Sur l'inégalité Hausdorff—Riesz.

Par

Alexandre Rajchman (Warszawa).

§ 1. W. H. Young [1]), F. Hausdorff [2]), F. Riesz [3]) et M. Riesz [4]) ont établi un théorème extrèmement remarquable de la théorie des fonctions orthogonales.

Soient α et β deux quantités plus grandes que un, liées par la relation:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1. \tag{1}$$

L'une de ces quantités est forcément au plus égale à 2, l'autre au moins égale à 2.

Soit:

$$1<\alpha\leqq 2\leqq\beta. \tag{2}$$

Soit $f(x)$ une fonction intégrable au sens de Lebesgue; soit

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\dots,\ \varphi_n(x),\dots \tag{3}$$

un système orthogonal fermé dans l'intervalle $\langle 0,1\rangle$; soit

$$a_k=\int_0^1 f(x)\,\varphi_k(x)\,dx. \tag{4}$$

[1]) Sur la généralisation du théorème de Parseval (C. R. 1 juillet 1912).
The determination of the summability of a function by means of its Fourier Constants (Proc. London Math. Soc. (2) 12 (1913) p. 71—88).

[2]) Eine Ausdehnung des Parsevalschen Satzes über Fourierreihen (Math. Zeitschrift, tome 16, année 1923, p. 163—169).

[3]) Über eine Verallgemeinerung des Parsevalschen Formel (Math. Zeitschrift, tome 18, année 1923, p. 87—95).

[4]) Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires. (Acta Mathematica, tome 49, année 1927, p. 465—497).

F. Riesz (loc. cit.) a établi le théorème suivant: si les fonctions (3) sont bornées dans leur ensemble, c'est-à-dire, s'il existe un M tel, que l'on ait *quel que soient* x *et* k:

$$|\varphi_k(x)|\leqq M \tag{5}$$

alors: 1⁰ la convergence de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^{\alpha} \tag{6}$$

entraîne l'intégrabilité (au sens de Lebesgue) de la fonction

$$|f(x)|^{\beta} \tag{7}$$

2⁰ l'intégrabilité (au sens de Lebesgue) de la fonction

$$|f(x)|^{\alpha} \tag{8}$$

entraîne la convergence de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^{\beta}. \tag{9}$$

F. Hausdorff avait antérieurement (loc. cit.) établi ce théorème dans le cas particulier des séries trigonométriques.

W. H. Young avait ouvert la voie aux recherches en question, en démontrant le résultat acquis ultérieurement par Hausdorff dans le cas particulier de certaines valeurs rationnelles de α et de β.

§ 2. F. Riesz, qui, par un calcul assez compliqué, démontra son théorème directement sous sa forme générale, avait observé (loc. cit.) que ce théorème peut être déduit par des passages à la limite de la proposition suivante:

„Soit

$$X_k=\sum_{j=1}^{m}a_{jk}\,x_j \qquad (k=1,2\dots m) \tag{10}$$

une substitution orthogonale et normée. c'est-à-dire une substitution telle que pour tout système (x_j) on ait

$$\sum_{k=1}^{m}|X_k|^2=\sum_{j=1}^{m}|x_j|^2. \tag{11}$$

Désignons encore par M la plus grande des valeurs $|a_{jk}|$. Alors on aura pour tout nombre a tel que $1 \leqq a \leqq 2$

$$\left(\sum_{k=1}^{m} |X_k|^{\frac{a}{a-1}}\right)^{\frac{a-1}{a}} \leqq M^{\frac{2-a}{a}} \left(\sum_{j=1}^{m} |x_j|^a\right)^{\frac{1}{a}} \tag{12}$$

Cette proposition a été étudiée et approfondie par Marcel Riesz dant son important mémoire des Acta Mathematica (loc. cit.).

§ 3. Marcel Riesz rattache le proposition du § précédent à son théorème, dont voici l'énoncé *specialisé pour nos besoins:*

„En désignant par $M(\alpha, \gamma)$ le maximum de l'expression[1]):

$$\left(\sum_{k=1}^{k=m} |X_k|^{\frac{1}{\gamma}}\right)^{\gamma} \tag{13}$$

sous la condition

$$\left(\sum_{j=1}^{j=m} |x_j|^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha} = 1, \tag{14}$$

$\log M(\alpha, \gamma)$ sera, dans le triangle

$$0 \leqq \gamma \leqq \alpha \leqq 1, \tag{15}$$

une fonction convexe du point (α, γ)".

§ 4. Considérons, en particulier, le côté:

$$\gamma + \alpha = 1 \tag{16}$$

du triangle (15).

Regardons tout d'abord le point $\gamma = 0$, $\alpha = 1$; si l'on désigne par $|X_p|$ la plus grande parmi les quantités:

$$|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_m|, \tag{17}$$

on a évidemment:

$$\lim_{\gamma \to 0} \frac{\left(\sum_{k=1}^{m} |X_k|^{\frac{1}{\gamma}}\right)^{\gamma}}{|X_p|} = \lim_{\gamma \to 0} \left[\sum_{k=1}^{m} \left|\frac{X_k}{X_p}\right|^{\frac{1}{\gamma}}\right]^{\gamma} = 1$$

[1]) Les X_k sont donnés par la formule (10) du § 2.

donc

$M(1, 0) =$ le maximum de $|X_p|$ sous la condition

$$\sum_{j=1}^{m} |x_j| = 1, \tag{19}$$

ce qui est manifestement égal à la plus grande de valeurs $|a_{jk}|$; par suite, en conservant la notation du § 2.

$$M(1, 0) = M. \tag{20}$$

Regardons le point $\gamma = \alpha = \frac{1}{2}$;

en rapprochant les égalités (11) et (14) on a

$$M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1. \tag{21}$$

Considérons finalement le point

$$\gamma = \frac{a-1}{a} \quad \alpha = \frac{1}{a} \quad \text{avec} \quad 1 < a < 2;$$

la convexité de la fonction $\log M(\alpha, \gamma)$ sur le côté (16) du triangle (15) permet[1]) écrire l'inégalité suivante:

$$\frac{\log M\left(\frac{1}{a}, \frac{a-1}{a}\right) - \log M(1, 0)}{\frac{a-1}{a} - 0} < \frac{\log M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - \log M(1, 0)}{\frac{1}{2} - 0}.$$

En passant des logarithmes aux nombres ceci donne (en tenant compte de (20) et (21)):

$$M\left(\frac{1}{a}, \frac{a-1}{a}\right) < M^{\frac{2-a}{a}} \tag{22}$$

d'où résulte immédiatement la thèse (12) du § 2.

§ 5. L'objet de cette étude est la généralisation du théorème de F. Riesz exposé au § 2 et le remplacement de la démonstration exposée au § 4 par une démonstration élémentaire *directe* ne faisant pas appel au théorème ardu de Marcel Riesz énoncé partiellement au § 3.

[1]) vu l'inégalité:

$$0 < \frac{a-1}{a} < \frac{1}{2}$$

ce qui équivaut à l'inégalité; $1 < a < 2$.

Dans cette Première Communication nous considérons le cas particulier important caractérisé par les restrictions suivantes:

1° Nous supposons que les éléments *d'une ligne*[1]) du tableau orthogonal

$$a_{ik}$$

sont tous *non négatifs;* on peut disposer les notations de manière que ce soient les éléments de la *première* ligne; nous supposons donc:

$$a_{j1} \geqq 0 \qquad (j = 1, 2 \ldots m). \tag{23}$$

2° Nous supposons de plus qu'un système des valeurs de

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_m$$

réalisant [2]) le $M\left(\frac{1}{a}, \frac{a-1}{a}\right)$ est entièrement non négatif (c'est-à-dire que ce système des valeurs ne contiente que des quantités positives et nulles).

En partant de ces hypothèses il est très facile d'établir l'énoncé de F. Riesz du § 2 généralisé dans ce sens que la plus grande de m^2 valeurs $|a_{jk}|$ y est remplacée par la plus grande de m valeurs:

$$a_{11},\ a_{21}, \ldots,\ a_{m1}.$$

§ 6. Pour démontrer le théorème énoncé au § précédent on n'a qu'à faire appliquer l'inégalité de Hölder.

Cette inégalité apparaît d'ailleurs comme une application immédiate des règles élémentaires du calcul différentiel relatives à la recherche des maxima.

Posons

$$z = \sum_{k=1}^{m} c_k \bar{x}_k; \tag{24}$$

supposons les c_k constants.

z est alors fonction de m variables:

$$\bar{x}_1,\ \bar{x}_2, \ldots,\ \bar{x}_m$$

[1]) Les lecteurs inattentifs sont avertis de ne pas confondre cette hypothèse avec l'hypothèse $a_{ik} \geqq 0$ pour tout i et k, discutée dans le cas des transformations *non orthogonales* à la fin du mémoire cité de Marcel Riesz. Cette hypothèse est manifestement incompatible avec l'orthogonalité.

[2]) Nous conservons la notation du § 3.

que nous supposons liées par la relation:

$$\sum_{k=1}^{m} |\bar{x}_k|^{1+r} = 1 \tag{25}$$

avec $r > 0$.

Cherchons le maximum de z sous la condition (25). En différentiant la relation (25) on trouve [1]):

$$\sum_{k=1}^{m} |\bar{x}_k|^r \operatorname{sign} \bar{x}_k \, d\bar{x}_k = 0. \tag{26}$$

Le maximum cherché ne peut être atteint que pour les valeurs des $\bar{x}_k$ telles, que la relation (26) entraîne la relation suivante:

$$dz = \sum_{k=1}^{m} c_k \, d\bar{x}_k = 0. \tag{27}$$

Or (27) n'est conséquence de (26) que quand:

$$\frac{|\bar{x}_1|^r \operatorname{sign} \bar{x}_1}{c_1} = \frac{|\bar{x}_2|^r \operatorname{sign} \bar{x}_2}{c_2} = \ldots = \frac{|\bar{x}_m|^r \operatorname{sign} \bar{x}_m}{c_m}. \tag{28}$$

Il résulte immédiatement des égalités (28) et (25):

$$\frac{|\bar{x}_1|^{1+r}}{|c_1|^{\frac{1+r}{r}}} = \frac{|\bar{x}_2|^{1+r}}{|c_2|^{\frac{1+r}{r}}} = \ldots = \frac{|\bar{x}_m|^{1+r}}{|c_m|^{\frac{1+r}{r}}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{m} |c_k|^{\frac{1+r}{r}}}. \tag{29}$$

On en déduit, que le maximum cherché est atteint pour:

$$\bar{x}_j = \frac{|c_j|^{\frac{1}{r}} \operatorname{sign} c_j}{\left[\sum_{k=1}^{m} |c_k|^{\frac{1+r}{r}}\right]^{\frac{1}{1+r}}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{30}$$

ce maximum vaut évidemment:

$$\left[\sum_{k=1}^{m} |c_k|^{\frac{1+r}{r}}\right]^{\frac{r}{1+r}}; \tag{31}$$

[1]) on a, par définition, $\operatorname{sign} x = \frac{x}{|x|}$.

par conséquent on a pour tout $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m$ remplissant l'équation (25)

$$(32)\qquad \left|\sum_{k=1}^{m} c_k \bar{x}_k\right| \leqq \left[\sum_{k=1}^{m} |c_k|^{\frac{1+r}{r}}\right]^{\frac{r}{1+r}} \cdot \left[\sum_{k=1}^{m} |\bar{x}_k|^{1+r}\right]^{\frac{1}{1+r}}.$$

L'inégalité (32) étant homogène par rapport à $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m$, elle subsiste, quand on y remplace $\bar{x}_k$ par $S\bar{x}_k$ $(k = 1, 1, \ldots, m)$, S étant une constante quelconque. Il en résulte que la restriction exprimée par l'équation (25) se lève d'elle-même.

L'inégalité (32), qui constitue l'inégalité de Hölder, est donc valable sans restrictions.

§ 7. Posons

$$(33)\qquad c_k = X_k = \sum_{j=1}^{m} a_{jk} x_j;$$

on a alors

$$(34)\qquad z = \sum_{k=1}^{m} c_k \bar{x}_k = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{jk} x_j \bar{x}_k = \sum_{j=1}^{m} \bar{c}_j x_j,$$

où

$$(35)\qquad \bar{c}_j = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} \bar{x}_k.$$

Pour démontrer et généraliser la thèse (12) du § 2 nous n'avons qu'à évaluer le maximum de l'expression (31) [1]) sous la condition suivante:

$$(36)\qquad \sum_{j=1}^{m} |x_j|^{1+r} = 1.$$

Or ceci n'est autre chose, que le maximum de z (donné par (34)) sous la double condition exprimée par les équations (25) et (36). L'ordre dans lequel nous considérons ces deux équations est évidemment absolument indifférent. En intervertissant cet ordre, c'est-à-dire en considérant tout d'abord l'équation (36) et en appliquant à

$$z = \sum_{j=1}^{m} \bar{c}_j x_j$$

[1]) Bien entendu il ne faut pas oublier notre point de départ, savoir la substitution (33). Pour identifier l'expression (31) et le premier membre de l'inégalité (12) du § 2 on n'a qu'à y mettre $a = 1 + r$.

le résultat du § 6 nous mettons en évidence la conclusion suivante: *le maximum de l'expresion* (31) *sous la condition* (36) *est identique au maximum de l'expression suivante:*

$$(37)\qquad \left[\sum_{j=1}^{m} |\bar{c}_j|^{\frac{1+r}{r}}\right]^{\frac{r}{1+r}}$$

sous la condition (25).

Appelons G ce maximum.

En vertu de l'équation (30) les valeurs de

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m, x_1, x_2, \ldots, x_m$$

qui réalisent le maximum G vérifient les équations suivantes:

$$(38)\qquad \bar{x}_k = \frac{\left|\sum_{j=1}^{m} a_{jk} x_j\right|^{\frac{1}{r}} \operatorname{sign} \sum_{j=1}^{m} a_{jk} x_j}{G^{\frac{1}{r}}}.$$

$$(39)\qquad x_j = \frac{\left|\sum_{k=1}^{m} a_{jk} \bar{x}_k\right|^{r} \operatorname{sign} \sum_{k=1}^{m} a_{jk} \bar{x}_k}{G^{\frac{1}{r}}}.$$

De l'équation (38) se déduit immédiatement l'équation suivante:

$$(40)\qquad \sum_{j=1}^{m} a_{jk} x_j = G \cdot |\bar{x}_k|^r \operatorname{sign} \bar{x}_k$$

et, de même, on déduit de (39) ce qui suit:

$$(41)\qquad \sum_{k=1}^{m} a_{jk} \bar{x}_k = G \cdot |x_j|^r \operatorname{sign} x_j.$$

En resolvant les équations (41) par rapport à:

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m$$

on trouve

$$(42)\qquad \bar{x}_k = G \cdot \sum_{j=1}^{m} a_{jk} |x_j|^r \operatorname{sign} x_j.$$

En subsistuant les valeurs (42) dans l'équation (40) et en tenant compte du fait, que G est essentiellement positif, on trouve la relation suivante:

(43) $$\left|\sum_{j=1}^{m} a_{jk} x_j\right| = G \cdot G^r \cdot \left|\sum_{j=1}^{m} a_{jk} |x_j|^r \operatorname{sign} x_j\right|^r$$

c'est-à-dire

(44) $$G^{1+r} = \frac{\left|\sum_{j=1}^{m} a_{jk} x_j\right|}{\left|\sum_{j=1}^{m} a_{jk} \cdot |x_j|^r \operatorname{sing} x_j\right|^r}.$$

§ 8. Utilisons maintenant nos hypothèses particulières: savoir la non-négativité de a_{j1} $(j=1, 2, \ldots, m)$ et la non-négativité d'un système des valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_m$ réalisant le maximum G.

Dans ces conditions l'inégalité (44) pour $k=1$ se simplifie et revêt la forme suivante:

(45) $$G^{1+r} = \frac{\sum_{j=1}^{m} a_{j1} x_j}{\left(\sum_{j=1}^{m} a_{j1} x_j^r\right)^r}.$$

Appliquons l'inégalité de Hölder à la somme des produits des facteurs $a_{j1}^r x_j^{rs}$ et x_j^{1-rs}, prenant comme exposants $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{1-r}$; en d'autres termes: transcrivons l'inégalité (32) du § 6 avec des notations différentes, écrivons, par exemple:

(46) $$\left|\sum_{j=1}^{m} A_j B_j\right| \leqq \left(\sum_{j=1}^{m} |A_j|^{\frac{1+s}{s}}\right)^{\frac{s}{1+s}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} |B_j|^{1+s}\right)^{\frac{1}{1+s}}$$

et substituons:

(47) $$A_j = a_{j1}^r x_j^{rs}; \quad B_j = x_j^{1-rs}; \quad s = \frac{r}{1-r}.$$

On arrive ainsi à l'inégalité suivante [1]):

(48) $$\sum_{j=1}^{m} a_{j1}^r x_j \leqq \left(\sum_{j=1}^{m} a_{j1} x_j^r\right)^r \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} x_j^{1+r}\right)^{1-r}.$$

[1]) Dans la redaction primitive de cette Note l'inégalité (48) était établie directement, sans faire appel à l'inégalité de Hölder. C'est M. A. Zygmund qui a attiré mon attention sur la possibilité de déduire (48) de (32).

Puisque, par hypothèse, $x_j \geqq 0$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ l'équation (36) du § 7 prend la forme suivante:

(49) $$\sum_{j=1}^{m} x_j^{1+r} = 1.$$

L'inégalité (48) jointe à l'égalité (49) fait déduire de l'équation (45) la conséquence suivante:

(50) $$G^{1+r} \leqq \frac{\sum_{j=1}^{m} a_{j1} x_j}{\sum_{j=1}^{m} a_{j1}^r x_j}.$$

Considérons les m fractions:

(51) $$\frac{a_{j1} x_j}{a_{j1}^r x_j} \qquad (j=1, 2, \ldots, m);$$

le numérateur et le dénominateur de la fraction du second membre de (50) sont respectivement sommes des numérateurs et des dénominateurs des fractions (51).

Par conséquant *le second membre de l'inégalité* (50) *est moindre, ou au plus égal à la plus grande des fractions* (51) *c'est-à-dire à la plus grande des quantités*

(52) $$a_{j1}^{1-r} \qquad (j=1, \ldots, m).$$

A fortiori il en est de même du premier membre de l'inégalité (50).

Donc: $G^{1+r} \leqq$ la plus grande des quantités (52) c'est-à-dire

(53) $$G \leqq [\text{la plus grande des } a_{j1}]^{\frac{1-r}{1+r}}.$$

G est au moins égal au premier membre de l'inégalité (12) du § 2; l'inégalité (53) constitue précisément notre thèse à démontrer.

Dans la Communication suivante nous discuterons les rectrictions énoncées dans le § 5 et utilisées dans § 8.