Pour un $\varepsilon < \varrho(x_0, L)$ l'arc L est contenu dans l'intérieur de $M(x_0, \varepsilon)$. En posant $\Phi = \Phi_{S_m, Q_n, f}$ on a l'égalité

$$(11) \qquad \mathfrak{B}(m, n) = [M(x_0, \varepsilon) \underset{f}{+} Q_n] + \Phi[N(x_0, \varepsilon)].$$

D'après le corollaire (C), le premier sommande de cette décomposition est un rétracte absolu. La fonction Φ étant une homéomorphie sur l'ensemble $S_m - L \supset N(x_0, \varepsilon)$, le deuxième sommande est aussi un rétracte absolu ayant comme partie commune avec le premier sommande l'ensemble $\Phi[M(x_0, \varepsilon) \cdot N(x_0, \varepsilon)]$, c. à d. une surface sphérique $(m-1)$-dimensionnelle. Les rétractes absolus étant acycliques [24]), il en résulte, d'après la formule bien connue de MM. Mayer, Vietoris et Čech [25]) concernante les propriétés de la homologie de la somme de deux espaces compacts, que les nombres de Betti de l'ensemble $\mathfrak{B}(m, n)$ coïncident avec les nombres correspondants d'une surface sphérique m-dimensionnelle.

Reste à prouver que $\mathfrak{B}(m, n)$ constitue une membrane homotopique pour chacun de ses vrais sous-ensembles fermés. Par un raisonnement complètement analogue à celui qui se trouve dans le numéro précédent on constate que pour un vrai sous-ensemble fermé E de $\mathfrak{B}(m, n)$ il existe un point $x_0 \in S_m - L$ tel que $\Phi(x_0) \in \mathfrak{B}(m, n) - E$. Pour un ε suffisament petit, les ensembles E et $\Phi[N(x_0, \varepsilon)]$ sont alors disjoints d'où, en vertu de la formule (11), on obtient $E \subset M(x_0, \varepsilon) \underset{f}{+} Q_n$. L'ensemble $M(x_0, \varepsilon) \underset{f}{+} Q_n$ est, d'après le corollaire (C) un rétracte absolu, et parsuite [26]) une membrane homotopique pour E. A plus forte raison, l'ensemble $\mathfrak{B}(m, n) \supset E$ est une membrane homotopique pour E, c. q. f. d.

[24]) Fund Math. 21 (1933), p. 95.

[25]) Dans le cas des polytopes la formule mentionnée est démontrée par M. W. Mayer dans Monatsh. f. Math. u. Phys. 36 (1929), p. 40 et ensuite, dans une forme plus forte, par M. L. Vietoris dans Monatsh. f. Math. u. Phys. 37 (1930), p. 162. Le cas des espaces arbitraires était traité par M. E. Čech dans Fund. Math. 19 (1932), p. 178. En particulier, si les sommandes A et B sont des espaces compacts acycliques en toutes les dimensions, la formule de MM. Mayer—Vietoris—Čech prend la forme suivante: $p_1(A+B) = p_0(A \cdot B) - 1$ et $p_{r+1}(A+B) = p_r(A \cdot B)$ pour $r = 1, 2, \dots$ Dans le cas où l'ensemble $A+B$ est connexe et $A \cdot B$ est une surface sphérique $(m-1)$-dimensionnelle, il vient: $p_0(A+B) = 1$; $p_1(A+B) = 0$; $p_m(A+B) = p_{m-1}(A \cdot B) = 1$ et $p_{r+1}(A+B) = p_r(A \cdot B) = 0$ pour $0 \neq r \neq m-1$, c. à d. les nombres de Betti de $A+B$ coïncident avec ceux d'une surface sphérique m-dimensionnelle.

[26]) Fund. Math. 19 (1932), p. 235, exemple 4.

Sur le prolongement des fonctions continues et les transformations en polytopes.

Par

Casimir Kuratowski (Warszawa).

Le résultat principal de cette note se rattache, d'une part, à un théorème, dû à M. Tietze [1]) sur le prolongement des fonctions continues, définies sur un sous-ensemble fermé d'un espace métrique et, d'autre part, à un théorème, dû à M. Alexandroff [2]), sur les transformations des espaces métriques en polytopes. Nous allons démontrer, en effet, qu'étant donnée une fonction continue $y = f(x)$ définie sur un sous-ensemble fermé A d'un espace métrique séparable X, on peut étendre la définition de cette fonction sur l'espace X tout entier en ajoutant à l'espace des y un polytope infini [3]) dont la dimension ne dépasse pas celle de l'ensemble $X - A$ (théorème 2). On peut, en outre, assujettir la transformation de l'espace X à quelques conditions supplémentaires analogues aux conditions qui inter-

[1]) H. Tietze, Journ. f. Math. 145 (1915), p. 9—14 et F. Hausdorff, Math. Zft. 5 (1919), p. 296.

[2]) P. Alexandroff, C. R. Paris t. 183 (1926), p. 640 et Ann. of Math. 30 (1928), p. 6 et ma note Fund. Math. 20 (1933), p. 191—196 ou *Topologie* I, p. 93.

[3]) Un *polytope infini* est un ensemble de la forme

$$P = \overline{S}_1 + \overline{S}_2 + \dots \quad \text{où} \quad \overline{S}_i \cdot \mathrm{Ls}\, S_m = 0,$$

où S_i est un simplexe (ouvert) et où $\mathrm{Ls}\, S_m$ désigne la limite supérieure (topologique) de la suite $\{S_m\}$.

Il en résulte qu'aucun point de P n'est un point d'accumulation d'une suite de points appartenant à des différents termes de la suite $\{S_m\}$. Un polytope infini est ainsi localement un polytope fini.

Un ensemble ouvert dans un polytope fini est un polytope infini.

Bien entendu, un polytope infini peut être de dimension infinie: lorsque la dimension des simplexes S_i est illimitée.

viennent dans le théorème de M. Alexandroff (cf. théorème 1 de cette note).

Les énoncés de cette note seront appliqués dans la note qui suit, sur la connexité n-dimensionnelle.

1. Deux suites (infinies) d'ensembles $A_1, A_2, \dots$ et $B_1, B_2, \dots$ sont dites *semblables* (au sens combinatoire) [1]), lorsqu'on a l'équivalence

$$\{A_{i_1}\cdot\ldots\cdot A_{i_k}=0\}\equiv\{B_{i_1}\cdot\ldots\cdot B_{i_k}=0\},$$

quel que soit le système (fini) d'entiers $k, i_1, \dots, i_k$.

Nous allons établir l'énoncé suivant:

Soit, dans un espace métrique arbitraire, $F_1, F_2, \dots$ une suite d'ensembles fermés tels que

$$(0) \qquad F_i\cdot \mathrm{Ls}\, F_m = 0, \quad \textit{quel que soit } i.$$

Chaque F_i est contenu alors dans un ensemble ouvert G_i tel que la suite $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \dots$ est semblable à $F_1, F_2, \dots$

La démonstration est tout-à-fait analogue à celle qui concerne le cas où la suite donnée est finie [2]). On désigne par S la somme de tous les produits $F_{i_1}\cdot\ldots\cdot F_{i_k}$ tels que $F_1\cdot F_{i_1}\cdot\ldots\cdot F_{i_k}=0$. L'ensemble $\overline{S}$ étant disjoint de F_1 en vertu de (0), il existe un ensemble ouvert G_1 tel que

$$F_1\subset G_1 \quad \text{et} \quad \overline{G}_1\cdot S=0.$$

On vérifie facilement que la suite $\overline{G}_1, F_2, F_3, \dots$ est semblable à $F_1, F_2, F_3, \dots$ En procédant par induction, on définit l'ensemble G_k de façon que $F_k\subset G_k$ et que la suite $\overline{G}_1, \dots, \overline{G}_k, F_{k+1}, \dots$ soit semblable à $F_1, \dots, F_k, F_{k+1}, \dots$ Il en résulte que la suite $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \dots$ est semblable à $F_1, F_2, \dots$

2. *Lemme.* *Etant donné dans un espace métrique séparable X un ensemble ouvert G de dimension n, il existe une suite infinie d'ensembles fermés $F_1, F_2, \dots$ telle que*

$$(1) \quad G=F_1+F_2+\ldots \qquad (2) \quad F_i\cdot\overline{F_{i+2}+F_{i+3}+\ldots}=0$$

$$(3) \qquad \dim(F_i\cdot F_{i+1})\leqslant n-1.$$

[1]) Cf. P. Alexandroff, Annals of Math. op. cit. p. 16 et *Topologie* I p. 95, où cette notion est considérée pour le cas des suites finies.

[2]) Cf. W. Hurewicz, Math. Ann. 100 (1928) et *Topologie* I, p. 96.

Démonstration. Il est évidemment légitime d'admettre que $G\neq X$. Soit S_i une sphère fermée de centre $X-G$ et de rayon $1/i$, c. à d. l'ensemble des points x tels que $\varrho(x, X-G)\leqslant 1/i$ [1]). Soit $S_0=X$. Il vient

$$(4) \quad S_i\cdot\overline{X-S_{i-1}}=0 \qquad \text{et} \qquad (5) \quad X-G=\prod_{i=1}^{\infty}S_i.$$

L'ensemble ouvert G étant de dimension n, il existe d'après (4) un ensemble ouvert U_i tel que [2])

$$(6) \quad GS_i\subset U_i\subset G \qquad (7) \quad \overline{U}_i\cdot G\cdot\overline{X-S_{i-1}}=0$$

$$(8) \qquad \dim(G\cdot\overline{U}_i-U_i)\leqslant n-1.$$

Posons $U_0=G$ et $F_i=\overline{U_{i-1}-U_i}$.

D'après (6):

$$U_{i-1}-U_i\subset U_{i-1}-GS_i=U_{i-1}-S_i\subset X-S_i,$$

d'où

$$(9) \qquad F_i\subset\overline{X-S_i}, \quad \text{donc} \quad F_i\subset X-S_{i+1}\subset G$$

selon (4) et (5).

D'autre part, en raison de (6), (7) et (5)

$$\prod_{i=1}^{\infty}U_i\subset G\cdot\prod_{i=1}^{\infty}S_i=0$$

d'où

$$G=U_0-U_1+U_1-U_2+\ldots\subset F_1+F_2+\ldots$$

En tenant compte de (9), on en déduit (1).

D'après (1) et (7), on a pour $k\geqslant 2$:

$$F_{i+k}\subset\overline{U}_{i+k-1}\cdot G\subset S_{i+k-2}\subset S_i,$$

d'où

$$\overline{F_{i+2}+F_{i+3}+\ldots}\subset S_i.$$

D'autre part, $F_i\subset\overline{X-U_i}=X-U_i$, d'où selon (6), $GS_iF_i=0$, donc $S_iF_i=0$ (car $F_i\subset G$). L'égalité (2) en découle.

Enfin, en vertu de (9)

$$F_i\cdot F_{i+1}\subset G\cdot\overline{X-U_i}\cdot\overline{U}_i=G\,\overline{U}_i-U_i,$$

d'où la formule (3) en raison de (8).

[1]) $\varrho(X, Y)$ désigne la borne inférieure des distances $|x-y|$ où $x\epsilon X$ et $y\epsilon Y$.

[2]) en vertu du théorème de séparation de la théorie de la dimension. Voir, par ex. *Topologie* I, p. 129.

Théorème de décomposition. *Etant donné dans un espace totalement borné*[1] X *un ensemble ouvert* G *de dimension* n, *il existe une suite d'ensembles ouverts* $G_1, G_2, \ldots$ *telle que*

$$(10)\qquad G = G_1 + G_2 + \ldots \qquad\qquad (11)\qquad \overline{G}_i \subset G$$

$$(12)\qquad G_{i_0} \cdot \ldots \cdot G_{i_{n+1}} = 0$$

pour chaque système de $n+2$ *indices différents,*

(13) G_i *n'a des points communs qu'à avec un nombre fini des* G_j,

$$(14)\qquad \lim_{i=\infty} \delta(G_i) = 0.$$

Démonstration. $F_1, F_2, \ldots$ étant la suite considérée dans le lemme précédent, décomposons l'ensemble F_1 en un nombre fini d'ensembles fermés:

$$F_1 = F_1^1 + \ldots + F_{l_1}^1$$

de façon qu'aucun point n'appartienne simultanément à $n+2$ parmi ces ensembles et que, pour chaque $r \leqslant n+1$,

$$\dim (F_2 \cdot F_{j_1}^1 \cdot \ldots \cdot F_{j_r}^1) \leqslant n - r \quad \text{et} \quad \delta(F_j^1) < 1\ {}^{2)}.$$

D'une façon générale, il existe, pour chaque $i > 1$, un système d'ensembles fermés $F_1^i, \ldots, F_{l_i}^i$ tels que

$$F_i = F_1^i + \ldots + F_{l_i}^i, \qquad \delta(F_j^i) < 1/i,$$

$$\dim (F_{i+1} \cdot F_{j_1}^i \cdot \ldots \cdot F_{j_r}^i) \leqslant n - r \qquad (\text{pour } r \leqslant n+1),$$

$$(15)\qquad F_{j_1}^{i-1} \cdot \ldots \cdot F_{j_r}^{i-1} \cdot F_{k_1}^i \cdot \ldots \cdot F_{k_s}^i = 0$$

pour $r + s = n + 2$ et $0 \leqslant r \leqslant n + 1$.

[1]) Un espace (métrique) est dit *totalement borné*, lorsque, pour chaque $\varepsilon > 0$, il est la réunion d'un nombre fini d'ensembles de diamètre $< \varepsilon$. Le ***diamètre*** de A, en symboles $\delta(A)$, est la borne supérieure de $|x - y|$, où $x \in A$ et $y \in A$.

Chaque espace métrique séparable est homéomorphe à un espace totalement borné; notamment à un sous-ensemble de l'espace de Hilbert.

[2]) Nous nous appuyons sur le théorème suivant: étant donnés dans un espace totalement borné F de dimension n un système fini $\mathfrak{S}$ d'ensembles fermés, on peut décomposer cet espace en un nombre fini d'ensembles fermés $F_1, \ldots, F_l$ de diamètre aussi petit qu'on le veut et de façon qu'aucun point n'appartienne à $n+2$ parmi ces ensembles et que, pour chaque $r \leqslant n+1$ et chaque ensemble $Z \in \mathfrak{S}$, on ait

$$\dim (Z \cdot F_{j_1} \cdot \ldots \cdot F_{j_r}) \leqslant \dim Z - r + 1.$$

Dans le cas considéré le système $\mathfrak{S}$ se compose d'un seul ensemble, à savoir, de $F_1 \cdot F_2$. Voir K. Menger, *Dimensionstheorie*, p. 170.

On établit l'existence des ensembles F_j^i par induction: en supposant ces ensembles définis pour l'indice $i - 1$, on admet que le système $\mathfrak{S}$ considéré dans le renvoi précédent se compose de l'ensemble $F_i F_{i+1}$ et de tous les ensembles de la forme $F_i \cdot F_{j_1}^{i-1} \cdot \ldots \cdot F_{j_r}^{i-1}$ avec $r \leqslant n + 1$.

Les formules (2) et (15) impliquent aussitôt qu'aucun point n'appartient à $n+2$ termes de la double suite $\{F_j^i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots$

Ceci établi, rangeons la double suite $\{F_j^i\}$ en une suite simple: $K_1, K_2, \ldots$ On constate facilement que les ensembles $K_1, K_2, \ldots$ vérifient les formules (10)—(14) en y remplaçant G_i par K_i. En outre, on déduit de (2) que $K_i \cdot \mathrm{Ls}\, K_m = 0$.

L'énoncé du N° 1 est donc applicable aux ensembles K_i. Les ensembles G_i qui interviennent dans cet énoncé, multipliés par des entourages de K_i suffisamment petits (pour que l'on ait $\overline{G}_i \subset G$ et $\delta(G_i) < 2/i$) satisfont donc aux conditions du théorème.

Remarque. Le théorème, le lemme et leurs démonstrations restent valables lorsque *l'ensemble* G *est de dimension infinie:* $n = \infty$. On omet alors la condition (12) et l'inégalité (3) et la démonstration devient évidemment bien plus simple.

3. ***Théorème 1.*** *Etant donnés dans un espace métrique* X *un ensemble ouvert* G, *décomposé en une série d'ensembles ouverts* G_i *satisfaisant aux conditions* (10), (11), (13) *et* (14), *et une suite de points* $q_1, q_2, \ldots$ *où* $q_i \in G_i$, *chaque fonction continue* $f(x)$, *définie sur l'ensemble* $X_1 = X - G + q_1 + q_2 + \ldots$ *et dont les valeurs appartiennent à un espace euclidien ou à l'espace de Hilbert*[1]), *admet une extension continue* $f^*(x)$ *sur l'espace* X *tout entier telle, qu'en désignant par* p_i *le point* $f(q_i)$, *on ait:*

$$(16)\qquad f^*\Big(G_{i_0} \cdot \ldots \cdot G_{i_k} - \sum_{i \neq i_j} G_i\Big) \subset p_{i_0} \ldots p_{i_k}$$

où la sommation est étendue sur tous les indices i *distincts de* $i_0, \ldots, i_k$ *et où* $p_{i_0} \ldots p_{i_k}$ *désigne le simplexe (ouvert, singulier ou non) à sommets* $p_{i_0}, \ldots, p_{i_k}$.

[1]) ou, d'une façon plus générale, à un espace vectoriel normé; pour la définition, voir S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monogr. Matem., 1932, p. 53 ou F. Hausdorff, Journ. f. Math. 167 (1931), p. 295 („linearer metrischer Raum").

Notamment

$$(17)\qquad f^*(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i(x)p_i\,{}^{1)} \quad où \quad \lambda_i(x)=\frac{\varrho(x, X-G_i)}{\sum_{j=1}^{\infty}\varrho(x, X-G_j)}.$$

Démonstration. La démonstration est tout à fait analogue à celle qui m'a servi pour établir le théorème de M. Alexandroff (cité p. 259, renvoi 2). On constate d'abord que l'égalité $\varrho(x, X-G_i)\neq 0$ équivaut à la formule $x\in G_i$. Par conséquent, pour $x\in G$, la somme $\sum_{j=1}^{\infty}\varrho(x, X-G_j)$ ne s'annule jamais et la sommation envisagée est finie, car en vertu de (13) aucun point n'appartient à une infinité des G_j. On en conclut que la suite des coefficients $\lambda_1(x), \lambda_2(x),\ldots$ est définie pour chaque $x\in G$ et qu'à partir d'un indice suffisamment grand (dépendant de x) tous ces coefficients s'annulent. En conséquence la sommation $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i(x)p_i$ n'est qu'en apparence infinie et la fonction $f^*(x)$ se trouve définie par la formule (17).

D'après (13) à chaque point $x\in G$ correspond un système fini d'indices $i_0,\ldots, i_k$ tel que $x\in G_{i_j}$ pour $0\leqslant j\leqslant k$ et que $x\in X-G_i$ pour $i\neq i_j$. Il vient $\varrho(x, X-G_{i_j})\neq 0$ et $\varrho(x, G_i)=0$, d'où $\lambda_{i_j}(x)\neq 0$ et $\lambda_i(x)=0$. Comme, en outre

$$\lambda_{i_0}(x)+\ldots+\lambda_{i_k}(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m(x)=1,$$

on en conclut que $f^*(x)$ est le point du simplexe $p_{i_0}\ldots p_{i_k}$ ayant les coefficients $\lambda_{i_0}(x),\ldots,\lambda_{i_k}(x)$ pour coordonnées barycentriques. L'inclusion (16) se trouve ainsi établie.

Il s'agit à présent de démontrer que la fonction $f^*(x)$ est continue pour $x\in G$ et qu'en posant $f^*(x)=f(x)$ aux points de $X-G$, la fonction ne cesse pas d'être continue en ces points.

D'après (13), à chaque i correspond un indice r_i tel que, pour $j>r_i$, on a $G_iG_j=0$. En d'autres termes, la condition $x\in G_i$ entraîne $\varrho(x, X-G_j)=0$, ce qui prouve que la série $\sum_{j=1}^{\infty}\varrho(x, X-G_j)$ se réduit sur G_i à une sommation finie. Elle représente ainsi une fonction continue sur G_i, donc sur G.

[1]) p_i est conçu ici comme un vecteur multiplié par le nombre réel $\lambda_i(x)$.

Pour la même raison, la fonction $f^*(x)$ est continue sur G: on a, en effet, pour $x\in G_i$,

$$f^*(x)=\sum_{k=1}^{r_i}\lambda_k(x)\,p_k.$$

Afin de démontrer que la fonction $f^*(x)$ est continue sur $X-G$, posons $a\in X-G$ et $\varepsilon>0$. La fonction $f(x)$ étant continue sur X_1, il existe un entourage H de a tel que, pour $q_i\in H$,

$$(18)\qquad |f(q_i)-f(a)|<\varepsilon,\quad \text{donc que}\quad |p_i-f(a)|<\varepsilon.$$

En vertu de (11) et (14) il existe un entourage I de a, contenu dans H et tel que la condition $G_iI\neq 0$ entraîne l'inclusion $G_i\subset H$ donc l'inégalité (18). Nous en conclurons que

$$(19)\qquad |f^*(x)-f(a)|<\varepsilon \quad \text{pour}\quad x\in IG.$$

En effet, x étant un point de IG, soit $i_0,\ldots, i_k$ le système de tous les indices tels que $x\in G_{i_0}\cdot\ldots\cdot G_{i_k}$. D'après (16), $f(x)$ appartient au simplexe $p_{i_0}\ldots p_{i_k}$. Comme $G_{i_0}\cdot I\neq 0,\ldots, G_{i_k}\cdot I\neq 0$, l'inégalité (18) est remplie pour chaque indice $i_0,\ldots, i_k$. Cela veut dire que la distance de $f(a)$ à chacun des sommets du simplexe $p_{i_0}\ldots p_{i_k}$ est inférieure à ε; il en est donc de même de la distance de $f(a)$ à $f^*(x)$, puisque $f^*(x)$ appartient à ce simplexe.

L'inégalité (19) établie, la continuité de la fonction $f^*(x)$ sur l'espace X tout entier en découle directement.

Remarques. 1) Comme nous venons de démontrer, on a

$$(20)\qquad f^*(G)\subset\sum p_{i_0}\ldots p_{i_k},$$

la sommation étant étendue à tous les systèmes $i_0,\ldots, i_k$ tels que $G_{i_0}\cdot\ldots\cdot G_{i_k}\neq 0$. En conséquence, *si la formule* (12) *est vérifiée, les simplexes* $p_{i_0}\ldots p_{i_n}$ *qui interviennent dans cette sommation sont de dimension* $\leqslant n$; *leur somme est donc aussi de dimension* $\leqslant n$.

2) Les simplexes $p_{i_0}\ldots p_{i_k}$ considérés dans la formule (20) ne sont pas, en général, disjoints (les sommets $p_1, p_2,\ldots$ peuvent ne pas être linéairement indépendants). Dans le cas où ils sont *disjoints entre eux et disjoints de* $f(X-G)$, l'inclusion (16) peut être remplacée par l'égalité

$$(21)\qquad G_{i_0}\cdot\ldots\cdot G_{i_k}-\sum_{i\neq i_j}G_i=f^{*-1}(p_{i_0}\ldots p_{i_k}).$$

On en conclut que, si le diamètre des ensembles G_i est inférieur à un $\varepsilon > 0$ donné en avance (ce que l'on peut postuler toujours), *les tranches de la fonction* f^* (c. à d. les ensembles $f^{*-1}(y)$) *ont aussi le diamètre* $< \varepsilon$.

3) Désignons par $\{S_j\}$ la suite des simplexes $p_{i_0} \dots p_{i_k}$ considérés dans la formule (20). *Si l'espace X est compact on a*

$$\lim_{j=\infty} \delta(S_j) = 0 \tag{22}$$

et l'espace $f(X-G) + \sum_{j=1}^{\infty} S_j$ *est compact.*

La fonction $f(x)$ étant continue, à chaque $\varepsilon > 0$ correspond un $\eta > 0$ tel que l'inégalité $|q_i - q_{i'}| < \eta$ entraîne $|p_i - p_{i'}| < \varepsilon$. Si l'indice j du simplexe $S_j = p_{i_0} \dots p_{i_k}$ est suffisamment grand, les indices i_t $(0 \leqslant t \leqslant k)$ sont tellement grands que $\delta(G_{i_t}) \leqslant \eta/2$ (puisque en vertu de (13), dans la suite des systèmes $\{i_0 \dots i_k\}$ tels que $G_{i_0} \cdot \ldots \cdot G_{i_k} \neq 0$ chaque entier positif ne se présente qu'un nombre limité de fois). Comme $G_{i_0} \cdot G_{i_t} \neq 0$, il vient $|q_{i_0} - q_{i_t}| < \eta$, d'où $|p_{i_0} - p_{i_t}| < \varepsilon$ et par conséquent $\delta(S_j) < \varepsilon$, d'où la formule (22).

En tenant compte de la compacité de l'ensemble $f(X_1)$ et de l'inégalité $\bar{S}_j \cdot f(X_1) \neq 0$, on en déduit la compacité de $f(X_1) + \sum_{j=1}^{\infty} S_j$.

Théorème 2. *Etant donnés deux espaces métriques séparables X et Y, un sous-ensemble ouvert G de X et une fonction continue $f(x)$, définie sur $X - G$ et dont les valeurs appartiennent à Y, il existe un sur-espace*[1] *Z de Y et une extension continue $f^*(x)$ de la fonction $f(x)$ tels que: la fonction $f^*(x)$ est définie sur l'espace X tout entier, ses valeurs appartiennent à Z, Y est fermé dans Z et la différence $Z - Y$ est un polytope infini dont la dimension ne dépasse pas celle de G*[2]*.*

Démonstration. En vertu du théorème d'Urysohn, Y peut être considéré comme un sous-ensemble de l'espace de Hilbert; plus encore, on peut admettre que la première coordonnée (que nous appellerons l'abscisse) de chaque point $y \in Y$ s'annule. Décomposons l'ensemble G en ensembles ouverts non-vides $G_1, G_2, \dots$ de façon

[1]) c. à d. un espace contenant Y topologiquement (= contenant un ensemble homéomorphe à Y).

[2]) Un cas particulier de ce théorème, où $X = Y =$ cube fondamental de Hilbert et où $f(x) = x$, a été établi tout récemment par M. Lefschetz, Ann. of Math. 35 (1934), p. 118.

que les conditions (10)—(14) soient réalisées (si dim $G = \infty$, on omet la condition (12); voir remarque p. 263).

Nous admettons que $G \neq X$, car dans le cas contraire notre théorème se réduit à un théorème connu[1]). Il existe donc pour chaque i un couple de points q_i, a_i tel que

$$q_i \in G_i, \quad a_i \in X - G, \quad |a_i - q_i| < \varrho(G_i, X - G) + 1/i.$$

Faisons correspondre à q_i le point $f_0(q_i)$ ayant $1/i$ comme l'abscisse et ayant toutes les autres coordonnées identiques à celles de $f(a_i)$. En posant $f_0(x) = f(x)$ pour $x \in X - G$, la fonction $f_0(x)$ est continue sur l'ensemble $X - G + q_1 + q_2 + \dots$ En effet, la suite $q_1, q_2, \dots$ formant en vertu de (13) un ensemble isolé, il s'agit de démontrer que la condition $\lim_{i=\infty} q_{j_i} = a \in (X - G)$ entraîne $\lim_{i=\infty} f_0(q_{j_i}) = f_0(a)$, c. à d. qu'elle entraîne $\lim_{i=\infty} f(a_{j_i}) = f(a)$, ou encore: que $\lim_{i=\infty} |a_{j_i} - a| = 0$.

Or, cette dernière égalité résulte des inégalités:

$$|a_{j_i} - a| \leqslant |a_{j_i} - q_{j_i}| + |q_{j_i} - a|,$$

$$|a_{j_i} - q_{j_i}| < \varrho(G_{j_i}, X - G) + 1/j_i \leqslant |q_{j_i} - a| + 1/j_i$$

et de la formule $\lim_{i=\infty} q_{j_i} = a$.

La continuité de la fonction $f_0(x)$ établie, appliquons le théorème 1 (en y remplaçant f par f_0) et posons $Z = Y + \sum p_{i_0} \dots p_{i_k}$, la sommation étant étendue aux systèmes $i_0, \dots, i_k$ tels que $G_{i_0} \cdot \ldots \cdot G_{i_k} \neq 0$.

Les points de Y ayant l'abscisse 0 et ceux des simplexes $p_{i_0} \dots p_{i_k}$ ayant l'abscisse positive, les simplexes sont disjoints de Y et Y est fermé dans Z. Si dim $G = n$, on a (voir remarque 1, p. 265):

$$\dim(Z - Y) = \dim \sum p_{i_0} \dots p_{i_k} \leqslant n.$$

Reste à prouver que les simplexes $p_{i_0} \dots p_{i_k}$ constituent un polytope infini, c. à d. que $S_0, S_1, \dots$ désignant la suite de tous ces simplexes (rangée d'une façon arbitraire), on a $\bar{S}_0 \cdot \mathrm{Ls}\, S_i = 0$.

Soit $1/k$ la plus petite abscisse des sommets du simplexe S_0 (donc la plus petite abscisse des points du simplexe $\bar{S}_0$ tout entier). D'après (13) aucun p_i ne peut être sommet d'une infinité des simplexes S_j. Il existe, par conséquent, un indice m tel que, pour

[1]) au „Überführungssatz" de M. Alexandroff. Voir p. 259, renvoi 2.

$j > m$, aucun parmi les points $p_1, \ldots, p_k$ n'est un sommet de S_j. Il en résulte que tous les sommets de S_j, donc tous les points de S_j, ont l'abscisse $\leqslant \frac{1}{k+1}$. On en conclut immédiatement que $\bar{S}_0 \cdot \mathrm{Ls}\, S_i = 0$.

Remarque. Les simplexes $p_{i_0} \ldots p_{i_k}$ sont, en général, *singuliers*. Mais on peut s'arranger de façon qu'ils ne le soient pas; plus encore: que, pour chaque i, les sommets $p_1, \ldots, p_i$ soient linéairement indépendants. On définit à ce but $f_0(q_i)$ comme un point dont toutes les coordonnées sauf l'abscisse (qui est égale à $1/i$) coïncident avec les coordonnées d'un point convenablement choisi dans l'espace de Hilbert dans l'entourage de $f(a_i)$.

La série $\Sigma p_{i_0} \ldots p_{i_k}$ représente alors une décomposition *simpliciale* du polytope infinie qu'elle définit.

Sur les espaces localement connexes et péaniens en dimension n *).

Par

Casimir Kuratowski (Warszawa).

On doit à MM. Alexander et Lefschetz la notion importante de la connexité locale en dimension n [1]): un espace (métrique séparable) Y [2]) est dit *localement connexe au point p en dimension n*, lorsqu'à chaque $\varepsilon > 0$ correspond un $\eta > 0$ tel que, pour chaque fonction continue $y = f(x)$, définie sur la sphère S_n [3]) et assujettie à la condition $|f(x) - p| < \eta$ [4]), il existe une fonction continue $\varphi(x, t)$, où $0 \leqslant t \leqslant 1$, satisfaisant aux conditions

$$\varphi(x, 0) = f(x), \quad \varphi(x, 1) = p, \quad |\varphi(x, t) - p| < \varepsilon.$$

Les espaces localement connexes en toute dimension $\leqslant n$ peuvent être caractérisés par la condition suivante (v. théorème 1 où cette condition s'exprime par l'inégalité $c_l(Y) \geqslant n$): chaque fonction continue $f(x)$, définie sur un sous-ensemble fermé A d'un espace métrique séparable arbitraire X et dont les valeurs appartiennent à Y, peut être étendue sur un entourage de A (sans que ses valeurs quittent l'espace Y), pourvue que $\dim (X - A) \leqslant n + 1$.

*) Présenté à la Soc. Pol. Math. à Varsovie, le 14 Déc. 1934.

[1]) S. Lefschetz, Ann. of Math. 35 (1934), p. 119.

[2]) Les espaces X, Y etc. considérés dans cet ouvrage sont toujours supposés métriques séparables. M. Lefschetz fait, dans la définition de la connexité locale, l'hypothèse de compacité. Nous l'omettons en vue surtout des applications aux espaces fonctionnels (qui, en général, ne sont pas compacts).

[3]) S_n est l'ensemble des points de l'espace cartésien à $n+1$ dimensions tels que $x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1$. En remplaçant dans cette égalité le symbole $=$ par $\leqslant$, on obtient le sphéroïde à $n+1$ dimensions, que nous désignons par Q_{n+1}.

En particulier S_0 se compose de deux points, S_{-1} est l'ensemble vide. Q_0 se compose d'un seul point.

[4]) $|q - p|$ désigne la distance entre q et p.