Sur un problème de M. Ruziewicz concernant les superpositions de fonctions jouissant de la propriété de Baire.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

D'après un théorème de M. Ruziewicz toute fonction d'une variable réelle est une superposition de deux fonctions mesurables[1]). Le but de la note présente est d'étudier les problèmes analogues pour la propriété de Baire.

Remarquons d'abord qu'on peut remplacer dans le théorème de M. Ruziewicz la mesurabilité par la propriété de Baire par rapport à la droite. Désignons donc par Φ_0 la famille de toutes les fonctions d'une variable réelle qui jouissent de la propriété de Baire par rapport à la droite (c. à d. qui sont continues quand on néglige un ensemble de 1[re] catégorie). Nous allons démontrer que toute fonction d'une variable réelle est une superposition de deux fonctions de la famille Φ_0.

En effet, toute fonction ponctuellement discontinue appartenant, comme on voit sans peine, à la famille Φ_0, il suffit de démontrer que *toute fonction d'une variable réelle est une superposition de deux fonctions ponctuellement discontinues.*

Posons

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{E}\, n x}{2^n}$$

— c'est, comme on voit sans peine, une fonction croissante (donc

[1]) Cf. *Mathematica* vol. VII (Cluj 1933), p. 89.

ponctuellement discontinue) qui est discontinue pour tout x rationnel: l'ensemble E de toutes les valeurs de $\varphi(x)$ (pour x réels) est donc non dense.

Soit maintenant $f(x)$ une fonction d'une variable réelle donnée quelconque. Définissons la fonction $\psi(y)$ de la variable réelle y comme il suit. Si $y \,\epsilon\, E$, il existe un x réel unique, tel que $\varphi(x) = y$: nous poserons dans ce cas $\psi(y) = f(x)$. Si y non $\epsilon\, E$, nous poserons $\psi(y) = 0$. L'ensemble E étant non dense, on voit sans peine que la fonction ψ est nulle sur un ensemble ouvert partout dense, donc ponctuellement discontinue. Or, on voit sans peine qu'on a $f(x) = \psi(\varphi(x))$ pour tout x réel. La fonction $f(x)$ est donc une superposition de deux fonctions ponctuellement discontinues, c. q. f. d.

Nous considérons maintenant le problème analogue pour les fonctions jouissant de la propriété de Baire („au sens restreint"), c. à d. continues sur tout ensemble parfait quand on néglige un ensemble de 1[re] catégorie par rapport à cet ensemble parfait. Nous prouverons notamment qu'*il existe des fonctions d'une variable réelle qui ne peuvent pas être obtenues par un nombre fini ni par une infinité dénombrable de superpositions de fonctions jouissant de la propriété de Baire.*

C'est à M[lle] Nina Bary qu'on doit la définition des superpositions de classes transfinies[1]). Φ étant une famille donnée de fonctions d'une variable réelle, on peut définir sans utiliser les nombres transfinis la famille $S(\Phi)$ de toutes les fonctions rentrant dans la classification de M[lle] Bary (obtenue à partir de la famille Φ) comme il suit:

$S(\Phi)$ est la plus petite famille F de fonctions qui contient toute fonction de la famille Φ et qui jouit de deux propriétés suivantes:

1°. La superposition de deux fonctions de la famille F appartient encore à F,

2°. Si $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ est une suite infinie de fonctions de la famille F et si

$$f(x) = \lim_{n=\infty} f_n f_{n-1} \ldots f_2 f_1(x),$$

la fonction $f(x)$ appartient encore à la famille F.

[1]) *Matematičeski Sbornik* t. 40 (1933), p. 327—328. Cf. A. Lindenbaum: *Fund. Math.* t. XXIII, p. 16.

Il est manifeste que si $\Phi_1 \subset \Phi_2$, on a $S(\Phi_1) \subset S(\Phi_2)$. Pour démontrer qu'il existe des fonctions d'une variable réelle qui n'appartiennent pas à la famille $S(\Phi_1)$, où Φ_1 est la famille de toutes les fonctions jouissant de la propriété de Baire, il suffit donc démontrer le même pour la famille Φ_2, Φ_2 étant une famille telle que $\Phi_1 \subset \Phi_2$.

Je dis qu'on peut prendre pour Φ_2 la famille de toutes les fonctions $f(x)$ d'une variable réelle jouissant de la propriété Π suivante:

Π. Tout ensemble parfait (non vide) P contient un sous-ensemble parfait (non vide) Q sur lequel la fonction $f(x)$ est continue.

Toute fonction jouissant de la propriété de Baire jouit de la propriété Π: pour le voir il suffit de remarquer qui si P est un ensemble parfait et K un ensemble de 1re catégorie par rapport à P, l'ensemble $P - K$ contient un sous-ensemble parfait.

On a donc $\Phi_1 \subset \Phi_2$. Or, nous prouverons que $S(\Phi_2) = \Phi_2$. A ce but il suffira évidemment de démontrer que la famille $F = \Phi_2$ satisfait aux conditions 1° et 2°.

Soient donc $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ deux fonctions de la famille Φ_2, donc jouissant de la propriété Π, et soit $f(x) = \psi(\varphi(x))$. Soit P un ensemble parfait donné quelconque. La fonction $\varphi(x)$ jouissant de la propriété Π, il existe un ensemble parfait et borné $P_1 \subset P$, tel que la fonction $\varphi(x)$ est continue sur P_1. L'ensemble $\varphi(P_1)$, en tant qu'une image continue d'un ensemble parfait et borné, est fermé. Si l'ensemble $\varphi(P_1)$ n'est pas parfait, il contient un point isolé y_0 et il existe une portion P_2 de P_1 telle que $\varphi(x) = y_0$ pour $x \in P_2$, donc $f(x) = \psi(\varphi(x)) = \psi(y_0)$ pour $x \in P_2$, et la fonction $f(x)$ est continue (comme constante) sur P_2. Si l'ensemble $\varphi(P_1)$ est parfait, alors, la fonction $\psi(x)$ jouissant de la propriété Π, il contient un sous-ensemble parfait Q, tel que la fonction $\psi(x)$ est continue sur Q. La fonction $\varphi(x)$ étant continue sur l'ensemble parfait P_1, il résulte de $Q \subset f(P_1)$ que l'ensemble $\underset{x}{E}[x \in P_1,\ \varphi(x) \in Q]$ est fermé et non dénombrable, donc contient un sous-ensemble parfait P_0. Or, on voit sans peine que la fonction $f(x) = \psi(\varphi(x))$ est continue sur l'ensemble P_0 (puisque $P_0 \subset P_1$ et $\varphi(P_0) \subset Q$). La fonction $f(x)$ jouit donc de la propriété Π et par suite appartient à la famille Φ_2. La famille $F = \Phi_2$ satisfait donc à la condition 1°.

Or, nous prouverons que si $f(x) = \lim\limits_{n=\infty} \varphi_n(x)$, où $\varphi_n(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$

sont des fonctions jouissant de la propriété Π, la fonction $f(x)$ jouit également de cette propriété.

En effet, soit $f(x) = \lim\limits_{n=\infty} \varphi_n(x)$, où $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont des fonctions jouissant de la propriété Π. Soit P un ensemble parfait donné quelconque. La fonction $\varphi_1(x)$ jouissant de la propriété Π, il existe, comme on voit sans peine, deux ensembles parfaits disjoints P_0 et P_1 de diamètre < 1, contenus dans P et tels que la fonction $\varphi_1(x)$ est continue sur P_0 et sur P_1. La fonction $\varphi_2(x)$ jouissant de la propriété Π, il existe deux ensembles parfaits disjoints P_{00} et P_{01} de diamètre $< 1/2$ contenus dans P_0 et deux ensembles parfaits disjoints P_{10} et P_{11} de diamètre $< 1/2$ contenus dans P_1, tels que la fonction $\varphi_2(x)$ est continue sur chacun des ensembles P_{00}, P_{01}, P_{10} et P_{11}. En raisonnant ainsi de suite, on arrive à un système d'ensembles parfaits $\{P_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\}$, où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont des nombres 0 ou 1, tel que pour tout n naturel donné > 1 et tout système $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de nombres 0 ou 1

$$P_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n} \subset P_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}, \quad P_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}0} \cdot P_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}1} = 0$$

que le diamètre de l'ensemble $P_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ est $< 1/n$ et que la fonction $\varphi_n(x)$ est continue sur l'ensemble $P_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$.

Posons, pour n naturels:

$$S_n = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} P_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n},$$

la sommation s'étendant à tous les 2^n systèmes de nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ égaux à 0 ou à 1, et posons

$$Q = \prod_{n=1}^{\infty} S_n$$

— ce sera, comme on voit sans peine, un ensemble parfait $\subset P$.

Or, comme on voit sans peine, la fonction $\varphi_n(x)$ est continue sur l'ensemble S_n, donc aussi sur $Q \subset S_n$. Toutes les fonctions $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont donc continues sur l'ensemble parfait Q.

La fonction $f(x)$ est ainsi sur Q limite de fonctions continues, donc une fonction de 1re classe de Baire sur l'ensemble parfait Q et il existe un sous-ensemble parfait Q_0 de Q sur lequel $f(x)$ est continue. Or, on a $Q \subset P$, donc $Q_0 \subset P$. L'ensemble parfait P pouvant être quelconque, on voit que la fonction $f(x)$ jouit de la propriété Π, c. q. f. d.

Soit maintenant $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ une suite infinie de fonctions de la famille Φ_2 et soit

$$(1) \qquad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n f_{n-1} \dots f_2 f_1(x).$$

Posons, pour $n = 1, 2, 3, \dots$

$$(2) \qquad \varphi_n(x) = f_n f_{n-1} \dots f_2 f_1(x).$$

La famille $F = \Phi_2$ satisfaisant à la condition 1°, les fonctions $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ appartiennent à Φ_2, donc jouissent de la propriété Π, et il en résulte, (d'après (2)), comme nous venons de démontrer, que la fonction (1) jouit de la propriété Π et par suite appartient à Φ_2. La famille $F = \Phi_2$ satisfait donc à la condition 2°.

La formule $S(\Phi_2) = \Phi_2$ est ainsi démontrée. Or, d'après $\Phi_1 \subset \Phi_2$, on a $S(\Phi_1) \subset S(\Phi_2)$: on a donc $S(\Phi_1) \subset \Phi_2$, c'est-à-dire *toute fonction obtenue par un nombre fini ou une infinité dénombrable de superpositions de fonctions jouissant de la propriété de Baire jouit de la propriété Π.*

Pour démontrer qu'il existe une fonction d'une variable réelle qui n'appartient pas à la famille $S(\Phi_1)$ il suffit donc de démontrer qu'il existe des fonctions $f(x)$ qui ne jouissent pas de la propriété Π.

Or, telle est p. e. toute fonction discontinue sur tout ensemble parfait, en particulier toute fonction caractéristique d'un ensemble linéaire qui est totalement imparfait ainsi que son complémentaire (et dont l'existence on démontre à l'aide du théorème de M. Zermelo).

Notre assertion est ainsi démontrée.

Remarque. Nous avons démontré que $\Phi_1 \subset \Phi_2$. Or, la question se pose si l'on a $\Phi_1 = \Phi_2$ ou non. Nous ne savons pas résoudre cette question (négativement) qu'en admettant l'hypothèse du continu. En admettant que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ j'ai démontré [1]) qu'une superposition de deux fonctions de la famille Φ_1 peut n'appartenir pas a cette famille, ce qui est incompatible avec l'égalité $\Phi_1 = \Phi_2$ qui donne (d'après $S(\Phi_2) = \Phi_2$) $S(\Phi_1) = S(\Phi_2) = \Phi_2 = \Phi_1$, donc $S(\Phi_1) = \Phi_1$.

[1]) *Fund. Math.* t. XXII, p. 21.

Sur une classe de fonctions de M. Sierpiński et la classe correspondante d'ensembles [1]).

Par

Edward Szpilrajn (Varsovie).

Introduction. M. W. Sierpiński a considéré récemment la classe des fonctions $f(x)$ (réelles d'une variable réelle) qui satisfont à la condition suivante: *pour tout ensemble parfait P (de nombres réels) il existe un ensemble parfait $P_1 \subset P$ tel que la fonction $f|P_1$ est continue* [2]).

La note présente contient une étude détaillée des fonctions qui satisfont à cette condition de M. Sierpiński ainsi que l'étude des ensembles qui satisfont à la condition correspondante (cf. 2·1). Nous dirons que ces fonctions et ensembles jouissent de *la propriété* (s). Nous considérons de même les ensembles dont tous les sous-ensembles possèdent cette propriété. Nous dirons qu'ils jouissent de *la propriété* (s^0).

D'après M. Sierpiński, la propriété de Baire au sens restreint entraîne la propriété (s) et, d'autre part, il résulte de l'hypothèse du continu que le théorème inverse n'est pas vrai [3]). Nous ne savons pas, si l'on peut se passer de l'hypothèse du continu pour obtenir ce dernier résultat. Nous ne savons non plus, si tout ensemble PCA (ou, plus généralement, tout ensemble projectif) jouit de la propriété (s).

Ce qui paraît intéressant, c'est que la propriété (s) est un invariant de diverses opérations: de l'opération (A) (2·5), de l'homéomorphie généralisée (2·6), de la multiplication cartésienne (2·7), de la superposition [4]) (4·5), etc.

[1]) Les résultats principaux de cet ouvrage ont été présentés à la Société Polonaise de Mathématique (section de Varsovie) le 18 mai 1934.

[2]) *Sur un problème de M. Ruziewicz concernant les superpositions de fonctions jouissant de la propriété de Baire*, ce volume, pp. 12—16.

[3]) Sierpiński l. c. et la note présente 5·1 et 5·3.

[4]) Sierpiński l. c.

BUW