C_k étant un $\frac{1}{3^{k_0+k}}$-cycle, il en résulte [12]) qu'il existe un $\frac{1}{3^{k_0+k-1}}$-complexe D_k de A dont la frontière est égale à $C_k - C_{k\varphi_k}$. En posant $Q_k' = D_k + Q_k - D_{k+1}$, où Q_k est un $\frac{1}{3^{k_0+k}}$-complexe de A dont la frontière est $C_{k+1} - C_k$, on obtient un $\frac{1}{3^{k_0+k-1}}$-complexe de A ayant pour la frontière le cycle: $C_k - C_{k\varphi_k} + C_{k+1} - C_k - C_{k+1} + C_{(k+1)\varphi_{k+1}} = C_{(k+1)\varphi_{k+1}} - C_{k\varphi_k}$. La suite $\mathfrak{C}' = \{C_{k\varphi_k}\}$ est alors un V-cycle de A homologue à $\mathfrak{C}$ dans A et ayant comme suite majorante pour sa décroissance la suite $\left\{\frac{1}{3^{k_0+k-1}}\right\}$. De plus, $\mathfrak{C}'$ est un V-cycle *situé dans* A_0. En effet, faisons correspondre à chaque sommet a de Q_k' un point $\psi_k(a)$ de E_{k_0+k} remplissant la condition: $|a - \psi_k(a)| = \varrho((a), E_{k_0+k})$ [13]). En tenant compte du fait que tous les sommets des cycles $C_{k\varphi_k}$ et $C_{(k+1)\varphi_{k+1}}$ appartiennent à E_{k_0+k} et de l'inégalité (5), on conclut que la fonction ψ_k fait correspondre au $\frac{1}{3^{k_0+k-1}}$-complexe Q_k' de A le $\left(\frac{2}{3^{k_0+k+1}} + \frac{1}{3^{k_0+k-1}}\right)$-complexe Q_k'' de E_{k_0+k} ayant la même frontière $C_{(k+1)\varphi_{k+1}} - C_{k\varphi_k}$. Ceci implique, en vertu de l'inégalité

$$\frac{2}{3^{k_0+k+1}} + \frac{1}{3^{k_0+k-1}} < \frac{1}{3^{k_0+k-2}}$$

et de la définition du polytope N_{k_0+k}, que $|Q_k''|$ est situé dans N_{k_0+k}. Cela veut dire que $\mathfrak{C}'$ est un V-cycle situé dans A_0. Il en résulte, d'après 4., qu'il existe un V-cycle $\overline{\mathfrak{C}}$ situé dans $|C_{1\varphi_1}|$ et homologue dans A_0 à $\mathfrak{C}'$, et parsuite aussi à $\mathfrak{C}$ et à $\mathfrak{C}_0$. Par conséquent les V-cycles $\overline{\mathfrak{C}}_f$ et $\mathfrak{C}_{0f} = \mathfrak{C}_0$ sont homologues dans A. Mais $C_{1\varphi_1}$ est, conformément à sa définition, un $\frac{1}{3^{k_0}}$-cycle de A de dimension $\leqslant n$ dont tous les sommets appartient à E_{k_0}. En tenant compte de la définition de M_{k_0}, il en résulte l'inclusion $|C_{1\varphi_1}| \subset M_{k_0}$; cela veut dire que le V-cycle $\overline{\mathfrak{C}}$ est situé dans M_{k_0}.

La démonstration de notre théorème est ainsi terminée.

[12]) Voir L. Vietoris, Math. Ann. 97 (1927), p. 461.

[13]) Par $\varrho(A, B)$ je désigne, en suivant M. C. Kuratowski, *l'écart* des ensembles A et B, c. à d. la borne inférieure des distances $|x - y|$ pour x parcourant A et y parcourant B.

Hans Hahn †

Von

Karl Menger (Wien).

Mit Hans Hahn, der am 24. VII. 1934 unerwartet in seinem 55. Lebensjahre starb *), ist der Mathematik ein in vielen Richtungen erfolgreicher Forscher entrissen worden. Seine Jugendarbeiten enthalten bedeutsame Beiträge zur Variationsrechnung; eine andere Arbeit bezieht sich auf Funktionen zweier komplexer Veränderlicher; weiters hat er in zahlreichen Abhandlungen die Theorie der Reihen- und Integraldarstellungen bereichert und eine besonders bemerkenswerte und schöne Anwendung dieser Methoden auf das Interpolationsproblem gegeben (Math. Zeitschr. 1); wichtig sind seine Beiträge zum allgemeinen Funktionalkalkül; in der Elementargeometrie führte er den ersten auf Verknüpfungs- und Anordnungsaxiomen beruhenden lückenlosen Beweis des Jordan'schen Satzes für Polygone (Monatshefte f. Math. u. Phys. 19). Schon in allen den erwähnten Arbeiten (vgl. meinen Nachruf auf Hahn in den Ergebnissen eines math. Kolloquiums 6) zeigt sich Hahn als scharfer Logiker mit außerordentlich klarer Darstellungsgabe, Eigenschaften, welche auch seinen Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen aus dem Jahre 1911 trotz der inzwischen erfolgten Fortschritte heute noch lesenswert machen.

Was aber die Redaktion der *Fundamenta Mathematicae* zweifellos besonders zum Wunsche veranlaßt hat, an dieser Stelle eine Würdigung des Verstorbenen erscheinen zu lassen, ist der Umstand.

*) 1879 in Wien geboren, studierte Hahn in seiner Vaterstadt, in Strassburg, München und Göttingen, habilitierte sich 1905 in Wien, war 1909—16 Professor in Czernowitz, dann bis 1921 in Bonn und seither an der Universität Wien.

daß Hahn einer der hervorragendsten Vertreter der in dieser Zeitschrift kultivierten Forschungsrichtung war: einer der besten Kenner und Förderer der Theorie der reellen Funktionen und der mengentheoretischen Geometrie, sowie einer der ersten Gelehrten im deutschen Sprachgebiet, welche die Bedeutung dieser Teile der Mathematik erkannten und durch glänzende Vorlesungen der nächsten Mathematikergeneration bekannt machten.

Sein Buch „*Theorie der reellen Funktionen*“ ist eines der Standardwerke dieses Gebietes und viele von Hahn's Leistungen, vor allem die Entdeckung des Zusammenhanges im Kleinen zur Kennzeichnung der stetig durchlaufbaren Mengen, die gleichzeitig und unabhängig von Mazurkiewicz erfolgte, sind so allgemein bekannt, daß hier jede Besprechung derselben überflüssig ist. Es sei deshalb im Folgenden bloß auf einige Leistungen des Verstorbenen aus den Publikationsgebieten der *Fundamenta Mathematicae* verwiesen, die aus verschiedenen Gründen bisher minder bekannt geworden sind.

Da erwähne ich die von Hahn 1929 gegebene Einführung des Lebesgue-Stieltjes-Integrals (Wiener Ak. Anz. 66): Ist E irgend eine Menge, $\varphi(M)$ eine für alle Mengen eines σ-Körpers $\mathfrak{K}$ von Teilmengen von E definierte total-additive Mengenfunktion; E liege in $\mathfrak{K}$ und $\varphi(E)$ sei endlich; ist $\varphi(M)=0$ für eine Menge M aus $\mathfrak{K}$, so soll auch jede Teilmenge M' von M in $\mathfrak{K}$ liegen. Als φ-integrierbar bezeichnet Hahn eine φ-meßbare Funktion f dann, wenn eine für alle M aus $\mathfrak{K}$ definierte Mengenfunktion $\lambda(M)$, auch $\int\limits_M f\,d\varphi$ genannt, existiert, welche total additiv in $\mathfrak{K}$ ist und für jede Menge M aus $\mathfrak{K}$, auf welcher $c' \leqslant f \leqslant c''$ gilt, der Bedingung

$$c'\varphi(M) \leqslant \lambda(M) \leqslant c''\varphi(M)$$

genügt (wobei, wenn $\varphi(M)=0$ ist, $c\varphi(M)=0$ zu setzen ist, auch wenn $c=\pm\infty$ ist).

Hinzuweisen ist ferner auf Hahns Heranziehung einfacher neuer Sätze über unendliche Reihen zum Beweis von Sätzen über Mengenfunktionen (Wiener Ak. Anz. 65 u. Bull. Calcutta Math. Soc. 20). Dabei wird durch Hahns Untersuchungen nahegelegt, wenn eine unendliche Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ gegeben ist, ganz allgemein die Menge aller Zahlen $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{n_i}$ für alle Teilfolgen $\{a_{n_i}\}$ der Folge $\{a_n\}$ zu untersuchen.

Es wäre wohl sehr wünschenswert, wenn dieses Problem gleich allgemein für Reihen von Vektoren des R_n behandelt würde und mit den bekannten Steinitz'schen Untersuchungen über die Umordnungen von Vektorreihen, sowie mit den Untersuchungen über Längenmengen von Bögen des Vektorraumes (vgl. Ergebn. eines math. Kolloquiums 5) in Zusammenhang gebracht würde, wodurch zweifellos neue wichtige Kapitel der Theorie der unendlichen Reihen entstehen würden.

Hahn war einer der ersten, welche die Wichtigkeit von Fréchet's abstrakten Raumbegriffen erkannten. Er bewies (Monatsh. für Math. u. Phys. 19), daß in jeder Klasse V nicht konstante stetige Funktionen existieren (bekanntlich der Kernsatz des Metrisationsproblems), indem er die später von Urysohn zum Beweis des Hauptlemmas der Metrisationstheorie benützte Methode der Umgebungsringe entwickelte.

Auf seine bekannten Untersuchungen über die stetigen Streckenbilder wurde Hahn durch das Studium der stetigen Abbildungen der Strecken auf das Quadrat geführt, wobei er fand, daß bei jeder solchen Abbildung im Quadrat Punkte mit mindestens je drei Urbildpunkten dicht liegen und die Menge der Quadratpunkte mit mindestens zwei Urbildpunkten die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt. Dieses Ergebnis ist der erste Spezialfall der allgemeinen dimensionstheoretischen Sätze von Hurewicz über die Multiplizität der Bildpunkte bei dimensionserhöhenden stetigen Abbildungen.

Hahn's Darstellung der irreduziblen Kontinua als Summe von Primteilen löst die irreduziblen Kontinua nicht so stark auf, wie die von Kuratowski und Vietoris eingeführten Teilmengen, ermöglicht aber dafür die Formulierung des abgerundeten Satzes, daß der Raum der Primteile eines irreduziblen Kontinuums einpunktig oder ein Bogen ist, ein Ergebnis, das durch den Satz von R. L. Moore, daß der Raum der Primteile eines beliebigen Kontinuums stetig durchlaufbar ist, eine schöne Ergänzung erfuhr (kurze Beweise beider Sätze in Hausdorff's *Mengenlehre*, 2. Aufl.).

Schließlich sei noch auf die in der abstrakten Algebra m. E. zu wenig beachtete wichtige Arbeit Hahn's über nichtarchimedische Größensysteme (Wien. Ak. Ber. 116) hingewiesen. In der heutigen Terminologie lassen sich Hahn's Resultate folgendermaßen aussprechen. Es sei G eine geordnete Abelsche Gruppe, deren Kompositionsoperation wir Addition nennen wollen, während wir eine

Summe von n Elementen a mit na bezeichnen. Wir fassen je zwei Elemente a und b von G dann und nur dann in eine „Klasse" zusammen, wenn zu jeder ganzen Zahl m eine ganze Zahl n existiert, so daß $ma < nb$ ist, und zu jedem n' ein m' existiert, so daß $m'a > n'b$. Die Menge dieser Klassen ist eine geordnete Menge Γ, welche der Klassentypus von G heißt. Zu jeder geordneten Menge Γ existieren geordnete Abelsche Gruppen G mit dem Klassentypus Γ, nämlich Systeme von Vektoren mit weniger als $\aleph$ nichtverschwindenden Komponenten eines Γ-dimensionalen reellen Raumes, womit folgendes gemeint ist: wir bilden alle absteigend wohlgeordneten Teilmengen einer Mächtigkeit $< \aleph$ von Γ und belegen die Elemente dieser Mengen auf verschiedene Weisen mit reellen Zahlen; dabei nennen wir absteigend wohlgeordnet eine Menge N, von der jede Teilmenge, N inbegriffen, ein Element höchsten Ranges besitzt. Es ist klar, wie Gleichheit, Anordnung und Addition für die Belegungen der absteigend wohlgeordneten Teilmengen von Γ mit Mengen reeller Zahlen zu definieren sind. Ein Beispiel einer geordneten Abelschen Gruppe liefert ein System von Vektoren der geschilderten Art dann, wenn es gegenüber der Addition abgeschlossen ist. Umgekehrt beweist Hahn, dass zu jeder geordneten Abelschen Gruppe ein $\aleph$ und eine geordnete Menge Γ existiert, so dass G isomorph ist mit einem System von Vektoren mit weniger als $\aleph$ nichtverschwindenden Komponenten eines Γ-dimensionalen Raumes. Archimedisch heißt G, wenn Γ nur ein Element enthält, vollständig wird G genannt, wenn jede geordnete Gruppe, die umfassender ist als G, Klassen enthält, die in G nicht auftreten. Ist Γ selbst eine geordnete Abelsche Gruppe, so kann in G eine Multiplikation definiert werden, derzufolge G ein geordneter Körper ist.

Mit Hahn ist nicht nur ein erfolgreicher Forscher und ein vortrefflicher Lehrer dahingegangen — aus der großen Zahl derer. die sich dankbar als seine Schüler bezeichnen, darf ich wohl K. Gödel, W. Hurewicz und mich selbst nennen — sondern auch ein gültiger und stets für seine Überzeugung eintretender Mensch. Insbesondere hat sich Hahn jederzeit für internationale wissenschaftliche Zusammenarbeit eingesetzt. Dem Kreise der Herausgeber und Mitarbeiter der *Fundamenta* und ihrer, seiner eigenen in vielen Punkten verwandten Arbeitsrichtung brachte er stets besondere Sympathien entgegen.