Ceci étant, soit $\mathfrak{A}$ l'ensemble de fonctions continues qui ne possèdent pas la propriété (P'). On a alors $\mathfrak{A}=\sum_{n,k}\mathfrak{A}_{n,k}$, où $\mathfrak{A}_{n,k}$ désigne l'ensemble de fonctions continues $\Psi(x)$ telles que pour tout $p>n$ on a $\left|\frac{\Psi(x+h_p)-\Psi(x)}{h_p}-P_k(x)\right|\geqslant\frac{1}{n}$ sur un ensemble de mesure non moindre que $1/n$. On voit de suite que tout ensemble $\mathfrak{A}_{n,k}$ est fermé dans l'espace $\mathfrak{C}$ et qu'aucune fonction $\Phi(x)$ admettant $P_k(x)$ presque partout pour sa dérivée, n'appartient à $\mathfrak{A}_{n,k}$.

Or, en vertu du lemme (L), il existe pour chaque $\varepsilon>0$, $k>0$ et pour toute fonction $\Psi(x)$ une fonction continue $\Phi(x)$ telle que presque partout $\Phi'(x)=P_k(x)$ et que $|\Phi(x)-\Psi(x)|<\varepsilon$. Il s'en suit que tout ensemble $\mathfrak{A}_{n,k}$ est non-dense et, par conséquent, l'ensemble $\mathfrak{A}$ est de première catégorie.

Remarque sur un théorème de M. Lusin concernant les suites stationnaires.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

M. N. Lusin a démontré récemment[1]) ce

Théorème I: *Si*

$$(1)\qquad E_1\supset E_2\supset\ldots\supset E_\omega\supset E_{\omega+1}\supset\ldots\supset E_\xi\supset E_{\xi+1}\supset\ldots\qquad(\xi<\Omega)$$

est une suite transfinie descendente d'ensembles F_σ, telle que pour tout nombre ordinal $\alpha<\Omega$ de seconde espèce $E_\alpha=\prod_{\xi<\alpha}E_\xi$, la suite (1) *est stationaire* (c. à d. il existe un nombre ordinal $\mu<\Omega$, tel que $E_\xi=E_\mu$ pour $\mu\leqslant\xi<\Omega$).

La démonstration est donnée par M. Lusin pour l'espace linéaire, mais elle est valable, avec des modifications évidentes, pour un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions.

Or, en analysant la démonstration de M. Lusin on apperçoit sans peine qu'il a démontré (pour les espaces euclidiens) un théorème plus général que voici:

Théorème II: *Si*

$$(1)\qquad E_1\supset E_2\supset E_3\supset\ldots\supset E_\omega\supset E_{\omega+1}\supset\ldots\supset E_\xi\supset E_{\xi+1}\supset\ldots\qquad(\xi<\Omega)$$

est une suite transfinie descendente d'ensembles F_σ, telle que pour tout nombre ordinal $\alpha<\Omega$ l'ensemble $\prod_{\xi<\alpha}E_\xi$ est un $G_{\delta\sigma}$, la suite (1) *est stationnaire.*

[1]) *Travaux de l'Institut Phys.-Math. Stekloff* t. V, p. 132 (en russe). Cf. N. Lusin *Sur les suites stationnaires*, Actualités Scientifiques et industrielles (Paris 1934), p. 10.

(En effet, le point essentiel de la démonstration de M. Lusin consiste en la conclusion suivante (l. c., p. 137): l'ensemble $\prod_{n=1}^{\infty} P \cdot E_{\gamma_n}$ étant, d'après Baire, l'ensemble caractéristique d'une fonction de classe 3, il n'est pas un $G_{\delta\sigma}$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse de M. Lusin que $\prod_{n=1}^{\infty} P \cdot E_{\gamma_n} = P \cdot E_\beta$, où P est parfait et E_β un F_σ. Or, il est évident qu'on aboutit également à une contradiction en admettant seulement que les ensembles $\prod_{\xi<\alpha} E_\xi$ sont tous des $G_{\delta\sigma}$).

Or, le théorème II peut être regardé comme une généralisation du théorème de M. Zalcwasser[1]) d'après lequel toute suite transfinie descendante d'ensembles qui sont à la fois F_σ et G_δ est stationnaire.

En effet, si $\{E_\xi\}_{\xi<\Omega}$ est une suite transfinie descendente d'ensembles qui sont à la fois F_σ et G_δ, l'ensemble $\prod_{\xi<\alpha} E_\xi$ est, pour tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$, un G_δ, donc, à plus forte raison, un $G_{\delta\sigma}$, et, d'après le théoreme II, la suite $\{E_\xi\}_{\xi<\Omega}$ est stationnaire.

[1]) *Fund. Math.* t. III, p. 44. Cf. aussi C. Kuratowski, *Topologie* (Monografje Matematyczne t. III, Warszawa 1933). p. 113.

Un théorème sur les groupes de Betti des ensembles localement connexes en toutes les dimensions $\leqslant n$ [1]).

Par

Karol Borsuk (Warszawa).

1. M. C. Kuratowski a démontré[2]) qu'un ensemble[3]) compact A localement connexe en toutes les dimensions $\leqslant n$ est un rétracte d'un certain entourage dans tout espace métrisable $M \supset A$ remplissant la condition: $\dim(M - A) \leqslant n + 1$. En me basant sur ce résultat de M. Kuratowski, je me propose de démontrer dans cette Note le théorème suivant:

Théorème. *Tous les groupes de Betti des dimensions $\leqslant n$ d'un ensemble compact et localement connexe en toutes les dimensions $\leqslant n$ sont des images homomorphes des groupes correspondants d'un certain polytope n-dimensionnel.*

2. **Termes et notations.** Le complexe algébrique[4]) Q est dit un *ε-complexe de l'ensemble A*, lorsque tous ses sommets appartiennent à A et la distance maximale

[1]) Quant à la définition des ensembles localement connexes en dimension n, voir la Note „*Sur les espaces localement connexes et péaniens en dimension n*" de M. C. Kuratowski, ce volume, p. 269.

[2]) l. c. p. 273.

[3]) J'entends dans cette Note par *ensemble* toujours un sous-ensemble fermé E de l'espace R_∞ de Hilbert. Par distance de deux points a et b de E je comprends leur distance dans l'espace R_∞, en la désignant par $|a - b|$.

[4]) Quant à la définition des notions fondamentales de la topologie algébrique, comme complexe algébrique et sa frontière, cycle, homologie etc. voir p. ex. P. Alexandroff, *Einfachste Grundbegriffe der Topologie*, Berlin 1932, Springer. Il est à remarquer que les coefficients des complexes algébriques considérés dans cette Note sont des éléments d'un groupe abelien $\mathfrak{A}$ arbitraire, mais supposé