'ensemble $f(D_1)$ est indénombrable. Il existe donc un ensemble de Cantor $C\subset D$ tel que la fonction $\varphi(x)=f(x|C)$ est une homéomorphie [3]). Par conséquent, il existe un ensemble parfait Q contenu dans l'ensemble parfait $\varphi(C)$ et tels que la fonction $g|Q$

[1]) Cf. p. ex. Kuratowski l. c., p. 229.

[2]) Théorème démontré par M. Sierpiński (dans le cas où l'espace X est compact), l. c., p. 14.

[3]) Voir Kuratowski l. c., p. 227.

est continue. L'ensemble $P = \varphi^{-1}(Q)$ est un ensemble parfait. Les fonctions $f|P$ et $g|Q$ étant continue, la fonction $h|P$ est aussi continue, c. q. f. d.

4·6. Fonctions complexes; fonctions de deux variables; images des fonctions. Les théorèmes précédents entraînent les propositions suivantes:

(i) *Soit* $f_1(x), f_2(x)\dots$ *une suite finie ou infinie de fonctions qui transforment l'espace* X *en des sous-ensembles des espaces:* $Y_1, Y_2\dots$ *Pour que cette suite appartienne à la classe* $\boldsymbol{S}(X, Y_1 \times Y_2 \times \dots)$ *il faut et il suffit que toutes les fonctions* f_n *appartiennent respectivement à* $\boldsymbol{S}(X, Y_n)$.

(ii) $f(x)$ *étant une fonction jouissant de la propriété* (s), *son image en jouit également.*

Nous démontrerons plus loin [5·4 (b) et (c)] qu'il résulte de l'hypothèse du continu que l'inversion de cette proposition n'est pas vraie.

(iii) *Soit* $f(x, y)$ *une fonction définie pour tout* $x \in X$, $y \in Y$, *dont les valeurs appartiennent à* Z. *Supposons que pour tout* $y_0 \in Y$ *la fonction* $\varphi(x) = f(x, y_0)$ *est continue et pour tout* $x_0 \in X$ *la fonction* $\psi(y) = f(x_0, y)$ *appartient à* $\boldsymbol{S}(Y, Z)$. *Thèse:* $f \in \boldsymbol{S}(X \times Y, Z)$.

(iv) $f(x)$ *étant une fonction mesurable* B, *définie sur un ensemble* $E \in \mathbf{S}(X)$ *et dont les valeurs appartiennent à un espace* Y, *on a* $f^{-1}(E) \in \mathbf{S}(X)$ *pour tout ensemble* $E \in \mathbf{S}(Y)$.

Pour démontrer ces théorèmes il suffit de reprendre les idées des raisonnements employés souvent dans la théorie des fonctions dans les espaces métriques [1]).

5. *Rapports à la propriété de Baire et à la mesurabilité.*

5·1. La propriété de Baire. B étant un sous-ensemble d'un ensemble parfait P, jouissant de la propriété de Baire (au sens large) relativement à P, il existe un sous-ensemble parfait P_1 de P, ou bien disjoint à B (lorsque B est de première catégorie dans P), ou bien contenu dans B (dans le cas contraire). Il en résulte que *pour qu'un ensemble* E *jouisse de la propriété* (s), *il faut et il suffit que tout ensemble parfait contienne un ensemble parfait* P *tel que l'ensemble* PE *jouisse de la propriété de Baire rel. à* P. Par conséquent [1]):

(i) *Tout ensemble qui jouit de la propriété de Baire au sens restreint jouit de la propriété* (s).

(ii) *Tout ensemble toujours de première catégorie jouit de la propriété* (s^0).

Remarquons qu'on ne peut pas remplacer dans ces propositions la propriété de Baire au sens restreint (resp. la propriété d'être toujours de première catégorie) par la propriété de Baire au sens large (resp. par la propriété d'être de première catégorie). Soit notamment $P = T + U$ une décomposition d'un sous-ensemble parfait non dense de X en deux parties totalement imparfaites. L'ensemble U est évidemment de première catégorie dans X tandis qu'il ne jouit pas de la propriété (s).

Il existe, comme on sait, des ensembles linéaires toujours de première catégorie, de puissance $\aleph_1$ [2]). Par conséquent,

(iii) *Il existe des ensembles linéaires de puissance* $\aleph_1$, *jouissant de la propriété* (s^0).

M. Kuratowski a démontré que tout ensemble de puissance $\aleph_1$ est une image biunivoque et continue d'un ensemble toujours de première catégorie [3]).

Dans le même ordre d'idées, M. Sierpiński a construit une fonction continue $f(x)$ d'une variable réelle, telle que pour tout ensemble E de nombres réels de puissance $\aleph_1$ il existe un ensemble linéaire K toujours de première catégorie, tel que $f(K) = E$ [4]).

Il en résulte, d'après (ii), que

(iv) *Si l'hypothèse du continu est vraie, les propriétés* (s) *et* (s^0) *ne sont invariantes ni par rapport aux transformations biunivoques et continues, ni par rapport aux transformations par les fonctions continues sur tout l'espace.*

[1]) Cf. Kuratowski l. c., pp. 182, 183, 180 et ma note *Sur les rapports entre les ensembles et les fonctions dans les espaces métriques* (en préparation).

[1]) Cf. Sierpiński l. c., p. 14. Quant au problème de l'inversion de ces propositions — cf. 5·3.

[2]) Cf. p. ex. Kuratowski l. c., p. 269.

[3]) l. c., p. 271.

[4]) *Sur les ensembles toujours de première catégorie*, Mathematica 8 (1934), p. 195.

5·2. La mesurabilité. Considérons les fonctions non negatives finies $\mu(E)$, définies pour tout ensemble $E \subset X$ et satisfaisant aux conditions suivantes [1]:

1° $\mu((p)) = 0$ pour tout $p \in X$.
2° la relation: $E_1 \subset E_2$ entraîne: $\mu(E_1) \leqslant \mu(E_2)$.
3° $\mu(E_1 + E_2 + \ldots) \leqslant \mu(E_1) + \mu(E_2) + \cdots$
4° la relation: $\varrho(E_1, E_2) > 0$ entraîne: $\mu(E_1 + E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$.
5° pour tout ensemble $E \subset X$ il existe un ensemble H étant un G_δ et tel que $H \supset E$ et $\mu(H) = \mu(E)$.

Ces fonctions seront appelées *fonctions* (c) [2]. Un ensemble M est dit mesurable par rapport à une fonction μ, lorsqu'on a $\mu E = \mu(EM) + \mu(E - M)$ pour chaque ensemble $E \subset X$.

(i) *Tout ensemble $M \subset X$ mesurable par rapport à chaque fonction (c) jouit de la propriété (s).*

Soit D un sous-ensemble parfait de X. Soient ensuite: C un ensemble de Cantor situé sur l'intervalle $[0, 1]$, de mesure lebesguienne positive et $\varphi(x)$ une homéomorphie entre un sous-ensemble Q de D et l'ensemble C.

La fonction $\mu(E) = m_e(\varphi(EQ))$ (où m resp. m_e désigne la mesure lebesguienne resp. la mesure extérieure lebesguienne) est évidemment une fonction (c), l'ensemble M est donc mesurable par rapport à μ. Par conséquent, l'ensemble $\varphi(MD)$ est mesurable au sens de Lebesgue, il existe donc un ensemble parfait P_1 contenu dans $\varphi(MD)$ ou dans $C - \varphi(MD)$, suivant que $\mu(\varphi(MD)) > 0$ ou $\mu(\varphi(MD)) = 0$. Par conséquent l'ensemble $P = \varphi^{-1}(P_1)$ est contenu dans DM resp. dans $D - M$, donc $E \in \mathbf{S}(X)$, c. q. f. d.

Il résulte de (i) que

(ii) *Tout ensemble sur lequel chaque fonction (c) s'annule jouit de la propriété (s^0).*

Remarquons qu'il existe un ensemble de mesure lebesguienne nulle qui ne jouit pas de la propriété (s). Pour l'obtenir il suffit de décomposer un ensemble parfait de mesure lebesguienne nulle en deux parties totalement imparfaites.

[1]) Cf. C. Carathéodory: *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Leipzig—Berlin 1927, p. 238 et H. Hahn: *Theorie der reellen Funktionen*, Berlin 1921, pp. 424, 430 et 444.

[2]) Ce sont donc *Inhaltsfunktionen* (au sens de M. Hahn, l. c., p. 444) finies et s'annulant sur les ensembles composés d'un seul point.

D'après un résultat de M. Poprougénko, toute fonction (c) s'annule sur tout ensemble E qui satisfait à la condition (C) suivante: il existe pour chaque suite $\{d_n\}$ de nombres positifs une décomposition $E = E_1 + E_2 + \ldots$ telle que le diamètre de l'ensemble E_n ne dépasse pas d_n pour $n = 1, 2, \ldots$ [1]). Il en résulte que *tout ensemble satisfaisant à la condition (C) possède la propriété (s^0).*

5·3. Ensembles singuliers de Lusin et de Sierpiński. M. Lusin a déduit de l'hypothèse du continu l'existence d'un ensemble indénombrable L situé dans l'intervalle $I = [0, 1]$, dont tout sous-ensemble non dense dans I est au plus dénombrable. M. Sierpiński a déduit de cette hypothèse l'existence d'un sous-ensemble indénombrable S de I, dont tout sous-ensemble de mesure nulle est au plus dénombrable [2]).

On sait que chaque fonction (c) s'annule sur L [3]) et que cet ensemble ne jouit pas de la propriété de Baire. D'autre part l'ensemble S est non mesurable au sens de Lebesgue et il est toujours de première catégorie [4]). Posons $R = L + S$. En vertu de 5·1 (ii) et 5·2 (ii) nous concluons que

Si l'hypothèse du continu est vraie, il existe un ensemble linéaire R jouissant de la propriété (s^0), non mesurable au sens de Lebesgue et qui ne jouit pas de la propriété de Baire.

5·4. Une fonction singulière. Nous allons construire cette fonction en nous appuyant sur la proposition 5·1 (iii) et sur l'hypothèse du continu.

Soient: I l'intervalle $[0, 1]$, J l'intervalle $[0, 2]$ et N un ensemble indénombrable, jouissant de la propriété (s^0), situé dans I. [Un tel ensemble existe, d'après 5·1 (iii)]. Il résulte de l'hypothèse du continu qu'il existe une correspondance biunivoque $\varphi(x)$ telle que $\varphi(N) = N + (J - I)$.

[1]) Cf. ma note *Remarques sur les fonctions complètement additives d'ensembles et les ensembles jouissant de la propriété de Baire*, Fund. Math. **22** (1934), p. 311.

[2]) Voir p. ex. le livre cité de M. Sierpiński: *Hypothèse du continu*, pp. 36 et 80.

[3]) Voir ma note citée, p. 307.

[4]) Voir p. ex. Sierpiński l. c., pp. 41, 86 et 85.

Posons

$$F(x) = x \quad \text{pour tout} \quad x \in I - N$$

$$F(x) = \varphi(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in N.$$

Il est clair que

(a) *La fonction $F(x)$ jouit de la propriété* (s) *(et même tout sous-ensemble parfait de I contient un ensemble parfait P tel que la fonction $F|P$ est une homéomorphie).*

Démontrons ensuite que

(b) *La fonction inverse $F^{-1}(y)$ ne jouit pas de la propriété* (s).

Soit, en effet, U un sous-ensemble de $J - I$ qui ne jouit pas de la propriété (s). $F^{-1}(U)$ étant contenu dans N, il jouit de la propriété (s). La fonction F ne satisfait donc pas à la condition (t_2) du théorème 4·4. Par conséquent, en vertu de ce théorème, elle ne satisfait pas à la condition (t), donc $F^{-1} \overline{\in} S(J, I)$, c. q. f. d.

Il résulte de (a) et 4·6 (ii) que

(c) *L'image de la fonction F (donc aussi de la fonction F^{-1}) jouit de la propriété* (s).

Sur quelques propriétés des transformations localement homéomorphes.

Par

Samuel Eilenberg (Varsovie).

Une transformation g d'un espace métrique et compact X en un autre espace métrique et compact Y[1]) sera dite *localement homéomorphe*, s'il existe pour tout $x \in X$ un entourage [2]) $U(x)$ que la fonction g transforme par homéomorphie en entourage $g[U(x)]$ de $g(x)$.

Le but de cette Note est l'étude des relations entre les groupes de Betti des espaces X et Y. J'établis aussi un théorème sur le groupe fondamental (th. III), qui offre certaines analogies avec le théorème de la „monodromie" de la théorie des fonctions analytiques.

1. *Lemme.* *Pour chaque couverture de l'espace Y par des ensembles ouverts $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$, il existe un nombre $\varepsilon_0 > 0$ tel que chaque ensemble $A \subset Y$ de diamètre $\delta(A) < \varepsilon_0$ est contenu dans un au moins des ensembles $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$.*

Démonstration. Si un tel nombre ε_0 n'existait pas, il existerait une suite $\{A_n\}$ de sous-ensembles de Y telle que $\delta(A_n) < \frac{1}{n}$ et $A_n - Q_i \neq 0$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, p$. En désignant par y_n un point arbitraire de A_n, on aurait donc

$$\varrho[(y_n), (Y - Q_i)] < \frac{1}{n}\ ^{3)}.$$

[1]) Dans la suite je me sers des symboles g, X et Y seulement dans ce sens. Les lettres x et y, munies ou non d'indices, désigneront respectivement des points de X et de Y.

[2]) c. à d. un ensemble ouvert contenant x.

[3]) $\varrho(A, B) = \underset{x \in A,\, y \in B}{\text{Min}}\, \varrho(x, y)$.