(En effet, le point essentiel de la démonstration de M. Lusin consiste en la conclusion suivante (l. c., p. 137): l'ensemble $\prod_{n=1}^{\infty} P\cdot E_{\gamma_n}$ étant, d'après Baire, l'ensemble caractéristique d'une fonction de classe 3, il n'est pas un $G_{\delta\sigma}$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse de M. Lusin que $\prod_{n=1}^{\infty} P\cdot E_{\gamma_n} = P\cdot E_\beta$, où P est parfait et E_β un F_σ. Or, il est évident qu'on aboutit également à une contradiction en admettant seulement que les ensembles $\prod_{\xi<\alpha} E_\xi$ sont tous des $G_{\delta\sigma}$).

Or, le théorème II peut être regardé comme une généralisation du théorème de M. Zalcwasser[1]) d'après lequel toute suite transfinie descendante d'ensembles qui sont à la fois F_σ et G_δ est stationnaire.

En effet, si $\{E_\xi\}_{\xi<\Omega}$ est une suite transfinie descendente d'ensembles qui sont à la fois F_σ et G_δ, l'ensemble $\prod_{\xi<\alpha} E_\xi$ est, pour tout nombre ordinal $\alpha<\Omega$, un G_δ, donc, à plus forte raison, un $G_{\delta\sigma}$, et, d'après le théoreme II, la suite $\{E_\xi\}_{\xi<\Omega}$ est stationnaire.

[1]) *Fund. Math.* t. III, p. 44. Cf. aussi C. Kuratowski, *Topologie* (Monografje Matematyczne t. III, Warszawa 1933). p. 113.

Un théorème sur les groupes de Betti des ensembles localement connexes en toutes les dimensions $\leqslant n$ [1]).

Par

Karol Borsuk (Warszawa).

1. M. C. Kuratowski a démontré[2]) qu'un ensemble[3]) compact A localement connexe en toutes les dimensions $\leqslant n$ est un rétracte d'un certain entourage dans tout espace métrisable $M\supset A$ remplissant la condition: $\dim(M-A)\leqslant n+1$. En me basant sur ce résultat de M. Kuratowski, je me propose de démontrer dans cette Note le théorème suivant:

Théorème. *Tous les groupes de Betti des dimensions $\leqslant n$ d'un ensemble compact et localement connexe en toutes les dimensions $\leqslant n$ sont des images homomorphes des groupes correspondants d'un certain polytope n-dimensionnel.*

2. Termes et notations. Le complexe algébrique[4]) Q est dit un *ε-complexe de l'ensemble A*, lorsque tous ses sommets appartiennent à A et la distance maximale

[1]) Quant à la définition des ensembles localement connexes en dimension n, voir la Note *„Sur les espaces localement connexes et péaniens en dimension n"* de M. C. Kuratowski, ce volume, p. 269.

[2]) l. c. p. 273.

[3]) J'entends dans cette Note par *ensemble* toujours un sous-ensemble fermé E de l'espace R_∞ de Hilbert. Par distance de deux points a et b de E je comprends leur distance dans l'espace R_∞, en la désignant par $|a-b|$.

[4]) Quant à la définition des notions fondamentales de la topologie algébrique, comme complexe algébrique et sa frontière, cycle, homologie etc. voir p. ex. P. Alexandroff, *Einfachste Grundbegriffe der Topologie*, Berlin 1932, Springer. Il est à remarquer que les coefficients des complexes algébriques considérés dans cette Note sont des éléments d'un groupe abelien $\mathfrak{A}$ arbitraire, mais supposé

entre deux sommets d'un simplexe de Q est inférieure à ε. Si en outre, pour tout simplexe (orienté) Δ de Q (qui se présente dans Q avec un coefficient $\neq 0$) le simplexe géométrique $|\Delta|$ [5]) est contenu dans A, nous dirons que Q est un *ε-complexe algébrique situé dans A*. Le polytope-somme de tous les simplexes géométriques $|\Delta|$ en question sera désigné par $|Q|$. Deux ε-complexes Q_1 et Q_2 de A sont dits *η-homologues dans A*, lorsqu'il existe un η-complexe K de A dont la frontière est égale à $Q_1 - Q_2$.

Soit Q un ε-complexe d'un ensemble A' et f une fonction qui fait correspondre à tout sommet a de Q un point $f(a)$ de A et qui remplit la condition $|a-f(a)|<\eta$. En faisant correspondre à chaque simplexe orienté $\Delta=(a_0 a_1 \ldots a_m)$ de Q le simplexe orienté $\Delta_f=(f(a_0) f(a_1) \ldots f(a_m))$, on parvient de Q à un $(\varepsilon+2\eta)$-complexe de A de la même dimension. Nous désignons ce complexe transformé par Q_f. Il est bien connu [6]) que la frontière $\dot{Q}$ de Q est transformée par f en frontière $(\dot{Q_f})$ de Q_f et que, dans le cas $\dot{Q}=0$, les cycles Q et Q_f sont $(\varepsilon+2\eta)$-homologues dans $A+A'$.

Si la suite $\mathfrak{C}=\{C_k\}$ de cycles m-dimensionnels (homogènes) de A remplit les conditions:

1° Il existe une suite $\{\varepsilon_k\}$ de nombres positifs convergente vers 0 et telle que C_k est un ε_k-cycle de A (resp. situé dans A),

2° Il existe pour tout k un ε_k-complexe Q_k de A (resp. situé dans A) dont la frontière est égale à $C_{k+1}-C_k$,

nous appelons $\mathfrak{C}$ un *V-cycle* [7]) *à m dimensions de A* (resp. *situé dans A*). Nous disons en outre que $\{\varepsilon_k\}$ est une *suite majorante pour la décroissance de* $\mathfrak{C}$. Les deux V-cycles $\mathfrak{C}=\{C_k\}$ et $\mathfrak{C}'=\{C_k'\}$ de A sont dits *homologues dans A* (notation: $\mathfrak{C}\sim\mathfrak{C}'$ dans A), lorsqu'il existe une suite $\{K_k\}$ où K_k est un δ_k-complexe de A avec $\lim\limits_{k\to\infty}\delta_k=0$ et la frontière de K_k est égale à $C_k - C_k'$.

Les V-cycles m-dimensionnels de A forment un groupe abelien $G_m(A)$, si on définit l'addition comme il suit: $\{C_k\}+\{C_k'\}=\{C_k+C_k'\}$. Le groupe $G_m(A)$ contient le sous-groupe $H_m(A)$ des V-cycles m-dimensionnels de A homologues dans A à 0, c. à d. à un V-cycle $\{C_k\}$, où C_k est pour tout $k=1,2,\ldots$ un cycle m-dimensionnel dont tous les coefficients disparaissent. Le groupe-quotient $B_m(A)$ de $G_m(A)$ par rapport à $H_m(A)$ s'appelle le *groupe m-dimensionnel de Betti de A*.

---

constant dans toutes nos considérations. Pour éviter enfin la situation exceptionnelle dans le cas de dimension 0, nous entendons par un cycle 0-dimensionnel un complexe de dimension 0 dont la somme des coefficients est égale à zéro (dans le sens adopté dans le groupe $\mathfrak{A}$).

[5]) c. à d. le plus petit parmi tous les ensembles convexes contenant tous les sommets de Δ.

[6]) Voir p. ex. S. Lefschetz, *Topology*, New. York 1930, p. 77—79.

[7]) Les V-cycles (sous le nom des „Fundamentalfolgen") sont introduits dans la Topologie par M. L. Vietoris, Math. Ann. 97, 1927, p. 454—472. La plupart des autres notions combinatoires concernant les ensembles compacts quelconques que nous considérons dans la suite est dû aussi à cet Auteur. Comp. aussi S. Lefschetz, Annals of Math. (2) 29, 1928, p. 232—254.

Soit f une fonction continue transformant un ensemble compact A' en un ensemble compact A et soit $\mathfrak{C}=\{C_k\}$ un V-cycle de A'. Il est connu [8]) que les cycles C_{kf} forment un V-cycle $\mathfrak{C}_f=\{C_{kf}\}$ de A et que l'homologie $\mathfrak{C}\sim\mathfrak{C}'$ dans A' entraîne l'homologie $\mathfrak{C}_f\sim\mathfrak{C}_f'$ dans A. Il en résulte que f établit une transformation homomorphe des groupes $G_m(A')$, $H_m(A')$ et $B_m(A')$ respectivement en sous-groupes des groupes $G_m(A)$, $H_m(A)$ et $B_m(A)$.

3. Lemme. *Pour tout V-cycle $\mathfrak{C}=\{C_k\}$ d'un ensemble compact A il existe un V-cycle $\overline{\mathfrak{C}}=\{\overline{C}_k\}$ de A homologue à $\mathfrak{C}$ dans A et ayant comme suite majorante pour sa décroissance la suite arbitrairement donnée $\{\bar{\varepsilon}_k\}$ de nombres positifs avec $\lim\bar{\varepsilon}_k=0$.*

Démonstration. Soit $\{\varepsilon_k\}$ une suite majorante pour la décroissance de $\mathfrak{C}$. Il existe donc, pour tout $k=1,2,\ldots$, un ε_k-complexe Q_k de A dont la frontière $\dot{Q}_k$ est égale à $C_{k+1}-C_k$. L'égalité $\lim\varepsilon_k=0$ entraîne qu'il existe une suite croissante $\{n_k\}$ d'indices remplissant la condition:

$$(1) \qquad \varepsilon_l \leqslant \bar{\varepsilon}_k \quad \textit{pour tout} \quad l \geqslant n_k, \qquad k=1,2,\ldots$$

Posons: $\overline{C}_k = C_{n_k}$; $\overline{Q}_k=\sum\limits_{l=n_k}^{n_{k+1}-1} Q_l$; $K_k=\sum\limits_{l=k}^{n_k-1} Q_l$. Le complexe $\overline{Q}_k$ étant en vertu de (1) un $\bar{\varepsilon}_k$-complexe de A et sa frontière étant égale à $\sum\limits_{l=n_k}^{n_{k+1}-1}(C_{l+1}-C_l)=C_{n_{k+1}}-C_{n_k}$, il ne reste qu'à prouver l'homologie $\mathfrak{C}\sim\overline{\mathfrak{C}}$ dans A. En posant $\delta_k=\operatorname{Max}(\varepsilon_k,\varepsilon_{k+1},\ldots,\varepsilon_{n_k-1})$, on voit que $\lim\limits_{k\to\infty}\delta_k=0$ et que K_k est un δ_k-complexe de A ayant pour sa frontière le cycle $C_{n_k}-C_k=\overline{C}_k-C_k$, c. q. f. d.

4. Lemme. *Il existe pour chaque V-cycle $\mathfrak{C}=\{C_k\}$ situé dans un ensemble compact A_0 un V-cycle $\overline{\mathfrak{C}}$ situé dans le polytope $|C_1|$ et homologue à $\mathfrak{C}$ dans A_0.*

Démonstration. Soit Q un ε-complexe situé dans A_0 et $\Delta=(a_0 a_1 \ldots a_m)$ un de ses simplexes orientés. Nous faisons correspondre à toute permutation $i_0, i_1, \ldots, i_m$ de nombres $0,1,\ldots,m$ le simplexe $\pm(b_{i_0} b_{i_0 i_1} \ldots b_{i_0 i_1 \ldots i_m})$, où $b_{i_0 i_1 \ldots i_j}$ désigne le centre de gravité des points $a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_j}$ et le signe „$+$" correspondant aux permutations $i_0, i_1, \ldots, i_m$ paires et le signe „$-$" aux permutations im-

[8]) Voir p. ex. Fund. Math. 21 (1933), p. 92—93.

paires Le simplexe géométrique $|\varDelta|$ étant par hypothèse contenu dans A_0, le complexe $\varDelta' = \Sigma \pm (b_{i_0}\, b_{i_0 i_1} \dots b_{i_0 i_1 \dots i_m})$, où la sommation est étendue sur toutes les permutations $i_0, i_1, \dots, i_m$ des nombres $0, 1, \dots, m$, est un complexe situé dans A_0. En remplaçant dans Q chacun de ses simplexes $\varDelta$ par le complexe $\varDelta'$ ainsi défini, on parvient à un complexe Q' (nommé décomposition barycentrique de Q) remplissant la condition $|Q| = |Q'| \subset A_0$. Comme on sait [9]), la frontière de Q' est la décomposition barycentrique de la frontière de Q et, dans le cas où Q est un cycle, il existe un complexe ayant pour sa frontière $Q - Q'$ et tel que chacun de ses simplexes est situé dans un certain $|\varDelta|$, où $\varDelta$ est un simplexe de Q. Le cycle Q est alors ε-homologue à Q' dans A_0. En tenant compte ensuite du fait [10]) que la décomposition barycentrique d'un ε-complexe Q à m dimensions est un $\left(\frac{m}{m+1}\varepsilon\right)$-complexe de la même dimension, on conclut qu'on peut toujours parvenir par l'opération de la décomposition barycentrique itérée à un complexe dont tous les simplexes sont si petits qu'on le veut. Si $\{\varepsilon_k\}$ est alors une suite majorante pour la décroissance de $\mathfrak{C}$ et $\{Q_k\}$ la suite remplissant la condition:

$$(2)\quad \begin{cases} Q_k \textit{ est un } \varepsilon_k\textit{-complexe situé dans } A_0 \textit{ et dont la frontière} \\ \textit{est égale à } C_{k+1} - C_k, \end{cases}$$

il existe une suite croissante $\{n_k\}$ de nombres naturels tels que l'opération de la décomposition barycentrique n_k fois itérée nous conduit du complexe $R_k = \sum_{l=1}^{k-1} Q_l$, ayant pour frontière $C_k - C_1$ à un ε_k-complexe $\overline{R}_k$ dont la frontière est de la forme $C_k' - \overline{C}_k$, où C_k' (resp. $\overline{C}_k$) désigne le ε_k-cycle obtenu de C_k (resp. de C_1) par l'opération en question. La suite $\{n_k\}$ étant croissante, on voit qu'on peut parvenir du cycle $\overline{C}_k$ au cycle $\overline{C}_{k+1}$ par la décomposition barycentrique $(n_{k+1} - n_k)$ fois itérée. Il en résulte que $\{\overline{C}_k\}$ est un V-cycle situé dans le polytope $|C_1|$. Le cycle $C_k' - \overline{C}_k$ étant la frontière du ε_k-complexe $\overline{R}_k$ situé dans A_0 et C_k' étant ε_k-homologue dans $|C_k|$ à C_k, il en résulte que le V-cycle $\overline{\mathfrak{C}} = \{\overline{C}_k\}$ est homologue dans A_0 à V-cycle $\mathfrak{C} = \{C_k\}$, c. q. f. d.

[9]) Voir p. ex. S. Lefschetz, l. c. p. 87 et 88.
[10]) Voir H. Seifert et W. Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*, Leipzig et Berlin, 1934, p. 49.

5. Démonstration du théorème. L'ensemble A étant compact, on peut trouver une suite $\{E_k\}$ remplissant les conditions:

$$(3)\quad E_k \textit{ est un sous-ensemble fini de } A,$$

$$(4)\quad E_k \subset E_{k+1},$$

$$(5)\quad \operatorname{dist}(A, E_k) \leqslant \frac{1}{3^{k+1}}$$ [11]).

Soit M_k (resp. N_k) le polytope-somme de tous les simplexes géométriques de dimensions $\leqslant n$ (resp. de dimensions $\leqslant n+1$) dont les sommets appartiennent à E_k et les diamètres sont $\leqslant \frac{1}{3^{k-2}}$. On conclut de (5) que la somme $A' = A + \sum_{k=1}^{\infty} N_k$ est un ensemble compact et que chaque entourage de A contient tous les N_k à partir d'un k suffisamment grand. En faisant l'usage de l'hypothèse de connexité locale de A en toutes les dimensions $\leqslant n$ et de l'inégalité $\dim\left(\sum_{k=1}^{\infty} N_k\right) \leqslant n+1$, on conclut [3]) qu'il existe un indice k_0 de sorte que A est un rétracte de l'ensemble

$$A_0 = A + \sum_{k=k_0}^{\infty} N_k.$$

Nous prouverons que le polytope M_{k_0} satisfait à la thèse de notre théorème. En tenant compte du fait que la fonction f rétractante A_0 en A établit une transformation homomorphe du groupe $B_m(M_{k_0})$ en un sous-groupe du groupe $B_m(A)$, il ne reste qu'à démontrer qu'il existe pour chaque V-cycle $\mathfrak{C}_0$ de A de dimension $\leqslant n$ un V-cycle $\overline{\mathfrak{C}}$ de M_{k_0} de la même dimension remplissant la condition: $\overline{\mathfrak{C}}_f \sim \mathfrak{C}_0$ dans A.

En vertu du lemme 3., il existe dans A un V-cycle $\mathfrak{C} = \{C_k\}$ de A homologue à $\mathfrak{C}_0$ dans A et ayant comme suite majorante pour sa décroissance la suite $\left\{\frac{1}{3^{k_0+k}}\right\}$. En tenant compte de l'inégalité (5), nous pouvons faire correspondre à tout sommet a de C_k un point $\varphi_k(a) \in E_{k_0+k-1}$ tel que

$$(6)\quad |a - \varphi_k(a)| \leqslant \frac{1}{3^{k_0+k}}.$$

[11]) Par $\operatorname{dist}(A, B)$ je désigne, en suivant M. C. Kuratowski, la distance des ensembles compacts A et B, au sens de M. F. Hausdorff.

C_k étant un $\frac{1}{3^{k_0+k}}$-cycle, il en résulte [12]) qu'il existe un $\frac{1}{3^{k_0+k-1}}$-complexe D_k de A dont la frontière est égale à $C_k - C_{k\varphi_k}$. En posant $Q'_k = D_k + Q_k - D_{k+1}$, où Q_k est un $\frac{1}{3^{k_0+k}}$-complexe de A dont la frontière est $C_{k+1} - C_k$, on obtient un $\frac{1}{3^{k_0+k-1}}$-complexe de A ayant pour la frontière le cycle: $C_k - C_{k\varphi_k} + C_{k+1} - C_k - C_{k+1} + C_{(k+1)\varphi_{k+1}} = C_{(k+1)\varphi_{k+1}} - C_{k\varphi_k}$. La suite $\mathfrak{C}' = \{C_{k\varphi_k}\}$ est alors un V-cycle de A homologue à $\mathfrak{C}$ dans A et ayant comme suite majorante pour sa décroissance la suite $\left\{\frac{1}{3^{k_0+k-1}}\right\}$. De plus, $\mathfrak{C}'$ est un V-cycle *situé dans* A_0. En effet, faisons correspondre à chaque sommet a de Q'_k un point $\psi_k(a)$ de E_{k_0+k} remplissant la condition: $|a - \psi_k(a)| = \varrho((a), E_{k_0+k})$ [13]). En tenant compte du fait que tous les sommets des cycles $C_{k\varphi_k}$ et $C_{(k+1)\varphi_{k+1}}$ appartiennent à E_{k_0+k} et de l'inégalité (5), on conclut que la fonction ψ_k fait correspondre au $\frac{1}{3^{k_0+k-1}}$-complexe Q'_k de A le $\left(\frac{2}{3^{k_0+k+1}} + \frac{1}{3^{k_0+k-1}}\right)$-complexe Q''_k de E_{k_0+k} ayant la même frontière $C_{(k+1)\omega_{k+1}} - C_{k\varphi_k}$. Ceci implique, en vertu de l'inégalité

$$\frac{2}{3^{k_0+k+1}} + \frac{1}{3^{k_0+k-1}} < \frac{1}{3^{k_0+k-2}}$$

et de la définition du polytope N_{k_0+k}, que $|Q''_k|$ est situé dans N_{k_0+k}. Cela veut dire que $\mathfrak{C}'$ est un V-cycle situé dans A_0. Il en résulte, d'après 4., qu'il existe un V-cycle $\overline{\mathfrak{C}}$ situé dans $|C_{1\varphi_1}|$ et homologue dans A_0 à $\mathfrak{C}'$, et parsuite aussi à $\mathfrak{C}$ et à $\mathfrak{C}_0$. Par conséquent les V-cycles $\overline{\mathfrak{C}}_f$ et $\mathfrak{C}_{0f} = \mathfrak{C}_0$ sont homologues dans A. Mais $C_{1\varphi_1}$ est, conformément à sa définition, un $\frac{1}{3^{k_0}}$-cycle de A de dimension $\leqslant n$ dont tous les sommets appartient à E_{k_0}. En tenant compte de la définition de M_{k_0}, il en résulte l'inclusion $|C_{1\varphi_1}| \subset M_{k_0}$; cela veut dire que le V-cycle $\overline{\mathfrak{C}}$ est situé dans M_{k_0}.

La démonstration de notre théorème est ainsi terminée.

[12]) Voir L. **Vietoris**, Math. Ann. 97 (1927), p. 461.

[13]) Par $\varrho(A, B)$ je désigne, en suivant M. C. **Kuratowski**, l'*écart* des ensembles A et B, c. à d. la borne inférieure des distances $|x - y|$ pour x parcourant A et y parcourant B.

Hans Hahn †

Von

Karl Menger (Wien).

Mit Hans **Hahn**, der am 24. VII. 1934 unerwartet in seinem 55. Lebensjahre starb *), ist der Mathematik ein in vielen Richtungen erfolgreicher Forscher entrissen worden. Seine Jugendarbeiten enthalten bedeutsame Beiträge zur Variationsrechnung; eine andere Arbeit bezieht sich auf Funktionen zweier komplexer Veränderlicher; weiters hat er in zahlreichen Abhandlungen die Theorie der Reihen- und Integraldarstellungen bereichert und eine besonders bemerkenswerte und schöne Anwendung dieser Methoden auf das Interpolationsproblem gegeben (Math. Zeitschr. 1); wichtig sind seine Beiträge zum allgemeinen Funktionalkalkül; in der Elementargeometrie führte er den ersten auf Verknüpfungs- und Anordnungsaxiomen beruhenden lückenlosen Beweis des Jordan'schen Satzes für Polygone (Monatshefte f. Math. u. Phys. 19). Schon in allen den erwähnten Arbeiten (vgl. meinen Nachruf auf **Hahn** in den Ergebnissen eines math. Kolloquiums 6) zeigt sich **Hahn** als scharfer Logiker mit außerordentlich klarer Darstellungsgabe, Eigenschaften, welche auch seinen Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen aus dem Jahre 1911 trotz der inzwischen erfolgten Fortschritte heute noch lesenswert machen.

Was aber die Redaktion der *Fundamenta Mathematicae* zweifellos besonders zum Wunsche veranlaßt hat, an dieser Stelle eine Würdigung des Verstorbenen erscheinen zu lassen, ist der Umstand.

*) 1879 in Wien geboren, studierte **Hahn** in seiner Vaterstadt, in Strassburg, München und Göttingen, habilitierte sich 1905 in Wien, war 1909—16 Professor in Czernowitz, dann bis 1921 in Bonn und seither an der Universität Wien.