où $E(a)$ désigne la translation de l'ensemble E de longueur a (c'est-à-dire l'ensemble de tous les nombres réels x, tels que $x-a \epsilon E$) et où la sommation $\sum_{a \epsilon M}$ s'étend à tous les éléments a de M.

Admettons, d'autre part, que la droite soit une somme de moins que $\mathfrak{m}$ ensembles, dont chacun est superposable par translation ou rotation avec l'ensemble E. Désignons par E^* l'ensemble symétrique de E par rapport au point 0. Il existe donc deux ensembles de nombres réels N_1 et N_2, tels que $\overline{\overline{N}}_1+\overline{\overline{N}}_2<\mathfrak{m}$ et

$$D=\sum_{b \epsilon N_1} E(b)+\sum_{b \epsilon N_2} E^*(b). \tag{3}$$

D'après (3) on a évidemment pour a réels, et, en particulier, pour $a \epsilon M$:

$$D=\sum_{b \epsilon N_1} E(b+a)+\sum_{b \epsilon N_2} E^*(b+a),$$

d'où

$$0 \epsilon \sum_{b \epsilon N_1} E(b+a)+\sum_{b \epsilon N_2} E^*(b+a) \quad \text{pour} \quad a \epsilon M. \tag{4}$$

La somme figurant dans la formule (4) contenant $\overline{\overline{N}}_1+\overline{\overline{N}}_2<\mathfrak{m}$ termes, on conclut, d'après $\overline{\overline{M}}=\mathfrak{m}$, qu'il existe deux nombres distincts de M, soient a_1 et a_2, tels que le nombre 0 appartient pour $a=a_1$ et pour $a=a_2$ au même terme de cette somme, c'est-à-dire qu'il existe un nombre $b \epsilon N_1+N_2$, tel qu'on a ou bien

$$b \epsilon N_1, \quad 0 \epsilon E(b+a_1) \quad \text{et} \quad 0 \epsilon E(b+a_2), \tag{5}$$

ou bien

$$b \epsilon N_2, \quad 0 \epsilon E^*(b+a_1) \quad \text{et} \quad 0 \epsilon E^*(b+a_2) \tag{6}$$

(les formules (5) et (6) pouvant d'ailleurs être vraies à la fois).

Or, d'après (2) et $a_1 \neq a_2$, on a $E(a_1)E(a_2)=0$, donc aussi $E^*(a_1)E^*(a_2)=0$, ce qui donne évidemment pour tout b réel:

$$E(b+a_1)E(b+a_2)=0 \quad \text{et} \quad E^*(b+a_1)E^*(b+a_2)=0,$$

ce qui est incompatible avec chacune des formules (5) et (6).

L'hypothèse que la droite est une somme de moins que $\mathfrak{m}$ ensembles, dont chacun est superposable par translation ou rotation avec E, implique donc une contradiction.

Notre théorème est ainsi démontré.

Quelques rétractes singuliers.

Par

Karol Borsuk (Warszawa).

Dans cette Note je m'occupe d'une simple opération sur les ensembles compacts en soi qui nous conduit à la construction des rétractes absolus et des rétractes absolus de voisinage [1]) dont les propriétés topologiques montrent des singularités remarquables [2]).

1. Soient A et B deux ensembles métriques, compacts en soi, disjoints et f une fonction continue définie dans un sous-ensemble fermé C de A aux valeurs appartenants à B. Nous avrrivons, bien entendu, à une décomposition semi-continue [3]) de l'ensemble $A+B$ en considérant comme tranches les ensembles de la forme $(x)+f^{-1}(x)$ [4]), où $x \epsilon f(C)$, et les points individuels de $A+B-(C+f(C))$. Cette décomposition sera designée dans la suite par (A, B, f) et son hyper-espace par $A \underset{f}{+} B$. La fonction qui fait correspondre à tout $x \epsilon A+B$ la tranche de la décomposition (A, B, f) contenante x sera désignée par $\Phi_{A,B,f}(x)$; elle transforme $A+B$ en $A \underset{f}{+} B$ d'une manière continue [5]) en transformant l'ensemble $A-C$ et aussi l'en-

[1]) L'ensemble $A \subset E$ est dit *rétracte de* E, lorsqu'il existe une fonction continue f définie dans E et satisfaisant aux conditions: 1° $f(E)=A$, 2° $f(x)=x$ pour tout $x \epsilon A$. L'ensemble métrique et compact en soi A est dit *rétracte absolu* (resp. *rétracte absolu de voisinage*) si, pour tout espace métrique $M \supset A$, l'ensemble E est un rétracte de M (resp. un rétracte d'un certain voisinage de A dans M).

[2]) Les exemples considerés dans cette Note sont construits pour répondre à certains problèmes posés par M. C. Kuratowski concernant la caractérisation des „espaces péaniens en dimension n" par des propriétés intrinsèques. Voir la Note de M. C. Kuratowski: *Sur les espaces localement connexes et péaniens en dimensions* n, ce volume, p. 267—287.

[3]) Quant à la définition d'une décomposition semi-continue et son hyper-espace voir C. Kuratowski, Fund. Math. 11 (1928), p. 169—185.

[4]) $f^{-1}(y)$ désigne l'ensemble de tous les x tels que $f(x)=y$.

[5]) C. Kuratowski, l. c. p. 173, th. III.

semble B par homéomorphie. On a en outre l'égalité $A \underset{f}{+} B = \Phi_{A,B,f}(A-C) + \Phi_{A,B,f}(B)$, où le premier sommande est ouvert et le second fermé dans $A \underset{f}{+} B$. Il en résulte d'après le „Summensatz“ [6]) de MM. K. Menger et P. Urysohn que

$$\dim (A \underset{f}{+} B) = \operatorname{Max} [\dim (A-C), \dim B].$$

Remarque. Soient A et B deux ensembles métriques compacts en soi, disjoints ou non, et f une fonction transformant un sous-ensemble fermé C de A en l'ensemble B tout entier. Désignons par h une homéomorphie transformant B en un ensemble B' tel que $A \cdot B' = 0$. En posant $f'(x) = hf(x)$ pour tout $x \in C$, on constate sans peine que l'espace $A \underset{f'}{+} B'$ est homéomorphe à l'hyper-espace de la décomposition semi-continue de A dont les tranches sont les ensembles $f^{-1}(y)$, où $y \in B$, et les points individuels de $A - B$. Il en résulte que toutes les relations entre les propriétés topologiques (intrinsèques) des ensembles A, B' et $A \underset{f'}{+} B'$ subsistent, si on remplace ces ensembles respectivement par les ensembles A, B et l'hyper-espace de la décomposition mentionnée. En particulier, les thèses du théorème (T) et du corollaire (C) restent valables si on y remplace la condition $A \cdot B = 0$ par la condition $B = f(C)$ et l'espace $A \underset{f'}{+} B$ par l'hyper-espace en question.

2. ***Théorème* (T).** *Soient A, B et C des rétractes absolus de voisinage remplissant les conditions $A \cdot B = 0$, $C \subset A$ et soit f une fonction continue transformant C en un sous-ensemble de B. Dans ces hypothèses l'ensemble $A \underset{f}{+} B$ est localement contractile* [7]).

Si, en outre, les ensembles A, B et C sont contractiles dans soi, l'ensemble $A \underset{f}{+} B$ l'est aussi.

En tenant compte du théorème d'après lequel les rétractes absolus coïncident avec les rétractes absolus de voisinage contractiles dans soi [8]) et, pour les dimensions finies, les rétractes absolus de voisinage avec les espaces compacts localement contractiles [9]), on obtient du théorème (T) le

***Corollaire* (C).** *Si A, B et C sont des rétractes absolus (resp. rétractes absolus de voisinage) de dimension finie remplissant les conditions $A \cdot B = 0$, $C \subset A$ et f est une fonction continue transformant C en un sous-ensemble de B, l'ensemble $A \underset{f}{+} B$ est aussi un rétracte absolu (resp. rétracte absolu de voisinage) de dimension égale à* $\operatorname{Max} [\dim (A-C), \dim B]$ [10]).

3. Nous commençons par la démonstration du lemme suivant:

***Lemme* (L).** *A et $C \subset A$ étant des rétractes absolus de voisinage, il existe une fonction $g(x,t)$ définie pour x parcourant un entourage fermé* [11]) *U de l'ensemble C (dans A) et pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, continue pour deux variables x et t à la fois et telle que: $g(x,0) = x$, $g(x,t) \in A$, $g(x,1) \in C$ pour tout $x \in U$ et $g(x,t) = x$ pour tout $x \in C$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$.*

De plus, dans le cas où A et C sont des rétractes absolus on peut remplacer U par A.

Démonstration. Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer [12]) que A est un sous-ensemble du „cube fondamental“ Q_ω [13])

[6]) Voir p. ex. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografje Matematyczne III, Warszawa—Lwów 1933, p. 127.

[7]) La fonction $\varphi(x,t)$ définie pour x parcourant un sous-ensemble E d'un espace M et $0 \leqslant t \leqslant 1$ *fait une contraction de E dans M vers un ensemble $E_1 \subset M$* lorsqu'elle est continue pour les deux variables x et t à la fois et remplit les conditions: $\varphi(x,0) = x$, $\varphi(x,1) \in E_1$ et $\varphi(x,t) \in M$ pour tout $x \in E$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$. L'ensemble E est dit *contractile dans M* lorsqu'il existe une fonction $\varphi(x,t)$ qui fait une contraction de E dans M vers un ensemble ne contenant qu'un seul point. L'espace M est *localement contractile en point $x \in M$* lorsque tout entourage U de x contient un entourage U_0 de x qui se laisse contracter dans U. L'espace M est dit tout court *localement contractile* lorsqu'il l'est en chaque point.

[8]) Fund. Math. 19 (1932), p. 229.

[9]) l. c. p. 240.

[10]) Soient A et B deux ensembles compacts en soi, disjoints ou non, et h une homéomorphie transformant B en un ensemble B' tel que $A \cdot B' = 0$. Posons $f(x) = h(x)$ pour tout $x \in A \cdot B$. On voit aisément que l'ensemble $A \underset{f}{+} B$ est homéomorphe à $A + B$. L'addition des ensembles peut donc être considérée du point de vue topologique comme un cas particulier de l'opération „$\underset{f}{+}$“. Il résulte alors du corollaire (C) que pour les dimensions finies la somme de deux rétractes absolus (resp. rétractes absolus de voisinage), dont la partie commune est un rétracte absolu (resp. rétracte absolu de voisinage) est aussi un rétracte absolu (resp. rétracte absolu de voisinage). Une autre démonstration de ce théorème se trouve dans la Note de M. N. Aronszajn et de moi, Fund Math. 18 (1932), p. 194 (pour les rétractes absolus) et dans ma note, Fund. Math. 19 (1932), p. 226 (pour les rétractes absolus de voisinage). Il est a noter que les démonstrations mentionnées se passent de l'hypothèse de dimension finie. La question si la thèse toute entière du corollaire (C) est vraie pour les ensembles de dimension infinie reste ouverte.

[11]) Par un entourage de l'ensemble C dans A je comprends dans cette Note chaque ensemble $U \subset A$ tel que $C \subset U - \overline{A - U}$.

[12]) En vertu du „Einbettungssatz“ de P. Urysohn, Math. Ann. 94 (1925), p. 310.

[13]) Q_ω désigne alors l'ensemble de toutes les suites $\{x_n\}$, où $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{n}$ et où la distance de deux suites $\{x_n\}$ et $\{x'_n\}$ est, par définition, égale à $\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - x'_n)^2}$.

de l'espace de Hilbert. Soit $r(x)$ une fonction rétractante un entourage V (l'entourage dans Q_ω) de A en A et $r'(x)$ une fonction rétractante un entourage U (l'entourage dans A) de C en C. Nous pouvons supposer en outre, que l'entourage U est fermé et si petit que tout segment $\overline{x\,r'(x)}$, où $x \epsilon U$, est contenu dans V. Il est évident que, dans le cas où A et C sont des rétractes absolus, on peut prendre Q_ω au lieu de V et l'ensemble A tout entier au lieu de U. Pour obtenir la fonction $g(x, t)$ remplissant les conditions demandées, il reste à poser

$$g(x,t) = r\,g'(x,t),$$

où $g'(x, t)$ est, par définition, le point qui divise le segment $\overline{x\,r'(x)}$ dans le rapport $t:\ 1-t$.

4. *Démonstration du théorème* (T). Soit $g(x, t)$ une fonction remplissant les conditions du lemme (L), définie dans un entourage fermé U de C qui coïncide avec A dans le cas où A et C sont des rétractes absolus. Posons:

(1) $$h(x,t) = g(x,t) \quad \text{pour} \quad x \epsilon U; \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

(2) $$h(x,t) = x \quad \text{pour} \quad x \epsilon B; \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Les ensembles A et B étant disjoints, la fonction $h(x, t)$ ainsi définie est continue pour les deux variables à la fois et elle remplit les conditions:

(3) $$h(x,t) \epsilon A;\ h(x,0) = x;\ h(x,1) \epsilon C \quad \text{pour} \quad x \epsilon U \text{ et } 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

(4) $$h(x,t) = x \quad \text{pour} \quad x \epsilon B + C \text{ et } 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Pour abréger les notations posons $\Phi = \Phi_{A,B,f}$ et

(5) $$\varphi(\xi,t) = \Phi h[\Phi^{-1}(\xi), t] \quad \text{pour} \quad \xi \epsilon U \underset{f}{+} B \text{ et } 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Pour un $\xi = \Phi(x)$, où $x \epsilon B + C$, l'ensemble $\Phi^{-1}(\xi)$ est contenu dans $B + C$. Il en résulte, d'après (4), l'égalité $h[\Phi^{-1}(\xi), t] = \Phi^{-1}(\xi)$ et finalement.

(6) $$\varphi(\xi,t) = \xi \quad \text{pour tout} \quad \xi = \Phi(B+C) = \Phi(B) \text{ et } 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Pour un $\xi = \Phi(x)$, où $x \epsilon U - (B + C) = U - C$ on a $\Phi^{-1}(\xi) = (x)$ et $\varphi(\xi, t) = \Phi h(x, t) \epsilon A \underset{f}{+} B$. Les valeurs de la fonction $\varphi(\xi, t)$ sont donc toujours les points individuels de l'ensemble $A \underset{f}{+} B$, c'est à dire

(7) $$\varphi(\xi,t) \epsilon A \underset{f}{+} B \quad \text{pour tout} \quad \xi \epsilon U \underset{f}{+} B \text{ et } 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Nous allons établir à présent la proposition suivante:

(8) La fonction $\varphi(\xi, t)$ et continue pour les deux variables ξ et t à la fois.

Φ étant une homéomorphie sur l'ensemble $A - C = A - (B + C)$, il suffit d'après (5) et (6) de montrer que pour toute suite $\{\xi_n\} \subset \Phi(U - C)$ convergente vers un point $\xi_0 \epsilon \Phi(C)$ et pour toute suite $\{t_n\}$, où $0 \leqslant t_n \leqslant 1$, convergente vers un t_0 la suite $\varphi(\xi_n, t_n)$ est convergente vers ξ_0.

Il vient de la définition de la fonction Φ que $\Phi^{-1}(\xi_n)$ sont des sous-ensembles de $U - C$ dont chacun ne contient qu'un seul point et pour lesquels on a [14]):

$$\operatorname{Lim\,sup} \Phi^{-1}(\xi_n) \subset \Phi^{-1}(\xi_0) \subset B + C.$$

La fonction $h(x, t)$ étant continue et remplissant la condition (4), il en résulte l'inclusion

$$\operatorname{Lim\,sup} h[\Phi^{-1}(\xi_n), t_n] \subset \Phi^{-1}(\xi_0),$$

d'où enfin

$$\lim_{n=\infty} \Phi h[\Phi^{-1}(\xi_n), t_n] = \xi_0,$$

c'est à dire la proposition (8) est établie.

Remarquons enfin que, d'après (3), (4) et (5), on a

(9) $$\varphi(\xi, 1) \epsilon \Phi(B + C) = \Phi(B) \quad \text{pour} \quad \xi \epsilon U \underset{f}{+} B.$$

Ceci établi, passons à la démonstration de la contractilité locale de l'ensemble $A \underset{f}{+} B = \Phi(A + B)$. La fonction Φ transformant l'ensemble localement contractile $A - C$ par homéomorphie en un sous-ensemble ouvert de $\Phi(A + B)$. il ne reste qu'à démontrer la contractilité locale de $A \underset{f}{+} B$ en tout point de l'ensemble

$$(A \underset{f}{+} B) - \Phi(A - C) = \Phi(B).$$

Soit donc G un entourage (dans $A \underset{f}{+} B$) d'un point $\xi_0 = \Phi(x_0)$, où $x_0 \epsilon B$. L'ensemble $\Phi(B)$ étant (comme homéomorphe à un rétracte absolu de voisinage B) localement contractile, il existe un entourage G' (dans $\Phi(B)$) du point ξ_0 contractile dans G. En tenant compte des

[14]) Voir C. Kuratowski, Fund. Math. 11 (1928), p. 172. Quant à la définition de la limite supérieure d'une suite d'ensembles voir l. c. p. 169.

propriétés (6), (7), (8) et (9) de la fonction φ, on conclut qu'il existe un entourage G_0 du point ξ_0 dans $A \underset{f}{+} B$ remplissant les conditions: $G_0 \subset U$, $\varphi(G_0, 1) \subset G'$ et $\varphi(G_0, t) \subset G$ pour tout $0 \leqslant t \leqslant 1$. La fonction φ fait alors dans G une contraction de l'entourage G_0 du point x_0 vers l'ensemble $\varphi(G_0, 1)$. Ce dernier ensemble étant (comme contenu dans G') contractile dans G, la démonstration de la contractilité locale de $A \underset{f}{+} B$ est finie.

Pour achever la démonstration du théorème (**T**), il reste à démontrer que dans le cas où A, B et C sont des rétractes absolus, l'ensemble $A \underset{f}{+} B$ est contractile dans soi-même. Dans ce cas on a par hypothèse $U = A$, la fonction φ est donc définie pour tout $\xi \epsilon A$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$. Cela implique, en raison de (6), (8) et (9), qu'elle fait une contraction de $A \underset{f}{+} B$ dans soi vers l'ensemble $\Phi(B)$ étant (comme homéomorphe au rétracte absolu B) contractile dans soi-même.

Notre théorème est ainsi completèment démontré.

5. Définitions. Un espace compact E sera dit *membrane homotopique* (resp. *membrane homologique*) *en dimension* m pour son sous-ensemble fermé A, lorsque tout sous-ensemble fermé de A de dimension $\leqslant m$ est contractile dans E (resp. tout vrai cycle [15]) à m dimensions de A est homologue à zéro dans E). L'ensemble E sera dit tout court *membrane homotopique* (resp. *membrane homologique*) pour A, lorsqu'il l'est en toutes les dimensions à la fois.

[15]) Quant à la définition d'un „vrai cycle à m dimensions de A" et les autres notions de la topologie combinatoire voir p. ex. P. Alexandroff, Dimensionstheorie. Ein Beitrag zur Geometrie der abgeschlossen Mengen, Math. Ann. 106 (1932), p. 178. Il est cependant à remarquer que j'emploie ici le terme „homologue à zéro" dans le sens „berandet" et non dans le sens „homolog Null" de M. Alexandroff. Outre les vrais cycles „nach variablem Modul" de M. Alexandroff nous envisageons ici les vrais cycles plus généraux de la forme $\{z_n^{(m)}\}$, où $z_n^{(m)}$ est un cycle m-dimensionnel dont les sommets appartiennent à A, les diamètres des simplexes tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$ et dont les coefficients sont des éléments d'un groupe abelien quelconque $\mathfrak{A}_n$, qui dépend en général de n. Pour éviter la situation exceptionnelle dans le cas $m = 0$, nous comprenons toujours par un cycle 0-dimensionnel $z_m^{(0)}$ un cycle dont la somme des coefficients disparaît (dans le sens établi dans le groupe $\mathfrak{A}_n$).

Les ensembles qui sont des membranes homologiques en dimension m pour eux-mêmes coïncident avec les ensembles *acycliques* en dimension m au sens de ma note de Fund. Math. 21 (1933), p. 95.

Il est à noter que toute membrane homotopique pour A est une membrane homologique pour A [16]); une membrane homologique peut cependant ne pas être une membrane homotopique [17]). L'ensemble que nous construisons dans le numéro **7** nous fournit un exemple d'un rétracte absolu de voisinage qui constitue pour soi-même une membrane homotopique en dimension m, mais pas une membrane homologique en cette dimension.

Les notions des membranes et la notion de l'irréductibilité [18]) nous conduisent aux notions des membranes irréductibles homotopiques et homologiques [19]) en dimension m, resp en toutes les dimensions à la fois. Il est à remarquer que, d'après les théorèmes généraux [20]), une membrane homologique (resp une membrane homologique en dimension m) pour A contient une membrane irréductible du même genre La question analogue pour les membranes homotopiques reste ouverte.

Nous appliquons maintenant le corollaire (**C**) à la construction, pour tout couple (m, n) des nombres naturels satisfaisant à l'inégalité $2 \leqslant m < n$, des ensembles $\mathfrak{A}(m,n)$ et $\mathfrak{B}(m,n)$ aux propriétés suivantes:

$\mathfrak{A}(m, n)$ est un rétracte absolu de dimension n qui constitue une membrane homologique irréductible pour une surface sphérique $(m-1)$-dimensionnelle [21]).

[16]) Ceci résulte p ex du raisonnement qui se trouve dans ma note „Zur kombinatorischen Eigenschaften der Retrakte", Fund. Math. 21 (1933), p. 92—95.

[17]) Ainsi p. ex. la fermeture de la courbe $y = \sin x$, où $0 < x < 1$, constitue une membrane homologique pour soi-même qui n'est pas, bien entendu, une membrane homotopique. On parvient à un autre exemple de ce genre en prenant la surface T d'un tore géométrique, dont on a enlevé les points intérieurs d'une pétite sphère de centre $c \epsilon T$. La surface qui reste est une membrane homologique, mais pas homotopique pour la circonférence constituant sa frontière. Voir p. ex. H. Seifert et W. Threlfall, Lehrbuch der Topologie, Leipzig u. Berlin 1934, Teubner, p. 174.

[18]) Voir p. ex. S. Janiszewski, Thèse, Paris 1911, p. 7.

[19]) Comp. la notion de „irreduzible Membran" de M. P. Alexandroff, Annals of Math. 30 (1928), p. 179.

[20]) A savoir, d'après le théorème selon lequel un vrai cycle homologue à zéro dans chacun des espaces compacts E_n qui constituent une suite décroissante est homologue à zéro aussi dans l'espace $E = \prod_{n=1}^{\infty} E_n$ (voir ma note O zagadnieniu topologicznego scharakteryzowania sfer euklidesowych, Wiadomości Matematyczne 38 (1934), p. 17) et d'après le théorème bien connu de M. L. E. J. Brouwer, concernant l'existence des ensembles irréductibles par rapport à une certaine propriété. Voir L. E. J. Brouwer, Proc. Acad. Amsterdam 14 (1921).

[21]) Par une surface sphérique $(m-1)$-dimensionnelle j'entends un ensemble homéomorphe à la surface d'une sphère euclidienne à m dimensions.

$\mathfrak{B}(m,n)$ est un rétracte absolu de voisinage de dimension n, dont les nombres de Betti[22]) sont ceux d'une surface sphérique m-dimensionnelle et qui constitue une membrane homotopique pour chacun de ses vrais sous-ensembles fermés.

6. Construction de l'ensemble $\mathfrak{A}(m,n)$. Soit L un segment rectiligne situé dans l'intérieur d'une sphère euclidienne m-dimensionnelle Q_m et f une fonction continue transformant L en une sphère euclidienne n-dimensionnelle Q_n, n'ayant pas de points communs avec Q_m. L'ensemble

$$\mathfrak{A}(m,n) = Q_m \underset{f}{+} Q_n$$

est, d'après le corollaire (C), un rétracte absolu de dimension n. En tenant compte du fait que $\Phi = \Phi_{Q_m, Q_n, f}$ est une homéomorphie dans $Q_m - L$, on conclut que la surface $S_{m-1} \subset Q_m - L$ de la sphère Q_m est transformée par Φ en une surface sphérique $(m-1)$-dimensionnelle $\Phi(S_{m-1}) \subset Q_m \underset{f}{+} Q_n$. Il ne reste qu'à démontrer qu'aucun vrai sous-ensemble fermé E de $Q_m \underset{f}{+} Q_n$ ne peut constituer une membrane homologique pour $\Phi(S_{m-1})$. En tenant compte du fait que pendant une rétraction d'un espace compact les vrais cycles homologues à zéro dans cet espace sont transformés en vrais cycles homologues à zéro dans le rétracte[16]) et les vrais cycles situés dans le rétracte sont transformés par identité, il suffit de montrer que l'inclusion

$$\Phi(S_{m-1}) \subset E \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{A}(m,n), \tag{10}$$

où E est un ensemble fermé entraîne l'existence d'une fonction rétractante E en $\Phi(S_{m-1})$.

Le segment L étant non-dense dans Q_m, il existe pour chaque $x \in L$ une suite $\{x_n\} \subset Q_m - L$ convergente vers x. La fonction Φ étant continue, il en résulte $\Phi(x_n) \to \Phi(x)$, où $\Phi(x_n) \in \Phi(Q_m - L) = \mathfrak{A}(m,n) - \Phi(L + Q_n)$. L'ensemble $\Phi(L) = \Phi(L + Q_n)$ est donc non-dense dans $\mathfrak{A}(m,n)$. L'ensemble E étant fermé, il en résulte, d'après (10), qu'il existe un point $x_0 \in Q_m - L$ tel que $\Phi(x_0) \in \mathfrak{A}(m,n) - E$.

[22]) Quant à la définition des nombres de Betti pour un espace compact quelconque voir p. ex. S. Lefschetz, Topology, New York 1930, p. 323—334.

Désignons maintenant pour tout $x \in Q_m - (x_0)$ par $p(x)$ la projection du point x du centre x_0 sur la surface sphérique S_{m-1}. L'ensemble $p(L)$ étant un arc simple, il existe un point $x_1 \in S_{m-1} - p(L)$ et un $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble

$$M = \underset{x}{E}[x \in S_{m-1};\ \varrho(x, x_1) \geqslant \varepsilon]$$

constitue un entourage de $p(L)$ (dans S_{m-1}) homéomorphe, bien entendu, avec une sphère euclidienne $(m-1)$-dimensionnelle. L'ensemble $p^{-1}(M)$ contient alors un entourage (dans Q_m) fermé K du segment L. Posons

$$\alpha(\xi) = \Phi\, p\, \Phi^{-1}(\xi) \quad \text{pour tout} \quad \xi \in \Phi(\overline{Q_m - K}).$$

On voit aisément que α est une fonction rétractante l'ensemble $\Phi(\overline{Q_m - K}) \cdot E$ en surface $\Phi(S_{m-1})$ où, d'après l'inclusion évidente

$$\Phi(\overline{Q_m - K})\ \overline{(E - \Phi(\overline{Q_m - K}))} \subset \Phi(K),$$

la frontière de l'ensemble $\Phi(\overline{Q_m - K}) \cdot E$ (frontière relative à E) est transformé par α en un sous-ensemble de l'ensemble $\Phi(M)$. Ce dernier ensemble étant un rétracte absolu (comme homéomorphe à M), on conclut[23]) que α se laisse prolonger d'une façon continue sur l'ensemble E tout entier de la manière que la fonction prolongée n'admet que les valeurs de $\Phi(S_{n-1})$. Ce prolongement constitue, bien entendu, une fonction rétractante E en $\Phi(S_{m-1})$, c. q. f. d.

7. Construction de l'ensemble $\mathfrak{B}(m,n)$. Soit L un arc simple situé sur la surface S_m d'une sphère euclidienne de dimension $m+1$ et f une fonction continue transformant L en une sphère euclidienne n-dimensionnelle Q_n, n'ayant aucun point commun avec S_m. Les ensembles S_m, Q_n et L étant des rétractes absolus de voisinage, on conclut d'après le corollaire (C) que l'ensemble

$$\mathfrak{B}(m,n) = S_m \underset{f}{+} Q_n$$

est aussi un rétracte absolu de voisinage.

Posons pour un $x_0 \in S_m - L$ et $\varepsilon > 0$:

$$M(x_0, \varepsilon) = \underset{x}{E}[x \in S_m;\ \varrho(x, x_0) \geqslant \varepsilon],$$
$$N(x_0, \varepsilon) = \underset{x}{E}[x \in S_m;\ \varrho(x, x_0) \leqslant \varepsilon].$$

[23]) Fund. Math. 17 (1931); p. **157** et **158**.

Pour un $\varepsilon < \varrho(x_0, L)$ l'arc L est contenu dans l'intérieur de $M(x_0, \varepsilon)$. En posant $\Phi = \Phi_{S_m, Q_n, f}$ on a l'égalité

$$\mathfrak{B}(m, n) = [M(x_0, \varepsilon) \underset{f}{+} Q_n] + \Phi[N(x_0, \varepsilon)]. \tag{11}$$

D'après le corollaire (C), le premier sommande de cette décomposition est un rétracte absolu. La fonction Φ étant une homéomorphie sur l'ensemble $S_m - L \supset N(x_0, \varepsilon)$, le deuxième sommande est aussi un rétracte absolu ayant comme partie commune avec le premier sommande l'ensemble $\Phi[M(x_0, \varepsilon) \cdot N(x_0, \varepsilon)]$, c. à d. une surface sphérique $(m-1)$-dimensionnelle. Les rétractes absolus étant acycliques [24]), il en résulte, d'après la formule bien connue de MM. Mayer, Vietoris et Čech [25]) concernante les propriétés de la homologie de la somme de deux espaces compacts, que les nombres de Betti de l'ensemble $\mathfrak{B}(m, n)$ coïncident avec les nombres correspondants d'une surface sphérique m-dimensionnelle.

Reste à prouver que $\mathfrak{B}(m, n)$ constitue une membrane homotopique pour chacun de ses vrais sous-ensembles fermés. Par un raisonnement complètement analogue à celui qui se trouve dans le numéro précédent on constate que pour un vrai sous-ensemble fermé E de $\mathfrak{B}(m, n)$ il existe un point $x_0 \in S_m - L$ tel que $\Phi(x_0) \in \mathfrak{B}(m, n) - E$. Pour un ε suffisament petit, les ensembles E et $\Phi[N(x_0, \varepsilon)]$ sont alors disjoints d'où, en vertu de la formule (11), on obtient $E \subset M(x_0, \varepsilon) \underset{f}{+} Q_n$. L'ensemble $M(x_0, \varepsilon) \underset{f}{+} Q_n$ est, d'après le corollaire (C) un rétracte absolu, et parsuite [26]) une membrane homotopique pour E. A plus forte raison, l'ensemble $\mathfrak{B}(m, n) \supset E$ est une membrane homotopique pour E, c. q. f. d.

[24]) Fund Math. 21 (1933), p. 95.

[25]) Dans le cas des polytopes la formule mentionnée est démontrée par M. W. Mayer dans Monatsh. f. Math. u. Phys. 36 (1929), p. 40 et ensuite, dans une forme plus forte, par M. L. Vietoris dans Monatsh. f. Math. u. Phys. 37 (1930), p. 162. Le cas des espaces arbitraires était traité par M. E. Čech dans Fund. Math. 19 (1932), p. 178. En particulier, si les sommandes A et B sont des espaces compacts acycliques en toutes les dimensions, la formule de MM. Mayer—Vietoris—Čech prend la forme suivante: $p_1(A+B) = p_0(A \cdot B) - 1$ et $p_{r+1}(A+B) = p_r(A \cdot B)$ pour $r = 1, 2, \ldots$ Dans le cas où l'ensemble $A+B$ est connexe et $A \cdot B$ est une surface sphérique $(m-1)$-dimensionnelle, il vient: $p_0(A+B) = 1$; $p_1(A+B) = 0$; $p_m(A+B) = p_{m-1}(A \cdot B) = 1$ et $p_{r+1}(A+B) = p_r(A \cdot B) = 0$ pour $0 \neq r \neq m-1$, c. à d. les nombres de Betti de $A+B$ coïncident avec ceux d'une surface sphérique m-dimensionnelle.

[26]) Fund. Math. 19 (1932), p. 235, exemple 4.

Sur le prolongement des fonctions continues et les transformations en polytopes.

Par

Casimir Kuratowski (Warszawa).

Le résultat principal de cette note se rattache, d'une part, à un théorème, dû à M. Tietze [1]) sur le prolongement des fonctions continues, définies sur un sous-ensemble fermé d'un espace métrique et, d'autre part, à un théorème, dû à M. Alexandroff [2]), sur les transformations des espaces métriques en polytopes. Nous allons démontrer, en effet, qu'étant donnée une fonction continue $y = f(x)$ définie sur un sous-ensemble fermé A d'un espace métrique séparable X, on peut étendre la définition de cette fonction sur l'espace X tout entier en ajoutant à l'espace des y un polytope infini [3]) dont la dimension ne dépasse pas celle de l'ensemble $X - A$ (théorème 2). On peut, en outre, assujettir la transformation de l'espace X à quelques conditions supplémentaires analogues aux conditions qui inter-

[1]) H. Tietze, Journ. f. Math. 145 (1915), p. 9—14 et F. Hausdorff, Math. Zft. 5 (1919), p. 296.

[2]) P. Alexandroff, C. R. Paris t. 183 (1926), p. 640 et Ann. of Math. 30 (1928), p. 6 et ma note Fund. Math. 20 (1933), p. 191—196 ou *Topologie* I, p. 93.

[3]) Un *polytope infini* est un ensemble de la forme

$$P = \overline{S}_1 + \overline{S}_2 + \ldots \quad \text{où} \quad \overline{S}_i \cdot \mathrm{Ls}\, S_m = 0,$$

où S_i est un simplexe (ouvert) et où $\mathrm{Ls}\, S_m$ désigne la limite supérieure (topologique) de la suite $\{S_m\}$.

Il en résulte qu'aucun point de P n'est un point d'accumulation d'une suite de points appartenant à des différents termes de la suite $\{S_m\}$. Un polytope infini est ainsi localement un polytope fini.

Un ensemble ouvert dans un polytope fini est un polytope infini.

Bien entendu, un polytope infini peut être de dimension infinie: lorsque la dimension des simplexes S_i est illimitée.