correspondantes sont $p^{(\mu)}$ et $q^{(\mu)}$, il vient $p \epsilon V_1$, $q \epsilon V_2$ et un certain produit de puissances de ces éléments appartient à P_i, donc aussi à R_i, c. q. f. d.

Par un raisonnement analogue, en utilisant le fait qu'un groupe linéaire compact, connexe et abélien a toujours un générateur, on peut démontrer que dans un groupe général topologique compact, connexe et abélien tout élément, abstraction faite d'un certain ensemble de première catégorie, engendre un sous-groupe partout dense, ou, autrement dit, qu'un tel groupe est monothétique dans le sens de M. van Dantzig [1]).

D'après un théorème de M. A. Markoff [2]) tout groupe topologique abélien localement compact et séparable est le produit direct d'un groupe compact et d'un groupe isomorphe au groupe des translations d'un espace euclidien. Par conséquent, un tel groupe admet toujours un nombre fini de générateurs.

[1]) V. D. van Dantzig, *Homogene Kontinua*. Fund. Math. XV.

[2]) A. Markoff, C. R. 197, p. 610—612.

Sur les nombres dérivés.

Par

J. Marcinkiewicz (Wilno).

1. Le but de cette note est de prouver le théorème suivant:

Etant donnée une suite arbitraire de nombres $\{h_n \neq 0\}$ *tendant vers zéro, il existe une fonction* $\Phi(x)$ *continue dans* $(0, 1)$ *et satisfaisant à la condition suivante.*

(P) *à toute fonction mesurable* $\varphi(x)$ *dans* $(0, 1)$ *il correspond une suite partielle* $\{h_{n_k}\}$ *telle que*

$$\lim_k \frac{\Phi(x+h_{n_k})-\Phi(x)}{h_{n_k}}=\varphi(x)$$

presque partout.

La fonction $\Phi(x)$ est donc, pour ainsi dire, une „primitive universelle" pour toutes les fonctions mesurables.

2. La construction de cette fonction sera basée sur le lemme suivant [1]):

(L) *Etant donnés un* $\varepsilon > 0$ *et deux fonctions continues* $F_1(x)$ *et* $F_2(x)$ *dont* $F_2(x)$ *est presque partout dérivable dans* $(0, 1)$, *il existe toujours une fonction continue et presque partout dérivable* $G(x)$ *telle que* $G'(x) = F_2'(x)$ *presque partout et que* $|F_1(x) - G(x)| < \varepsilon$.

En effet, divisons l'intervalle $(0, 1)$ en un nombre fini d'intervalles n'empiétant pas et tels que l'oscillation de $F_1(x) - F_2(x)$ soit moindre que ε dans chacun d'eux. Soit $H(x)$ une fonction continue et monotone dans chacun de ces intervalles, identique à $F_1(x) - F_2(x)$ aux extrémités de ces intervalles et telle qu'on

[1]) Ce lemme a été déjà employé par M. Lusin pour un but analogue; notamment pour démontrer que pour toute fonction mesurable $f(x)$ il existe une fonction continue $F(x)$ telle que presque partout $F'(x) = f(x)$.

ait presque partout $H'(x)=0$. On a alors $|F_1(x)-F_2(x)-H(x)|<\varepsilon$ et la fonction $G(x)=F_2(x)+H(x)$ jouit évidemment de la propriété demandée.

3. Cela posé nous passons à la démonstration du théorème énoncé au début de cet article. Rangeons en une suite $\{P_n(x)\}$ tous les polynômes à coëfficients rationnels. Il est aisé alors à déterminer une suite de fonctions continues, presque partout dérivables, $\{\Phi_k(x)\}$ et une suite partielle $\{t_k=h_{n_k}\}$ extraite de la suite donnée $\{h_n\}$, de manière qu'on ait:

$$(1)\qquad |\Phi_k(x)-\Phi_{k-1}(x)|\leqslant\frac{t_{k-1}}{k-1},$$

$$(2)\qquad \left|\frac{\Phi_k(x+t_k)-\Phi_k(x)}{t_k}-P_k(x)\right|<\frac{1}{k},$$

excepté au plus sur un ensemble E_k *de mesure* $\leqslant\frac{1}{2^k}$,

$$(3)\qquad t_k<\frac{t_{k-1}}{2}.$$

En effet, en supposant les $k-1$ premiers termes des suites $\{\Phi_j(x)\}$ et $\{t_j\}$ déterminés, on définit aisément par l'application du lemme (L), une fonction continue $\Phi_k(x)$ conformément à la condition (1) et de manière que l'on ait presque partout $\Phi_k'(x)=P_k(x)$. Cette dernière relation permet de définir un nombre t_k de façon que les conditions (2) et (3) soient remplies à leur tour.

En vertu de (1) et (3) la suite $\{\Phi_n(x)\}$ converge vers une limite $\Phi(x)=\lim_n \Phi_n(x)$, continue et satisfaisant pour tout k à l'inégalité

$$|\Phi(x)-\Phi_k(x)|\leqslant\frac{2\,t_k}{k}.$$

Par conséquent, en tenant encore compte de (2), on a

$$(4)\qquad \left|\frac{\Phi(x+t_k)-\Phi(x)}{t_k}-P_k(x)\right|\leqslant\frac{5}{k}\quad \textit{pour tout}\quad x\in CE_k.$$

Soit maintenant $f(x)$ une fonction mesurable quelconque et $\{P_{k_m}(x)\}$ une suite extraite de $\{P_k(x)\}$ telle que $P_{k_m}(x)\to f(x)$ presque partout. On peut admettre évidemment que pour tout m on a $|P_{k_m}(x)-f(x)|<1/m$ à l'exception, au plus, d'un ensemble H_m de mesure moindre que $1/2^m$. Donc, en vertu de (4)

$$\left|\frac{\Phi(x+t_{k_m})-\Phi(x)}{t_{k_m}}-f(x)\right|\leqslant\frac{5}{k_m}+\frac{1}{m}\quad \textit{pour tout}\quad x\in C(E_{k_m}+H_m).$$

et, comme $\sum_m \text{mes}\,(E_{k_m}+H_m)<\infty$, on a presque partout

$$\lim_m\frac{\Phi(x+t_{k_m})-\Phi(x)}{t_{k_m}}=f(x),$$

ce qui achève la démonstration.

4. Une modification du raisonnement précédent permet d'énoncer notre résultat en termes des catégories de Baire dans des espaces abstraits. Soit $\mathfrak{C}$ l'espace des fonctions continues dans (0, 1) avec la norme ordinaire $\|\Phi\|=\max|\Phi(x)|$ pour toute fonction $\Phi\in\mathfrak{C}$. Alors:

Etant donnée une suite $\{h_n\neq 0\}$ *tendant vers* 0, *toute fonction* $\Phi(x)\in\mathfrak{C}$, *excepté un ensemble de fonctions de première catégorie dans* $\mathfrak{C}$, *jouit de la propriété* (P)[1].

Désignons, comme précédemment, par $\{P_k(x)\}$ la suite de polynômes à coefficients rationnels et remarquons tout d'abord que la condition (P) équivaut à la suivante:

(P′) *pour tout couple* n, k *d'entiers positifs il existe un nombre* $p>n$ *tel que*

$$(5)\qquad \left|\frac{\Phi(x+h_p)-\Phi(x)}{h_p}-P_k(x)\right|<\frac{1}{n}$$

pour tout x, *excepté au plus dans un ensemble de mesure moindre que* $1/n$.

En effet, $f(x)$ étant une fonction mesurable et m un entier positif soit k_m une valeur de k tel que $|f(x)-P_{k_m}(x)|<1/2^m$ pour tout x, excepté au plus sur un ensemble de mesure moindre que $1/2^m$. D'autre part, en supposant que $\Phi(x)$ satisfait à (P′), il existe une valeur $p=p_m$ vérifiant (5) pour $n=2^m$ et $k=k_m$. On a, par conséquent, pour tout m

$$\left|\frac{\Phi(x+h_{p_m})-\Phi(x)}{h_{p_m}}-f(x)\right|\leqslant\frac{1}{2^{m-1}}$$

à un ensemble de mesure moindre que $1/2^{m-1}$ près, d'où l'on conclut immédiatement que presque partout

$$\frac{\Phi(x+h_{p_m})-\Phi(x)}{h_{p_m}}\to f(x),$$

c. à d. que $\Phi(x)$ jouit de la propriété (P).

[1]) Ce résultat est dû à S. Maks.

Ceci étant, soit $\mathfrak{A}$ l'ensemble de fonctions continues qui ne possèdent pas la propriété (P'). On a alors $\mathfrak{A} = \sum_{n,k} \mathfrak{A}_{n,k}$, où $\mathfrak{A}_{n,k}$ désigne l'ensemble de fonctions continues $\Psi(x)$ telles que pour tout $p > n$ on a $\left|\frac{\Psi(x+h_p)-\Psi(x)}{h_p} - P_k(x)\right| \geqslant \frac{1}{n}$ sur un ensemble de mesure non moindre que $1/n$. On voit de suite que tout ensemble $\mathfrak{A}_{n,k}$ est fermé dans l'espace $\mathfrak{C}$ et qu'aucune fonction $\Phi(x)$ admettant $P_k(x)$ presque partout pour sa dérivée, n'appartient à $\mathfrak{A}_{n,k}$.

Or, en vertu du lemme (L), il existe pour chaque $\varepsilon > 0$, $k > 0$ et pour toute fonction $\Psi(x)$ une fonction continue $\Phi(x)$ telle que presque partout $\Phi'(x) = P_k(x)$ et que $|\Phi(x) - \Psi(x)| < \varepsilon$. Il s'en suit que tout ensemble $\mathfrak{A}_{n,k}$ est non-dense et, par conséquent, l'ensemble $\mathfrak{A}$ est de première catégorie.

Remarque sur un théorème de M. Lusin concernant les suites stationnaires.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

M. N. Lusin a démontré récemment [1]) ce

Théorème I: *Si*

$$(1) \qquad E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_\omega \supset E_{\omega+1} \supset \ldots \supset E_\xi \supset E_{\xi+1} \supset \ldots \qquad (\xi < \Omega)$$

est une suite transfinie descendente d'ensembles F_σ, *telle que pour tout nombre ordinal* $\alpha < \Omega$ *de seconde espèce* $E_\alpha = \prod_{\xi<\alpha} E_\xi$, *la suite* (1) *est stationaire* (c. à d. il existe un nombre ordinal $\mu < \Omega$, tel que $E_\xi = E_\mu$ pour $\mu \leqslant \xi < \Omega$).

La démonstration est donnée par M. Lusin pour l'espace linéaire, mais elle est valable, avec des modifications évidentes, pour un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions.

Or, en analysant la démonstration de M. Lusin on apperçoit sans peine qu'il a démontré (pour les espaces euclidiens) un théorème plus général que voici:

Théorème II: *Si*

$$(1) \qquad E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots \supset E_\omega \supset E_{\omega+1} \supset \ldots \supset E_\xi \supset E_{\xi+1} \supset \ldots \qquad (\xi < \Omega)$$

est une suite transfinie descendente d'ensembles F_σ, *telle que pour tout nombre ordinal* $\alpha < \Omega$ *l'ensemble* $\prod_{\xi<\alpha} E_\xi$ *est un* $G_{\delta\sigma}$, *la suite* (1) *est stationnaire.*

[1]) *Travaux de l'Institut Phys.-Math. Stekloff* t. V, p. 132 (en russe). Cf. N. Lusin *Sur les suites stationnaires*, Actualités Scientifiques et industrielles (Paris 1934), p. 10.