Sur le nombre des générateurs d'un groupe topologique compact et connexe.

Par

J. Schreier et S. Ulam (Lwów).

Dans un travail récent [1]) nous avons posé le problème de trouver, dans un groupe topologique donné G, un nombre fini d'éléments tels que le groupe (dénombrable) engendré par ces éléments soit partout dense dans G. Nous y avons déterminé de tels systèmes d'éléments pour quelques groupes importants à une infinité de dimensions.

M. Auerbach [2]) a démontré que dans un groupe linéaire [3]) compact (clos) et connexe, il existe toujours deux éléments jouissant de la propriété mentionnée. Il a démontré en plus que l'ensemble des couples de tels éléments, considéré dans l'espace de tous les couples, a la mesure 1.

Dans cette Note nous nous proposons de démontrer le théorème suivant:

Soient G un groupe topologique compact, connexe et satisfaisant à la deuxième condition de séparabilité de M. Hausdorff (un tel groupe est toujours métrisable [4]), on peut donc supposer qu'il s'agit d'un groupe métrique compact) *et G^2 l'ensemble des couples d'éléments de G.*

[1]) J. Schreier und S. Ulam, *Über topologische Abbildungen euklidischer Sphären*. Fund. Math. XXIII, p. 102—118.

[2]) H. Auerbach, *Sur les groupes linéaires bornés* (III). Studia Math. V. p. 43—49.

[3]) C. à d. un groupe de transformations linéaires d'un espace euclidien.

[4]) V. par ex. D. van Dantzig, *Zur topologischen Algebra*. Math. Ann. 107.

Abstraction faite d'un certain ensemble de première catégorie dans G^2 tout couple d'éléments de G engendre un sous-groupe partout dense dans G.

Dans la démonstration, le théorème de M. Auerbach et la représentation des groupes compacts de M. von Neumann joueront un rôle essentiel.

Soit R_i la suite des voisinages ouverts remplissant la condition de Hausdorff. Considérons dans l'ensemble G^2 l'ensemble Z_i des couples tels que le groupe engendré par chacun d'eux contient des éléments de R_i. Il est aisé de voir que Z_i est ouvert dans G^2.

L'ensemble $Z = \prod_i Z_i$, c. à d. la partie commune des ensembles Z_i, se compose de couples d'éléments (g_1, g_2) qui jouissent de la propriété suivante: le groupe engendré par g_1 et g_2 a des éléments communs avec tout R_i, ou, autrement dit, est partout dense dans G.

Il s'agit donc de prouver que l'ensemble $G^2 - Z$ est de première catégorie. Les ensembles Z_i étant ouverts, il suffit de prouver que tout ensemble Z_i est partout dense. En effet, il en résulte que les ensembles $G^2 - Z_i$ sont non denses et $G^2 - Z = \sum_i (G^2 - Z_i)$ de première catégorie.

Nous renvoyons, à présent, le lecteur au travail important de M. J. von Neumann [1]), où il est prouvé qu'un groupe compact peut être représenté par un groupe isomorphe de matrices infinies.

Soit $\mathfrak{G}^{(\infty)}$ une telle représentation du groupe G et désignons conformément aux notations de M. J. von Neumann par $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ ses facteur-groupes linéaires, par $B^{(\infty)}$ resp. $B^{(\mu)}$ les matrices éléments de $\mathfrak{G}^{(\infty)}$ resp. $\mathfrak{G}^{(\mu)}$.

Il est aisé de voir que tout voisinage V dans $\mathfrak{G}^{(\infty)}$ contient un ensemble W constitué par tous les éléments de $\mathfrak{G}^{(\infty)}$ tels que les matrices $B^{(\mu)}$ correspondantes forment une sphère $W^{(\mu)}$ dans $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ pour un μ suffisamment grand.

Soient V_1, V_2 deux voisinages dans $\mathfrak{G}^{(\infty)}$ et $W_1 \subset V_1$, $W_2 \subset V_2$, $P_i \subset R_i$ trois ensembles jouissant de la propriété mentionnée pour un certain μ. En vertu du théorème cité de M. Auerbach, il existe deux éléments $p^{(\mu)}$, $q^{(\mu)}$ de $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ qui appartiennent resp. à $W_1^{(\mu)}$ et $W_2^{(\mu)}$ et qui engendrent un sous-groupe partout dense de $\mathfrak{G}^{(\mu)}$. Donc, p et q désignant deux éléments de $\mathfrak{G}^{(\infty)}$ tels que les matrices $B^{(\mu)}$

[1]) J. von Neumann, *Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen*. Annals of Math. 34. Voir p. 177.

correspondantes sont $p^{(\mu)}$ et $q^{(\mu)}$, il vient $p \epsilon V_1$, $q \epsilon V_2$ et un certain produit de puissances de ces éléments appartient à P_i, donc aussi à R_i, c. q. f. d.

Par un raisonnement analogue, en utilisant le fait qu'un groupe linéaire compact, connexe et abélien a toujours un générateur, on peut démontrer que dans un groupe général topologique compact, connexe et abélien tout élément, abstraction faite d'un certain ensemble de première catégorie, engendre un sous-groupe partout dense, ou, autrement dit, qu'un tel groupe est monothétique dans le sens de M. van Dantzig [1]).

D'après un théorème de M. A. Markoff [2]) tout groupe topologique abélien localement compact et séparable est le produit direct d'un groupe compact et d'un groupe isomorphe au groupe des translations d'un espace euclidien. Par conséquent, un tel groupe admet toujours un nombre fini de générateurs.

[1]) V. D. van Dantzig, *Homogene Kontinua*. Fund. Math. XV.
[2]) A. Markoff, C. R. 197, p. 610—612.

Sur les nombres dérivés.

Par

J. Marcinkiewicz (Wilno).

1. Le but de cette note est de prouver le théorème suivant:

Etant donnée une suite arbitraire de nombres $\{h_n \neq 0\}$ tendant vers zéro, il existe une fonction $\Phi(x)$ continue dans $(0, 1)$ et satisfaisant à la condition suivante.

(P) *à toute fonction mesurable $\varphi(x)$ dans $(0, 1)$ il correspond une suite partielle $\{h_{n_k}\}$ telle que*

$$\lim_k \frac{\Phi(x+h_{n_k})-\Phi(x)}{h_{n_k}}=\varphi(x)$$

presque partout.

La fonction $\Phi(x)$ est donc, pour ainsi dire, une „primitive universelle“ pour toutes les fonctions mesurables.

2. La construction de cette fonction sera basée sur le lemme suivant [1]):

(L) *Etant donnés un $\varepsilon > 0$ et deux fonctions continues $F_1(x)$ et $F_2(x)$ dont $F_2(x)$ est presque partout dérivable dans $(0, 1)$, il existe toujours une fonction continue et presque partout dérivable $G(x)$ telle que $G'(x) = F_2'(x)$ presque partout et que $|F_1(x) - G(x)| < \varepsilon$.*

En effet, divisons l'intervalle $(0, 1)$ en un nombre fini d'intervalles n'empiétant pas et tels que l'oscillation de $F_1(x) - F_2(x)$ soit moindre que ε dans chacun d'eux. Soit $H(x)$ une fonction continue et monotone dans chacun de ces intervalles, identique à $F_1(x) - F_2(x)$ aux extrémités de ces intervalles et telle qu'on

[1]) Ce lemme a été déjà employé par M. Lusin pour un but analogue; notamment pour démontrer que pour toute fonction mesurable $f(x)$ il existe une fonction continue $F(x)$ telle que presque partout $F'(x) = f(x)$.