Sur les fonctions définies dans les ensembles finis quelconques.

Par

Sophie Piccard (Neuchâtel).

Dans une Note parue dans ce volume [1]) M. W. Sierpiński s'occupait de fonctions définies sur un ensemble infini E quelconque et ne prenant que des valeurs appartenant à E. Dans cette Note je démontrerai deux théorèmes sur les fonctions définies sur un ensembles *fini* E quelconque, dont les valeurs appartiennent à E.

Théorème I. *Soit E un ensemble fini donné quelconque et soit F la famille de toutes les fonctions à valeurs distinctes définies sur E et dont les valeurs appartiennent à E. Alors il existe deux fonctions de la famille F, telles que toute fonction de cette famille est une superposition (finie) de ces deux fonctions.*

Théorème II. *Soit E un ensemble fini donné quelconque et soit Φ la famille de toutes les fonctions (univoques) définies sur E et dont les valeurs appartiennent à E. Alors il existe trois fonctions de la famille Φ, telles que toute fonction de cette famille est une superposition (finie) de ces trois fonctions*

Démonstration du théorème I.

Soit E un ensemble fini formé de n éléments: nous pouvons supposer que $n>2$, puisque le théorème I est évidemment vrai pour $n=1$ et $n=2$. Nous pouvons aussi supposer, sans nuire à la généralité de la démonstration, que les éléments de E sont les nombres $1, 2, 3, \ldots, n$.

[1]) *Fund Math.* t. XXIV, p. 209.

Définissons sur E deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ comme il suit:

$$\varphi(1)=n, \quad \varphi(x)=x-1, \quad \text{pour} \quad 2 \leqslant x \leqslant n,$$

$$\psi(x)=x \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant x \leqslant n-2, \quad \psi(n-1)=n, \quad \psi(n)=n-1.$$

Les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ appartiennent évidemment à la famille F.

Soit maintenant $f(x)$ une fonction donnée quelconque de la famille F. Montrons que la fonction f est une superposition (finie) des fonctions φ et ψ. Procédons, à cet effet, par induction.

Montrons d'abord qu'on peut former par superposition (finie) des fonctions φ et ψ une fonction f_1 de la famille F, telle que $f_1(1)=f(1)$. En effet, on a $\varphi^{n-f(1)+1}(1)=f(1)$ et la fonction $f_1=\varphi^{n-f(1)+1}$ est à valeurs distinctes, puisque la fonction φ l'est.

Soit à présent k un entier donné quelconque, tel que $2 \leqslant k \leqslant n$ et supposons que l'on puisse construire, en superposant les fonctions φ et ψ, une fonction $f_{k-1}(x)$ de la famille F, telle que $f_{k-1}(x)=f(x)$ pour $x=1, 2, \ldots, k-1$. Montrons qu'il est possible, en superposant f_{k-1}, φ et ψ, de construire une fonction f_k de F, telle que $f_k(x)=f(x)$ pour $x=1, 2, \ldots, k$.

La fonction f appartenant à la famille F est à valeurs distinctes. Donc $f(k)$ est différent de $f(1), f(2), \ldots, f(k-1)$. D'autre part f_{k-1} est également à valeurs distinctes, puisque cette fonctions appartient à F. Elle prend donc nécessairement toutes les valeurs entières de 1 à n, et comme $f_{k-1}(x)=f(x)$ pour $x=1, 2, \ldots, k-1$, il doit exister un indice $l \geqslant k$ et $\leqslant n$, tel que $f_{k-1}(l)=f(k)$. Si $l=k$, il suffit de poser $f_k=f_{k-1}$.

Si $l>k$, envisageons la fonction

$$\gamma(x)=\varphi^{n-l}(\psi\varphi)^{l-k}\varphi^k(x).$$

On vérifie que

$$\gamma(x)=x \quad \text{pour} \quad x=1, 2, \ldots, k-1, \; l+1, \ldots, n$$
$$\gamma(k)=l$$
$$\gamma(x)=x-1 \quad \text{pour} \quad x=k+1, \; k+2, \ldots, l.$$

Posons

$$f_k(x)=f_{k-1}\gamma(x).$$

On vérifie sans peine que

$$f_k(x)=f(x) \quad \text{pour} \quad x=1, 2, \ldots, k.$$

Le théorème I est ainsi démontré par l'induction.

Remarque. Comme l'a relevé M. W. Sierpiński, le fait que les deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ suffisent pour donner, par superposition, toutes les fonctions de la famille F, a la raison suivante dans la théorie des substitutions: on peut obtenir toute substitution (de n éléments) en répétant un nombre fini de fois *une* substitution cyclique $(n, 1, 2, \ldots, n-1)$ et *une* transposition $(1, 2, \ldots, n-2, n, n-1)$[1].

Démonstration du théorème II[2].

Envisageons les fonctions φ et ψ du théorème I ainsi que la fonction θ définie comme il suit:

$$(1) \qquad \theta(1) = 2, \quad \theta(x) = x \quad \text{pour} \quad x = 2, 3, \ldots, n.$$

Désignons, pour $i = 1, 2, \ldots, n$, par Φ_i la famille de toutes les fonctions de la famille Φ qui prennent exactement i valeurs distinctes. On a évidemment $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_n$. Les fonctions de la famille $\Phi_n = F$ s'obtiennent, d'après notre théorème I, par superpositions des fonctions φ et ψ. Pour démontrer que toutes les fonctions de la famille Φ sont des superpositions des fonctions φ, ψ et θ, il suffit évidemment de prouver que, pour $i = 2, 3, \ldots, n$, toute fonction de la famille Φ_{i-1} est une superposition des fonctions φ, ψ et θ et des fonctions des familles Φ_i et F.

Soit donc i un entier > 1 et $\leqslant n$ et soit f une fonction donnée quelconque de la famille Φ_{i-1}. On a $i - 1 < n$ et la fonction f prend seulement $i - 1$, donc moins que n valeurs distinctes. Il existe par conséquent deux entiers p et q, tels que $1 \leqslant p \leqslant n$, $1 \leqslant q \leqslant n$, $p \neq q$ et $f(p) = f(q)$, et il existe un entier r, tel que $1 \leqslant r \leqslant n$ et que

$$(2) \qquad f(x) \neq r \quad \text{pour} \quad x = 1, 2, \ldots, n.$$

Définissons maintenant la fonction $g(x)$ comme il suit:

$$(3) \qquad g(p) = r \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) \quad \text{pour} \quad x \neq p, \quad 1 \leqslant x \leqslant n.$$

La fonction $g(x)$ prend évidemment (pour $x = 1, 2, \ldots, n$) toutes les valeurs que prend la fonction $f(x)$ et encore la valeur r: elle prend donc $(i-1)+1 = i$ valeurs distinctes et on a $g \in \Phi_i$.

[1]) Cela résulte sans peine du théorème connu que toute substitution s'obtient en répétant (un nombre fini de fois) des transpositions des éléments voisins.

[2]) Ma démonstration primitive du théorème II était plus longue que celle du texte et c'est M. Eilenberg qui y a apporté des changements permettant de la rendre plus courte.

D'après (2) on a $f(p) \neq r$: il existe donc une fonction $h(x)$ de la famille F (à valeurs distinctes), telle que

$$(4) \qquad h(r) = 1 \quad \text{et} \quad h(f(p)) = 2.$$

Je dis que

$$(5) \qquad f(x) = h^{-1}\theta h g(x) \quad \text{pour} \quad x = 1, 2, \ldots, n.$$

En effet, si $x \neq p$, on a, d'après (3), $g(x) = f(x)$, donc, d'après (2), $g(x) \neq r$, et, la fonction h étant à valeurs distinctes, $hg(x) \neq h(r) = 1$, donc, d'après (1): $\theta h g(x) = h g(x)$, ce qui donne

$$h^{-1}\theta h g(x) = h^{-1} h g(x) = g(x) = f(x).$$

Si $x = p$, on a, d'après (3) et (4): $g(p) = r$ et $hg(p) = h(r) = 1$, donc, d'après (1) et (4):

$$h^{-1}\theta h g(p) = h^{-1}\theta(1) = h^{-1}(2) = f(p).$$

La formule (5) est ainsi établie.

Vu que la fonction g appartient à la famille Φ_i et la fonction h à la famille F, le théorème II est démontré.

Or, comme l'a prouvé M. S. Eilenberg[1]), si E est un *ensemble fini contenant plus que deux éléments, on ne peut pas remplacer dans le théorème II le nombre* **trois** *par un nombre plus petit.*

[1]) *Fund. Math.* t. XXIV, p. 212.