alle *dasselbe* Definitionsgebiet $\mathfrak{F}_n(M_1)$ und deren Normen lassen dort wegen (36) eine gemeinsame Schranke zu.

Mithin läßt sich eine (mitsamt den Ableitungen bis zur Ordnung $n+2$ einschließlich) konvergente Folge u_{h_g} herausgreifen; die Grenzfunktion löst (4) [47].

[47]) Systeme von quasilinearen Differentialgleichungen können nach derselben Methode erledigt werden.

Es können auch in den Koeffizienten Integrale vorkommen, z. B. $\int z_s\, dx_i$, $\int \frac{\partial z_s}{\partial x_k} dx_i$ etc. Da nun eine beliebige nichtlineare Differentialgleichung durch Differentiation in ein solches immer lösbares quasilineares System übergeht, so wäre im allgemeinen Falle nur noch zu zeigen, daß die Lösung dieses letzten Systems der ursprünglichen Gleichung äquivalent ist.

Lwów, 14 November 1934.

Sur une propriété de la droite.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Une conséquence immédiate d'une proposition que j'ai démontré dans le t. XXI des *Fundamenta Mathematicae*, p. 39 [1]) est le théorème suivant:

Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe un ensemble plan E, tel que le plan est une somme de $2^{\aleph_0}$ ensembles disjoints, dont chacun est superposable par translation avec E et en même temps le plan est une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles, dont chacun est superposable par translation ou rotation avec E.

Le but de cette Note est de démontrer qu'un théorême de ce genre ne subsiste pas pour la droite. Je prouverai notamment (sans admetre que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$) ce

Théorème: *Soit $\mathfrak{m}$ un nombre cardinal donné quelconque. Si la droite est décomposée en $\mathfrak{m}$ ensembles disjoints dont chacun est superposable par translation avec un ensemble E, la droite n'est pas une somme de moins que $\mathfrak{m}$ ensembles, dont chacun soit superposable par translation ou rotation avec E.*

Démonstration.

Soit $\mathfrak{m}$ un nombre cardinal donné et soit E un ensemble linéaire tel que l'ensemble D de tous les points de la droite (axe d'abscisses) est une somme de $\mathfrak{m}$ ensembles disjoints, dont chacun est superposable par translation avec l'ensemble E. Il existe donc un ensemble de nombres réels M de puissance $\mathfrak{m}$, tel que

$$D=\sum_{a\,\epsilon\, M} E(a) \tag{1}$$

et

$$E(a)\,E(b)=0 \quad \text{pour} \quad a\,\epsilon\, M,\ b\,\epsilon\, M,\ a \neq b, \tag{2}$$

[1]) Cf. aussi mon livre *Hypothèse du continu* (Warszawa 1934, Monografje Matematyczne t. IV), p. 100.

où $E(a)$ désigne la translation de l'ensemble E de longueur a (c'est-à-dire l'ensemble de tous les nombres réels x, tels que $x-a\,\epsilon\,E$) et où la sommation $\sum\limits_{a\epsilon M}$ s'étend à tous les éléments a de M.

Admettons, d'autre part, que la droite soit une somme de moins que $\mathfrak{m}$ ensembles, dont chacun est superposable par translation ou rotation avec l'ensemble E. Désignons par E^* l'ensemble symétrique de E par rapport au point 0. Il existe donc deux ensembles de nombres réels N_1 et N_2, tels que $\overline{\overline{N}}_1+\overline{\overline{N}}_2<\mathfrak{m}$ et

$$D=\sum_{b\epsilon N_1}E(b)+\sum_{b\epsilon N_2}E^*(b). \tag{3}$$

D'après (3) on a évidemment pour a réels, et, en particulier, pour $a\,\epsilon\,M$:

$$D=\sum_{b\epsilon N_1}E(b+a)+\sum_{b\epsilon N_2}E^*(b+a),$$

d'où

$$0\,\epsilon\sum_{b\epsilon N_1}E(b+a)+\sum_{b\epsilon N_2}E^*(b+a) \quad \text{pour} \quad a\,\epsilon\,M. \tag{4}$$

La somme figurant dans la formule (4) contenant $\overline{\overline{N}}_1+\overline{\overline{N}}_2<\mathfrak{m}$ termes, on conclut, d'après $\overline{\overline{M}}=\mathfrak{m}$, qu'il existe deux nombres distincts de M, soient a_1 et a_2, tels que le nombre 0 appartient pour $a=a_1$ et pour $a=a_2$ au même terme de cette somme, c'est-à-dire qu'il existe un nombre $b\,\epsilon\,N_1+N_2$, tel qu'on a ou bien

$$b\,\epsilon\,N_1,\quad 0\,\epsilon\,E(b+a_1) \quad \text{et} \quad 0\,\epsilon\,E(b+a_2), \tag{5}$$

ou bien

$$b\,\epsilon\,N_2,\quad 0\,\epsilon\,E^*(b+a_1) \quad \text{et} \quad 0\,\epsilon\,E^*(b+a_2) \tag{6}$$

(les formules (5) et (6) pouvant d'ailleurs être vraies à la fois).

Or, d'après (2) et $a_1\neq a_2$, on a $E(a_1)\,E(a_2)=0$, donc aussi $E^*(a_1)\,E^*(a_2)=0$, ce qui donne évidemment pour tout b réel:

$$E(b+a_1)\,E(b+a_2)=0 \quad \text{et} \quad E^*(b+a_1)\,E^*(b+a_2)=0,$$

ce qui est incompatible avec chacune des formules (5) et (6).

L'hypothèse que la droite est une somme de moins que $\mathfrak{m}$ ensembles, dont chacun est superposable par translation ou rotation avec E, implique donc une contradiction.

Notre théorème est ainsi démontré.

Quelques rétractes singuliers.

Par

Karol Borsuk (Warszawa).

Dans cette Note je m'occupe d'une simple opération sur les ensembles compacts en soi qui nous conduit à la construction des rétractes absolus et des rétractes absolus de voisinage [1]) dont les propriétés topologiques montrent des singularités remarquables [2]).

1. Soient A et B deux ensembles métriques, compacts en soi, disjoints et f une fonction continue définie dans un sous-ensemble fermé C de A aux valeurs appartenants à B. Nous avrrivons, bien entendu, à une décomposition semi-continue [3]) de l'ensemble $A+B$ en considérant comme tranches les ensembles de la forme $(x)+f^{-1}(x)$ [4]), où $x\,\epsilon\,f(C)$, et les points individuels de $A+B-(C+f(C))$. Cette décomposition sera designée dans la suite par (A, B, f) et son hyper-espace par $A\underset{f}{+}B$. La fonction qui fait correspondre à tout $x\,\epsilon\,A+B$ la tranche de la décomposition (A, B, f) contenante x sera désignée par $\Phi_{A,B,f}(x)$; elle transforme $A+B$ en $A\underset{f}{+}B$ d'une manière continue [5]) en transformant l'ensemble $A-C$ et aussi l'en-

[1]) L'ensemble $A\subset E$ est dit *rétracte de* E, lorsqu'il existe une fonction continue f définie dans E et satisfaisant aux conditions: 1° $f(E)=A$, 2° $f(x)=x$ pour tout $x\,\epsilon\,A$. L'ensemble métrique et compact en soi A est dit *rétracte absolu* (resp. *rétracte absolu de voisinage*) si, pour tout espace métrique $M\supset A$, l'ensemble E est un rétracte de M (resp. un rétracte d'un certain voisinage de A dans M).

[2]) Les exemples considerés dans cette Note sont construits pour répondre à certains problèmes posés par M. C. Kuratowski concernant la caractérisation des „espaces péaniens en dimension n" par des propriétés intrinsèques. Voir la Note de M. C. Kuratowski: *Sur les espaces localement connexes et péaniens en dimensions n*, ce volume, p. 267—287.

[3]) Quant à la définition d'une décomposition semi-continue et son hyper-espace voir C. Kuratowski, Fund. Math. 11 (1928), p. 169—185.

[4]) $f^{-1}(y)$ désigne l'ensemble de tous les x tels que $f(x)=y$.

[5]) C. Kuratowski, l. c. p. 173, th. III.