La question se pose encore: *notre lemme, est-il vrai pour les ensembles E finis?* C'est, comme on voit sans peine, le cas pour les ensembles formés de deux éléments (En effet, E étant un ensemble formé de deux éléments 1 et 2, nous n'avons que 4 fonctions définies dans E et dont les valeurs appartiennent à E, notamment les fonctions $f_i(x)$ $(i=1,2,3,4)$, où $f_1(1)=f_1(2)=1$, $f_2(1)=2$, $f_2(2)=1$, $f_3(1)=f_3(2)=2$ et $f_4(1)=1$, $f_4(2)=2$, et on a $f_3(x)=f_2f_1(x)$ et $f_4(x)=f_2^2(x)$ pour $x \in E$).

Or, comme l'a démontré M. S. Eilenberg, *notre lemme est faux pour les ensembles finis contenant plus que deux éléments.*

En effet, soit n un nombre naturel $\geqslant 3$ et soit E l'ensemble formé des nombres $1,2,3,\ldots,n$. Définissons dans E trois fonctions f_1, f_2 et f_3 comme il suit:

$$f_1(1)=3,\quad f_1(2)=2,\quad f_1(3)=1,\quad f_1(k)=k \quad \text{pour} \quad 4\leqslant k\leqslant n,$$
$$f_2(1)=1,\quad f_2(2)=3,\quad f_2(3)=2,\quad f_2(k)=k \quad \text{pour} \quad 4\leqslant k\leqslant n,$$
$$f_3(k)=1 \quad \text{pour} \quad 1\leqslant k\leqslant n.$$

Admettons qu'il existe deux fonctions φ et ψ définies sur E et dont les valeurs appartiennent à E, telles que chacune des fonctions f_1, f_2 et f_3 est une superposition (d'un nombre fini) de fonctions φ et ψ. Les fonctions f_1 et f_2, en tant qu'étant à valeurs distinctes sur E, ne peuvent pas être des superpositions que des fonctions à valeurs distinctes sur E, et la fonction f_3, en tant que n'étant pas à valeurs distinctes sur E, n'est pas une superposition de fonctions à valeurs distinctes sur E.

Il en résulte qu'une de fonctions φ et ψ, soit φ, est à valeurs distinctes sur E, et l'autre, ψ, n'est pas à valeurs distinctes sur E. Donc, les fonctions f_1 et f_2 sont (sur E) des itérations de la fonction φ, soit $f_1(x)=\varphi^p(x)$ et $f_2(x)=\varphi^q(x)$ pour $x \in E$, d'où

$$f_2f_1(x)=f_1f_2(x) \quad \text{pour} \quad x \in E,$$

ce qui est impossible, puisque $f_2f_1(1)=2$ et $f_1f_2(1)=3$.

Das Anfangswertproblem einer quasilinearen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung in beliebiger Anzahl von unabhängigen Veränderlichen.

Von

J. Schauder (Lwów).

Das sgn. Cauchy'sche Anfangswertproblem für eine partielle Differentialgleichung k-ter Ordnung

$$(1) \qquad F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_i}, \ldots \frac{\partial^k z}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \ldots \partial x_n^{i_n}} \ldots\right)=0$$

besteht bekanntlich in der Lösung von (1), falls die Werte von z und deren Ableitungen bis zur Ordnung $k-1$ einschließlich auf einer $n-1$ dimensionalen Mannigfaltigkeit M_{n-1} vorgegeben sind. Der Existenzbeweis wird mittels der Cauchy'schen Majorantenmethode geführt, die aber stark einschränkende Voraussetzungen erfordert. F, die Anfangswerte, sowie die diese Anfangswerte tragende Mannigfaltigkeit M_{n-1}, müssen in den in Betracht kommenden Variablen analytisch sein. Nun gibt es für partielle Differentialgleichungen erster Ordnung auch andere Methoden, die keine Analytizität erheischen, und sich auf Voraussetzung der Differenzierbarkeit genügend hoher Ordnung beschränken. Für das Folgende möge nur die Charakteristikenmethode genannt werden. Das Bestreben, sich von der Analytizität zu befreien, ist nicht nur vom mathematischen Interesse. Für normal hyperbolische [1]) Differentialgleichungen, mit

[1]) Die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung $F(x_1,\ldots,x_n,z,\ldots p_i,\ldots r_{ik})=0$ wird normal-hyperbolisch (kurz hyperbolisch) genannt, falls die in den Hilfsvariablen ξ_i quadratische Form $\sum_{i,k} F_{r_{ik}}\xi_i\xi_k$ sich in die Normalform $\xi_n^2-\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i^2$ überführen läßt.

denen wir uns weiterhin beschäftigen werden, steht das sgn. Huyghens'sche Prinzip bekanntlich mit den Analytizitätsforderungen im Widerspruch und kann nur im reellen Gebiete auf Grund gewisser Differenzierbarkeitsannahmen erklärt werden.

Für partielle Differentialgleichungen von höherer als erste Ordnung ist heutzutage keine allgemeine Methode bekannt, die nur mit Differenzierbarkeitsvoraussetzungen arbeitet. Zwar gibt es nach Beudon, Goursat, Hadamard [2]) eine Charakteristikentheorie, doch man weiß nicht, wie man diese zu Existenzbeweisen ausnutzen soll.

Einen großen Schritt vorwärts verdankt man diesbezüglich H. Hans Lewy [3]). Dieser zeigte, daß die Lösung des Anfangswertproblems für eine *nichtlineare* hyperbolische Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(2) \qquad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

in zwei unabhängigen Variablen auch dann möglich ist, wenn man die Analytizität fallen läßt. Ja sogar mehr: die Lösung des Problems wird mittels der Charakteristikenmethode erhalten. Zu erwähnen wäre noch, daß K. Friedrichs und H. Lewy [4]) in einer gemeinsamen Arbeit dieselbe Methode auf hyperbolische Differentialgleichungen höherer Ordnungen in zwei unabhängigen Veränderlichen angewendet haben. Die Übertragung dieser Methode auf Differentialgleichungen in mehr als zwei unabhängigen Variablen ist nicht gelungen.

Für *lineare* hyperbolische Differentialgleichungen

$$\sum_{i,k=1} A_{ik}(x_1, \dots x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_j B_j(x_1, \dots x_n) \frac{\partial u}{\partial x_j} + C(x_1, \dots x_n) u = F(x_1, \dots x_n)$$

bei beliebiger Anzahl von unabhängigen Variablen entwickelte Herr J. Hadamard eine Theorie [2]), die nicht nur das Cauchy'sche Problem, aber auch viele andere löst. Sie beruht auf Konstruktion einer Grundlösung und Benutzung einer Reihe von anderen ihm

[2]) Vgl. J. Hadamard, *Le problème de Cauchy et les équations aux derivées partielles linéaires hyperboliques*, Paris (Hermann) 1932.

[3]) Math. Ann. 98 (1928), S. 171—191.

[4]) Math. Ann. 99 (1928) S. 200—201. Dasselbe Problem (auch in zwei unabhängigen Variablen) wird von F. Rellich nach der Riemann'schen Integrationsmethode behandelt [Math. Ann. 103 (1930)].

eigentümlichen tiefliegenden Hilfsmitteln, z. B. der sgn. partie finie. Eine andere Methode zur Lösung des Cauchy'schen Problems bei hyperbolischen, linearen Gleichungen findet man in der gemeinsamen Arbeit von R. Courant, K. Friedrichs und H. Lewy [5]) über Differenzengleichungen der mathematischen Physik. Eine entscheidende Rolle spielen dabei gewisse Abschätzungen, die schon früher verwendet wurden [6]).

In der vorliegenden Arbeit wird das Cauchy'sche Problem für hyperbolische *quasilineare* Differentialgleichungen zweiter Ordnung bei beliebiger Anzahl von unabhängigen Variablen gelöst, falls nur die in Betracht kommenden Funktionen genügend hoch differenzierbar sind. Es sei bemerkt, daß H. Friedrichs bereits im Jahre 1930 einen für die allgemeinste hyperbolische Differentialgleichung geltenden, mit *Differenzen* operierenden Beweis signalisierte. Eine Veröffentlichung blieb aus [7]).

Anläßlich meiner Vorlesungen über hyperbolische Differentialgleichungen im Wintersemester 1933/34 suchte ich also den Beweis selbst in Angriff zu nehmen und aus den diesbezüglichen Überlegungen ist die vorliegende Arbeit entstanden [8]). Die Durchführung aller Einzelheiten gelang nur bei quasilinearen Differentialgleichungen und die Erledigung des allgemeinen Falles ist weiter erwünscht.

Ich komme nun zu einer kurzen Inhaltsangabe.

Ich war darauf bedacht, im Gebiete der Differentialgleichungen zu bleiben. Bei Anwendungen der „à prori" Abschätzungen für lineare Gleichungen ergab sich gleich am Anfang eine Schwierigkeit. Die Schranken für höhere Ableitungen, so wie sie sich durch

[5]) Math. Ann. 100 (1928), S. 32—74. *Über partielle Differenzengleichungen der math. Phys.*

[6]) K. Friedrichs und H. Lewy, *Über die Eindeutigkeit und das Abhängigkeitsgebiet der Lösungen beim Anfangswertproblem linearer hyperbolischer Differentialgleichungen*, Math. Ann. 98 (1928). Solche Abschätzungen wurden vom etwas mehr physikalischen Standpunkte im Falle der Maxwell'schen Gleichungen von A. Rubinowicz angewendet, Phys. Zeitschr. 27 (1926), Math. Ann. 96 (1927).

[7]) Wie mich H. Friedrichs bei unserer Zusammenkunft während des Züricher Kongresses (1932) informierte, sollte der Beweis Abschätzungen obiger Art [vgl. Fußnote [6])] stark ausnutzen. Vgl. auch K. Friedrichs und H. Lewy, *Über fortsetzbare Anfangsbedingungen bei hyperbolischen Differentialgleichungen in drei Veränderlichen*, Gött. Nachr. 1932, S. 135—143.

[8]) Die Hauptresultate wurden in der Sitzung vom 13. I. 1934 der Poln. Math. Ges. (Abt. Lwów) mitgeteilt.

rohe Differentiation erzielen lassen, sind nicht scharf genug. Berücksichtigt man nämlich nur diese Schranken bei nichtlinearen Differentialgleichungen, so *fällt* man gleich aus der Funktionenklasse heraus. Dies ist eine bekannte Erscheinung, die sehr oft zutrifft, wenn man bei partiellen Differentialgleichungen z. B. mit sukzessiven Approximationen arbeitet. Im Kapitel I wird nun in dieser Hinsicht gezeigt (§§ 5—7), daß sobald man zur Abschätzung *genügend hoher* Ableitungen kommt, man über die diesbezüglichen Größen (Koeffizienten) Voraussetzungen machen muß, die weniger einschränkend sind, als dies zu vermuten wäre. Zwischenbetrachtungen über lineare Gleichungen mit analytischen Daten ist Kapitel II gewidmet. Im Kapitel III wird zur Behandlung nichtlinearer Differentialgleichungen geschritten. Um ein „Herausfallen aus der Klasse" zu vermeiden, war auch hier Vorsicht geboten. Insbesondere mußte das Definitionsgebiet der Funktionen z, sowie die zur Konkurrenz zugelassene Funktionenklasse sorgfältig gewählt werden.

ERSTES KAPITEL.

Abschätzungen für lineare hyperbolische Differentialgleichungen.

§ 1. Sei W_n [9]) ein n-dimensionaler, etwa durch die Ungleichheiten $a_i \leqslant x_i \leqslant \bar{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ näher bestimmter Quader, b_{n-1} seine untere, der Gleichung $x_n = a_n$ entsprechende Basis, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine in W_n erklärte und dort wenigstens n-mal stetig differenzierbare Funktion, $D_k f$ das Symbol für irgendeine partielle Ableitung k-ter Ordnung von f. Wir wollen mit einigen Hilfssätzen beginnen, deren Beweis keine Schwierigkeit bereitet, die aber im Folgenden wiederholt benutzt werden.

Hilfsatz I. Aus der Voraussetzung

$$\int_{W_n} \cdots \int [D_k f]^2 \, dx_1 \ldots dx_n \leqslant M^2, \quad (k = 0, 1, \ldots n) \text{ [10])} \tag{1}$$

folgt im ganzen W_n

$$|f(P)| \leqslant C \cdot M, \tag{2}$$

[9]) Die Formeln und Paragraphe werden in jedem Kapitel neu numeriert. Falls an einer Stelle die Formeln aus vorhergehenden Kapiteln benutzt werden, so wird das immer vermerkt.

[10]) Diese abgekürzte Schreibweise soll folgendermaßen verstanden werden: Alle für festes k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ sich ergebenden partiellen Ableitungen $D_k f$ sollen

wobei $C = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{\bar{a}_i - a_i}} + \sqrt{\bar{a}_i - a_i} \right)$ und P einen Punkt aus W_n bezeichnet.

Der Beweis ergibt sich leicht aus der Induktion nach n (Anzahl der unabhängigen Variablen), indem man beachtet, daß in jedem Querschnitte $x_1 = \text{Const.}$ von W_n eine zu (1) analoge Ungleichheit bestehen muß mit der Konstante $\left(\frac{1}{\sqrt{\bar{a}_1 - a_1}} + \sqrt{\bar{a}_1 - a_1} \right)^2 M^2$ statt M^2.

Die in der Formel (2) ausgedrückte Behauptung hat den Nachteil, daß die Abschätzungskonstante C *unendlich* groß wird, falls wir wenigstens eine Seite $\bar{a}_i - a_i$ Null werden lassen. Man kann aber ebenso leicht beweisen [11])

Hilfssatz I'. Wird neben der Ungleichheit (1) die Ungleichheit

$$|f(P)| \leqslant \mu; \qquad P \epsilon b_{n-1} \tag{4}$$

als erfüllt vorausgesetzt, so gilt für $P \epsilon W_n$

$$|f(P)| \leqslant \prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\bar{a}_i - a_i}} + \sqrt{\bar{a}_i - a_i} \right) (\mu + \sqrt{\bar{a}_n - a_n}) M; \quad P \epsilon W_n. \tag{5}$$

Die rechts in (5) vorkommende Konstante

$$C' = \prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\bar{a}_i - a_i}} + \sqrt{\bar{a}_i - a_i} \right) (\mu + \sqrt{\bar{a}_n - a_n})$$

bleibt *endlich*, wenn die Basis b_{n-1} festbleibt (und auch μ) und nur die Höhe $h = \bar{a}_n - a_n$ nach Null konvergiert.

Hilfsatz II [12]). Sei r eine *gegebene* natürliche Zahl. Es gibt dann eine natürliche Zahl g

$$g = \Omega(r), \quad r \leqslant g, \tag{6}$$

der in Betracht kommenden Ungleichheit genügen. Weiter bezeichnen wir mit

$$\sum_{k=0}^{s} \int_W \cdots \int [D_k f]^2 \, dx_1 \ldots dx_n$$

eine Summation über alle möglichen Ableitungen der Ordnungen von 0 bis s. Demgegenüber benutzen wir das Zeichen

$$\sum \int_W \cdots \int [D_k f]^2 \, dx_1 \ldots dx_n$$

für eine Summation der festen Ordnung k.

[11]) Die Wichtigkeit des Hilfssatzes I' wird uns erst im Kap. III klar.

[12]) Nur einen solchen Hilfssatz brauchen wir. Aus den bekannten Tonelli'schen Untersuchungen (*Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di più variabili*

die folgende Eigenschaft besitzt: Jede in W_n g-mal stetig differenzierbare Funktion $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ läßt sich als Grenze von Polynomen $\mathfrak{p}_m$ derart darstellen, daß für $j \leqslant r$ die Grenzübergänge

$$\lim_{m \to \infty} D_j \mathfrak{p}_m = D_j u; \qquad j = 0, \dots, r \tag{7}$$

in W_n gleichmäßig geschehen.

Auch hier überlassen wir den einfachen Beweis dem Leser. Es wird wieder Induktion nach n angewendet und zuletzt vom Weierstraß'schen Approximationssatze stetiger Funktionen einer Variablen Gebrauch gemacht.

Die folgende Bemerkung zum Hilfssatz II wird noch benutzt [13]). Falls die zu approximierende Funktion u sowie ihre Ableitungen bis zu Ordnungen r einschließlich sich auf der Basis b_{n-1} zu *Polynomen* in den Variablen $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ reduzieren, so kann die Approximationsfolge der Polynome $\mathfrak{p}_m$ so gewählt werden, daß auf b_{n-1}

$$D_j \mathfrak{p}_m(x_1, \dots, x_{n-1}, a_n) = D_j u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, a_n); \qquad j \leqslant r-1; \quad m = 1, 2, \dots \tag{8}$$

wird.

§ 2. Zu dem Inhalte des § 1 machen wir nun die folgende generelle Bemerkung. Sei $\mathfrak{P}_n$ ein regelmäßiger Pyramidenstumpf [14]), dessen untere größere Basis ein in der $x_n = x_n^0$ Ebene gelegener $(n-1)$-dimensionaler Würfel ist. $\mathfrak{P}_n$ kann durch analytische umkehrbar eindeutige Abbildung sofort in einen Quader W_n übergeführt werden. Sei nämlich a die Kantenlänge der größeren Basis b_{n-1}, α der Neigungswinkel der Mantelfläche zu b_{n-1}. Die Abbildung [14a])

$$x_n' = x_n \qquad x_i' = \frac{x_i}{\frac{a}{2} - (x_n - x_n^0)\sin\alpha}; \quad i \neq n \tag{9}$$

leistet das Verlangte. Dabei geht jede Ebene $x_n = \text{Const.}$ in sich über und wird nur gestreckt. Die Hilfssätze I, I', II (und Bemerkung) bleiben also richtig, wenn man in ihrem ganzen Wortlaut überall W_n durch $\mathfrak{P}_n$ ersetzt, die Voraussetzungen *beibehält* und die entsprechenden Behauptungen wie folgt ausspricht:

Hilfssatz I [15]). Es gibt eine Konstante C so, daß

$$|f(P)| \leqslant C \cdot M; \qquad P \in \mathfrak{P}_n. \tag{10}$$

Die Konstante C wird *unendlich* groß, falls die Dimensionen von $\mathfrak{P}_n$ nach Null konvergieren.

Hilfssatz I'. Es gilt dann

$$|f(P)| \leqslant (C' + \mu) M; \qquad P \in \mathfrak{P}_n. \tag{11}$$

Wird die Grundfläche b_{n-1} und der Neigungswinkel α der Mantelfläche zu b_{n-1} *festgehalten*, so bleibt C' *beschränkt* [16]), wie klein wir auch die Höhe von $\mathfrak{P}_n$ annehmen.

Die anderen Hilfssätze bleiben ungeändert (natürlich nach Ersetzung von W_n durch $\mathfrak{P}_n$). All dies ergibt sich durch Anwendung der Transformation (9).

§ 3. Vorgegeben eine normal-hyperbolische Differentialgleichung in n-Veränderlichen

$$\sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} B_j(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_j} + C(x_1, \dots, x_n) u = F(x_1, \dots, x_n). \tag{12}$$

Wir erinnern in diesem Paragraph an eine wichtige Abschätzung, die man K. Friedrichs und H. Lewy [17]) [18]) verdankt. Zu diesem Zwecke müssen wir aber zuerst genau die Voraussetzungen präzisieren, unter welchen diese besteht.

Voraussetzung:

[a^1] A_{ik}, B_j, C sollen in einem Pyramidenstumpf $\mathfrak{P}_n$ — von der am Anfang des § 2 erklärten Art — stetige Ableitungen erster

reali, Rend. del. Circ. Math. di Palermo XXIX (1910)) über Approximation (durch Polynome) von Funktionen mehrerer unabhängigen Veränderlichen ließen sich fast sicher genauere Approximationssätze gewinnen.

[13]) Vgl. Kap. II § 3, Abschn. 2⁰.

[14]) D. h. alle Seitenflächen sind zur Grundfläche gleich geneigt. Die obere Basis verläuft zu der unteren parallel. Die Wahl der Figur ist im hohen Maße willkürlich. Ein Kegel würde dieselben Dienste leisten.

[14a]) Der Basismittelpunkt habe die Koordinaten $0, 0, \dots, 0, x_n^0$.

[15]) Wohlverstanden, jedesmal kommt die entsprechende Voraussetzung hinzu (vgl. Seite 216 Zeile 29—30 und Seite 217 Zeile 13—15).

[16]) Die Konstante C' kommt erst im Kap. III vor.

[17]) Es folgt daraus der Eindeutigkeitsbeweis für eine beliebige nichtlineare hyperbolische Differentialgleichung. Denn sind z_1, z_2 zwei Lösungen mit denselben Cauchy'schen Anfangsdaten, so genügt $z_1 - z_2$ einer linearen, homogenen Gleichung mit den Anfangsdaten Null.

[18]) Zum Inhalte des § 3 und im wesentlichen auch des § 4 vgl. die Fußnoten [6]) und [7]).

Ordnung besitzen. Dabei mögen die genaueren Abschätzungen

(13) $\quad |A_{ik}| \leqslant M_1, \quad |B_j| \leqslant M_1, \quad |C| \leqslant M_1, \quad |D_1 A_{ik}| \leqslant M_1$

bestehen. F sei stetig.

$[b^1]$ Im Mittelpunkte O der größeren unteren Basis b_{n-1} von $\mathfrak{P}_n$ sollen weiter (der Einfachheit halber) $A_{ik}(O)$ sich auf

(14) $A_{ik}(O) = 0$ für $i \neq k$, $A_{nn}(O) = 1$, $\quad A_{ii}(O) = -1$ für $i \neq n$

reduzieren.

Überdies möge die Lösung von (12) in $\mathfrak{P}_n$ wenigstens als 2-mal differenzierbar angenommen werden.

Behauptung. Sobald die Seitenlänge l der Basis b_{n-1} kleiner als eine passende Zahl $l_0(M_1)$, der Neigungswinkel α der Mantelfläche zu b_{n-1} kleiner als ein entsprechendes $\alpha_0(M_1)$ und die Höhe h des Pyramidenstumpfes $\mathfrak{P}_n$ kleiner als $h_0(M_1)$ werden, in Zeichen:

(15) $\quad l \leqslant l_0(M_1); \quad \alpha \leqslant \alpha_0(M_1); \quad h \leqslant h_0(M_1)$ [19])

bestehen in $\mathfrak{P}_n$ die Abschätzungen

$$[1^1] \qquad \underset{\mathfrak{P}_n}{\int \cdots \int} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx_1 \ldots dx_n \leqslant$$

$$\leqslant C_1(M_1) \left\{ \underset{b_{n-1}}{\int \cdots \int} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + u^2 \right] dx_1 \ldots dx_{n-1} + \underset{\mathfrak{P}_n}{\int \cdots \int} F^2\, dx_1 \ldots dx_n \right\}.$$

Für die obere (kleinere) Basis $\bar{b}_{n-1}$ von $\mathfrak{P}_n$ gilt

$$[2^1] \qquad \underset{\bar{b}_{n-1}}{\int \cdots \int} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx_1 \ldots dx_{n-1} \leqslant \text{rechte Seite in } [1^1],$$

unter $C_1(M_1)$ eine nur von M_1 — vgl. Formel (13) — abhängige Konstante verstanden.

Bemerkung. Die Abschätzungen $[1^1]$ $[2^1]$ gelten auch für jeden kleineren Pyramidenstumpf $\mathfrak{P}_n' \subset \mathfrak{P}_n$, der „parallel“ zu $\mathfrak{P}_n$ liegt. In den Formeln $[1^1]$ $[2^1]$ müssen dabei $\mathfrak{P}_n$, b_{n-1} etc. durch entsprechende Größen von $\mathfrak{P}_n'$ ersetzt werden.

§ 4. Wir wollen nun aus diesen Friedrichs-Lewy'schen Ungleichungen weitere Schlüsse ziehen. Zunächst ist es klar, daß

[19]) Die drei hier eingeführten Funktionen $l_0(M_1)$, $\alpha_0(M_1)$, $h_0(M_1)$ kommen weiterhin erst im Kap. III vor.

man durch Differentiation von (12) und Benutzung der oben genannten Abschätzungen die Schranken auch für höhere Ableitungen bekommt. Es erweist sich aber, daß man dabei bescheidenere Voraussetzungen über die Koeffizienten machen muß, als es auf den ersten Blick zu erwarten wäre. So z. B. genügt es, um ein Analogon der Formeln $[1^1]$ $[2^1]$ auch für die zweiten Ableitungen zu erhalten, die Koeffizienten folgenden Bedingungen zu unterwerfen:

$[a^2]$ Alle Koeffizienten und F sind einmal stetig differenzierbar und überdies:

(16) $\quad |A_{ik}| \leqslant M_1, \quad |B_j| \leqslant M_1, \quad |C| \leqslant M_1, \quad |D_1 A_{ik}| \leqslant M_1.$

(17) $\quad |D_1 B_j| \leqslant M_2, \quad |D_1 C| \leqslant M_2.$

$[b^2]$ Identisch mit $[b^1]$ des § 3.

Überdies möge u dreimal stetig differenzierbar sein.

Behauptung.

$$[1^2] \sum_{i,k=1}^{n} \underset{\mathfrak{P}_n}{\int \cdots \int} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k}\right)^2 dx_1 \ldots dx_n \leqslant C_2(M_1, M_2) \left\{ \underset{b_{n-1}}{\int \cdots \int} \left[\sum (D_1 u)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum (D_2 u)^2 + u^2 \right] dx_1 \ldots dx_{n-1} + \underset{\mathfrak{P}_n}{\int \cdots \int} \left[F^2 + \sum (D_1 F)^2 \right] \right\}$$

$$[2^2] \qquad \sum \underset{\bar{b}_{n-1}}{\int \cdots \int} (D_2 u)^2\, dx_1 \ldots dx_{n-1} \leqslant \text{rechte Seite in } [1^2].$$

Setzt man nämlich $\dfrac{\partial u}{\partial x_h} = p_h$, so braucht man nur die Friedrichs-Lewy'sche Methode auf das durch Differentiation von (12) nach allen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ entstehende System anzuwenden. Allgemeiner kommt man auf diese Weise zum folgenden Ergebnis:

Voraussetzung:

$[a^{\varrho+1}]$ A_{ik}, B_j, C, F sind ϱ-mal stetig differenzierbar, wobei die Ungleichheiten (16), (17) bestehen. Überdies besteht:

(18) $\quad |D_s A_{ik}| \leqslant M_2, \quad |D_s B_j| \leqslant M_2, \quad |D_s C| \leqslant M_2$ für $2 \leqslant s \leqslant \varrho$.

$[b^{\varrho+1}]$ Identisch mit $[b^1]$ des § 3.

Die Lösung ist $\varrho + 2$-mal stetig differenzierbar.

Behauptung.

[$1^{\varrho+1}$]
$$\int\cdots\int_{\mathfrak{P}_n}\Big[\sum_{h=0}^{\varrho+1}(D_h u)^2\Big]dx_1\ldots dx_n \leqq$$
$$\leqq C_{\varrho+1}(M_1, M_2)\Big\{\int\cdots\int_{b_{n-1}}\Big[\sum_{h=0}^{\varrho+1}(D_h u)^2\Big]dx_1\ldots dx_{n-1} +$$
$$+\int\cdots\int_{\mathfrak{P}_n}\Big[\sum_{h=0}^{\varrho}(D_h F)^2\Big]dx_1\ldots dx_n\Big\}.$$

[$2^{\varrho+1}$]
$$\int\cdots\int_{b_{n-1}}\Big[\sum_{h=0}^{\varrho+1}(D_h u)^2\Big]dx_1\ldots dx_{n-1} \leqq \text{rechte Seite in } [1^{\varrho+1}].$$

§ 5. Die in den Formeln [$1^{\varrho+1}$] [$2^{\varrho+1}$] vorkommenden Konstanten $C_{\varrho+1}(M_1, M_2)$ hängen auch — wie dies angedeutet wurde — von $\varrho+1$ ab, d. h. von der Ordnung der zu abschätzenden Ableitungen von u. Dagegen ist der Bereich, in welchem diese Abschätzungen vorgenommen werden, d. h. der Pyramidenstumpf $\mathfrak{P}_n$ von ϱ unabhängig. Mit anderen Worten: Wird die Kantenlänge der Grundfläche b_{n-1}, der Neigungswinkel α und die Höhe h der Beziehung (15) unterworfen, d. h. nur als von A_{ik}, B_j, C *selbst und deren ersten Ableitungen* [vgl. (13)] abhängig angenommen, *so braucht* $\mathfrak{P}_n$ *weiter nicht mehr geändert zu werden*. In *demselben* in § 3 näher erklärten $\mathfrak{P}_n$ gelten dann ohne weiteres auch die anderen Abschätzungen und Formeln [$1^{\varrho+1}$] [$2^{\varrho+1}$]. Diese Tatsache ist von großer Wichtigkeit für die folgenden Betrachtungen, insb. die des Kap. II und III. Für diesen Tatbestand wollen wir manchmal die Schreibweise $\mathfrak{P}_n = \mathfrak{P}_n(M_1)$ benutzen. Endlich besteht die am Ende des § 3 gemachte Bemerkung in derselben Fassung auch für die Formeln [$1^{\varrho+1}$], [$2^{\varrho+1}$].

§ 6. Auf die in § 4 skizzierte Weise werden die Ableitungen $D_j u$ nur bis zu Ordnungen $j \leqq n+2$ abgeschätzt. Es ist nun für das Folgende wichtig zu wissen, daß sich die *nötigen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen über die Koeffizienten noch weiter einschränken lassen, wenn es sich um höhere Ableitungen* handelt. Es genügt dann nämlich für gewisse Ableitungen der Koeffizienten keine Abschätzungen der Form a^ϱ [vgl. § 4] vorauszusetzen, sondern nur solche, die die *Beschränkung gewisser Integrale* aussagen. Wir wollen uns präziser ausdrücken. Es handle sich z. B. um eine Ableitung der Form $D_{n+\varrho}u$ mit $\varrho \geqq 3$ (n ist die Anzahl der unabhängigen Variablen). Differenziert man (12) $n+\varrho-1$ mal, so erhält man [20])

(19)
$$\sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_k}[D^s_{n+\varrho-1}u] + \sum D_1 A_{ik}\frac{\partial}{\partial x_i}[D_{n+\varrho-1}u] +$$
$$+\sum B_j\frac{\partial}{\partial x_j}[D_{n+\varrho-1}u] = \Phi_\varrho, \quad s = 1, 2, \ldots, S_{n+\varrho-1}.$$

Dabei ist Φ_ϱ eine Summe der Gestalt

(20)
$$\Phi_\varrho = \sum_{h=2}^{n+1} D_h A_{ik}\cdot D_{n+\varrho+1-h}u + \sum_{h=n+2}^{n+\varrho-1} D_h A_{ik}\cdot D_{n+\varrho+1-h}u +$$
$$+\sum_{h=1}^{n+1} D_h B_j\cdot D_{n+\varrho-h}u + \sum_{h=n+2}^{n+\varrho-1} D_h B_j\cdot D_{n+\varrho-h}u + \sum_{h=0}^{n+1} D_h C\cdot D_{n+\varrho-1-h}u +$$
$$+\sum_{h=n+2}^{n+\varrho-1} D_h C\cdot D_{n+\varrho-1-h}u + D_{n+\varrho-1}F.$$

Die Schreibweise in den Formeln (19) (20) bedarf noch einer Erläuterung. (19) ist ein *System* von Differentialgleichungen für die verschiedenen Ableitungen $D^s_{n+\varrho-1}u$ der Ordnung $n+\varrho-1$. s durchläuft hier also alle natürlichen Zahlen aus dem Intervall $1, \ldots, S_{n+\varrho-1}$, unter $S_{n+\varrho-1}$ die Anzahl der Ableitungen [einer Funktion von n Veränderlichen] $(n+\varrho-1)$-ter Ordnung verstanden. Wenn weiter bei einer Ableitung kein Index oben hingeschrieben wird [21]), der diese Ableitung näher kennzeichnen würde, so bedeutet dies, daß eine solche präzisere Festsetzung belanglos ist. Endlich ist eigentlich, wie dies aus der Leibniz'schen Regel folgt, jeder Faktor in Φ_ϱ [vgl. (20)] der Gestalt $D_m A_{ik}$. $D_g u$ etc. mit einer ganzen Zahl als Koeffizient zu versehen. Auch dies haben wir der Bequemlichkeit halber unterdrückt, da man sich die Summation entsprechend oft wiederholt denken kann.

Man setze jetzt voraus:

[a] Identisch mit [a^{n+2}] des § 4.

[ϱb]
$$\int\cdots\int_{\mathfrak{P}_n}\{[D_{n+m}A_{ik}]^2 + [D_{n+m}B_j]^2 + [D_{n+m}C]^2\}\,dx_1\ldots dx_n \leqq M_2;$$
$$2 \leqq m \leqq \varrho - 1.$$

[20]) Eigentlich sollte überall Φ^s_ϱ, $s = 1, 2, \ldots, S_{n+\varrho-1}$ (statt Φ_ϱ) geschrieben werden.

[21]) z. B. $D_1 A_{ik}$, $D_{\varrho-2}u$, etc.

Überdies möge die Lösung u von (12) $n+\varrho+1$-mal differenzierbar und zugleich Formel (14) erfüllt sein, die uns den hyperbolischen Charakter von (12) sichert.

Behauptung [22]).

[Iϱ]
$$\int_{\mathcal{P}_n}\!\!\cdots\!\int [D_{n+\varrho}\, u]^2\, dx\dots dx_n \leqslant$$
$$\leqslant \overline{C}_\varrho(M_1, M_2)\Big\{\sum_{j=0}^{n+\varrho}\int_{b_{n-1}}\!\!\cdots\!\int [D\;\, u]^2\, dx_1\dots dx_{n-1} +$$
$$+\sum_{j=0}^{n+\varrho-1}\int_{\mathcal{P}_n}\!\!\cdots\!\int [D_j F]^2\, dx_1\dots dx_n\Big\}.$$

[IIϱ]
$$\int_{\bar{b}_{n-1}}\!\!\cdots\!\int [D_{n+\varrho}\, u]^2\, dx_1\dots dx_{n-1} \leqslant \text{rechte Seite in [I}\varrho\text{]}.$$

Beweis. Es genügt nach dem Ergebnis des § 3 zu zeigen, daß $\int_{\mathcal{P}^n}\!\cdots\!\int [\Phi_\varrho]^2\, dx_1\dots dx_n$ — vgl. [1¹] — eine passende Abschätzung besitzt. Diese Abschätzung wird nun mit Benutzung von [a] [$^\varrho b$] durch Induktion nach ϱ gewonnen. Man setze zu diesem Zwecke $\Phi_\varrho = \Phi_\varrho^{(1)} + \Phi_\varrho^{(2)}$, wobei [vgl. (20)]

$$(21)_1 \qquad \Phi_\varrho^{(1)} = \sum_{h=2}^{n+1} D_h A_{ik}\cdot D_{n+\varrho+1-h}\, u + \sum_{h=1}^{n+1} D_h B_j\cdot D_{n+\varrho-h}\, u +$$
$$+\sum_{h=0}^{n+1} D_h C\cdot D_{n+\varrho-1-h}\, u + D_{n+\varrho-1} F,$$

$$(21)_2 \qquad \Phi_\varrho^{(2)} = \sum_{h=n+2}^{n+\varrho-1} D_h A_{ik}\cdot D_{n+\varrho+1-h}\, u + \sum_{h=n+2}^{n+\varrho-1} D_h B_j\cdot D_{n+\varrho-h}\, u +$$
$$+\sum_{h=n+2}^{n+\varrho-1} D_h C\cdot D_{n+\varrho-1-h}\, u$$

[22]) Erst mittels der Ungleichheiten [Iϱ] [IIϱ] und [$B\varrho$] der §§ 6, 7 ist es mir gelungen den Beweis für quasilineare Gleichungen durchzuführen. Meine Bemühungen diese Ungleichheiten so zu verschärfen, daß auch die Erledigung des allgemeinsten Falles ermöglicht wird, blieben erfolglos.

ist und bemerke, daß wegen der Voraussetzung $[a]\equiv[a^{n+2}]$ die Abschätzungen $[1^{n+2}]$ des § 4 bestehen, d. h.:

$$(22) \qquad \int_{\mathcal{P}_n}\!\!\cdots\!\int \Big[\sum_{h=0}^{n+2}(D_h u)^2\Big] dx_1\dots dx_n \leqslant$$
$$\leqslant \overline{C}(M_1, M_2)\Big\{\int_{b_{n-1}}\!\!\cdots\!\int \Big[\sum_{h=0}^{n+2}(D_h u)^2\Big] dx_1\dots dx_{n-1} +$$
$$+\int_{\mathcal{P}_n}\!\!\cdots\!\int \Big[\sum_{h=0}^{n+1}(D_h F)^2\Big] dx_1\dots dx_n\Big\},$$

und eine ähnliche Abschätzung für $\int_{\bar{b}_{n-1}}\!\cdots\!\int \Big[\sum_{h=0}^{n+2}(D_h u)^2\Big] dx_1\dots dx_{n-1}$.

Nach Hilfssatz I folgt aus (22)

$$(23) \qquad \operatorname*{Max}_{\mathcal{P}_n}|u| + \sum \operatorname*{Max}_{\mathcal{P}_n}|D_1 u| + \sum \operatorname*{Max}_{\mathcal{P}_n}|D_2 u| \leqslant \text{rechte Seite in (22)}.$$

Wir können nun mit der Induktion beginnen. Wir setzen zunächst $\varrho=3$ in $D_{n+\varrho}\, u$ [die niedrigeren Ableitungen sind wegen (22) bereits abgeschätzt worden] und betrachten $\Phi_3^{(1)}$: vgl. Formel $(21)_1$. Alle dort vorkommenden Ableitungen der Koeffizienten: $|D_2 A_{ik}|,\dots |D_{n+1} C|$ sind wegen Voraussetzung [a] des § 6 $< M_1+M_2$, während die entsprechenden Ableitungen $D_3 u, D_4 u,\dots, D_{n+2} u$ den „*Integralbeziehungen*" (22) genügen. Somit [23])

$$(24) \qquad \int_{\mathcal{P}_n}\!\!\cdots\!\int [\Phi_3^{(1)}]^2\, dx_1\dots dx_n \leqslant C(M_1, M_2)\Big\{\int_{b_{n-1}}\!\!\cdots\!\int \sum_{h=0}^{n+3}(D_h u)^2 +$$
$$+\int_{\mathcal{P}_n}\!\!\cdots\!\int \sum_{h=0}^{n+2}(D_h F)^2\Big\}.$$

Demgegenüber ist in $\Phi_3^{(2)}$ für die Ableitungen der Koeffizienten nur eine *Integralabschätzung* vorhanden — nach Voraussetzung [^3b] dieses Paragraphen, — während die Ableitungen $D_2 u$, $D_1 u$, $u=D_0 u$ nach (23) eine „*Absolutabschätzung*" zulassen. Man erhält

[23]) Von nun an wollen wir öfters die Integrationsdifferentiale unterdrücken, da über $\mathcal{P}_n$ nur ein n-maliges und über b_{n-1}, $\bar{b}_{n-1}$ ein $(n-1)$-maliges Integral zu erstrecken ist.

$$(25)\qquad \int\limits_{\mathcal{P}_n}\!\!\cdots\!\int [\Phi_3^{(2)}]^2\, dx_1 \ldots dx_n \leqslant C(M_1, M_2)\Big\{\int\limits_{b_{n-1}}\!\!\cdots\!\int \sum_{h=0}^{n+3} (D_h u)^2 + \int\limits_{\mathcal{P}_n}\!\!\cdots\!\int \sum_{h=0}^{n+2} (D_h F)^2\Big\}.$$

Wird nun die Abschätzung [1^1] und [2^1] des § 3 auf die Gleichungen (19) mit $\varrho = 3$ angewendet und dabei (24) (25) benutzt, so ergeben sich unmittelbar die Formeln [I^3], [II^3].

Jetzt setze man $\varrho = 4$. Nun erweist sich, daß in $\Phi_4^{(1)}$ alle Ableitungen der Koeffizienten: $D_j A_{ik}$ etc. ($j = 0, 1, \ldots, n+1$) eine Absolutabschätzung und die Ableitungen $D_{n+3} u, \ldots, D_4 u$ — wegen des eben bewiesenen Falles $\varrho = 3$ — eine Integralabschätzung zulassen; daraus folgt eine Schranke für $\int\limits_{\mathcal{P}_n}\!\cdots\!\int [\Phi_4^1]^2$. Dagegen bekommt man bei Betrachtung von $\Phi_4^{(2)}$ für $D_{n+2} A_{ik}, \ldots, D_{n+3} A_{ik}$ etc. eine Integralabschätzung wegen Voraussetzung [^4b], während umgekehrt $|D_3 u|$, $|D_2 u|$, $|D_1 u|$, $|u|$ nach Hilfssatz I und der bereits für $\varrho = 3$ gewonnenen Abschätzung eine leicht bestimmbare absolute Abschätzung zulassen. Auch für $\int\limits_{\mathcal{P}_n}\!\cdots\!\int [\Phi_4^{(2)}]^2$ folgt also daraus eine Abschätzung. Im Ergebnis gelangt man zu [I^4], [II^4]. Der Leser wird sich nun selber leicht orientieren, wie man weiter verfahren muß.

Wichtige Bemerkung. Auch hier [wie in § 5] hängt die Gestalt von $\mathcal{P}_n$ nur von den Schranken der Koeffizienten *selbst* und ihrer *ersten* Ableitungen ab.

§ 7. In allen Abschätzungsformeln der §§ 3, 4, 6 kommen rechts Integrale $\int\limits_{b_{n-1}}\!\cdots\!\int [D_h u]^2$ vor, genommen entlang der unteren Basis. Man muß aber beachten, daß *nicht alle diese Ableitungen vorgegeben sind.* Bei dem uns interessierenden Cauchy'schen Problem sind gegeben: α) $u(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ und β) $\frac{\partial}{\partial x_n} u(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Ableitungen von φ bis zu etwa r-ter Ordnung einschließlich (nach $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$), während diejenigen von ψ bis zu $(r-1)$-ten existieren und in b_{n-1} stetig sind. Alle *anderen* Ableitungen $D_j u$ auf b_{n-1} — die also weder die Form $D_h \varphi$ noch die Form $D_h \psi$ besitzen — müssen aus den über φ, ψ wie auch über A_{ik}, B_j, C gegebenen Daten durch Differentiation der Gleichung (12) *bestimmt und abgeschätzt werden.* Um dies zu ermöglichen, *fügen* wir zu den in den vorhergehenden Paragraphen angeführten Voraussetzungen noch folgende hinzu

$$[V^\varrho]\qquad \int\limits_{b_{n-1}}\!\!\cdots\!\int \sum_{h=n+2}^{n+\varrho-2} [D_h A_{ik}]^2 \leqslant M_2$$

und ähnliche Abschätzungen auch für die anderen Koeffizienten. Es erweist sich dann:

Behauptung.

$$[B^\varrho]\qquad \int\limits_{b_{n-1}}\!\!\cdots\!\int \sum_{j=0}^{n+\varrho} [D_j u]^2 \leqslant C(M_1, M_2)\Big\{\int\limits_{b_{n-1}}\!\!\cdots\!\int \sum_{h=0}^{n+\varrho} [D_h \varphi]^2 + \int\limits_{b_{n-1}}\!\!\cdots\!\int \sum_{h=0}^{n+\varrho-1} [D_h \psi]^2 + \sum_{h=0}^{n+\varrho-2} \int\limits_{b_{n-1}}\!\!\cdots\!\int [D_h F]^2\Big\}.$$

Beweis. Zuerst folgt aus der Voraussetzung [a] des § 6 durch unmittelbare höchstens $n+1$-malige Differentiation der Gleichung (12)

$$(26)\qquad \int\limits_{b_{n-1}}\!\!\cdots\!\int \sum_{h=0}^{n+3} [D_h u]^2 \leqslant C(M_1, M_2)\Big\{\int\limits_{b_{n-1}}\!\!\cdots\!\int \sum_{h=0}^{n+3} [D_h \varphi]^2 + \sum_{h=0}^{n+2} \int\limits_{b_{n-1}}\!\!\cdots\!\int [D_h \psi]^2 + \int\limits_{b_{n-1}}\!\!\cdots\!\int \sum_{h=0}^{n+1} [D_h F]^2\Big\}.$$

Es genügt also die Behauptung [B^ϱ] nur im Falle $\varrho > 3$ zu verifizieren. Aus (26) folgt durch Anwendung des Hilfssatzes I

$$(27)\qquad \sum_{h=0}^{4} \operatorname*{Max}_{b_{n-1}} |D_j u| \leqslant \text{rechte Seite in (26)}.$$

Um den allgemeinen Fall zu erledigen, benutzen wir wieder vollständige Induktion. Wir nehmen also an, [B^ϱ] wäre schon bewiesen und wir wollen [$B^{\varrho+1}$] verifizieren. Es handle sich also um eine Ableitung $D_{n+\varrho+1} u$, in welcher etwa genau eine s-malige Differentiation nach x_n vorkommen möge. Verstehen wir unter Δ_j eine Differentiation nur nach den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, so hat also $D_{n+\varrho+1} u$ die Form

$$(28)\qquad D_{n+\varrho+1} u = \Delta_{n+\varrho+1-s} \frac{\partial^s u}{\partial x_n^s}.$$

Wir nehmen nun an, daß für $s' < s$ die Abschätzung

$$
(29)\quad \int\limits_{b_{n-1}}\!\!\cdots\!\int \left[\Delta_{n+\varrho+1-s'} \frac{\partial^{s'} u}{\partial x_n^{s'}}\right]^2 \leqslant C(M_1, M_2) \left\{ \int\limits_{b_{n-1}}\!\!\cdots\!\int \sum_{h=0}^{n+\varrho+1} [D_h \varphi]^2 + \right.
$$
$$
\left. + \sum_{h=0}^{n+\varrho} \int\limits_{b_{n-1}}\!\!\cdots\!\int [D_h \psi]^2 + \int\limits_{b_{n-1}}\!\!\cdots\!\int \sum_{h=0}^{n+\varrho-1} [D_h F]^2 \right\}.
$$

bereits als richtig erkannt wurde, und wir kommen zum Falle s. Schreiben wir die Gleichung (12) in der Form

$$
(30)\quad A_{nn} \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = -\sum_{i,k}{}' A_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} - \sum B_j \frac{\partial u}{\partial x_j} - Cu + F
$$

und differenzieren (30) $n+\varrho+1-2$-mal. Dann ergibt sich

$$
(31)\quad A_{nn} D^s_{n+\varrho+1} u = -\sum_{1 \leqslant j \leqslant n+1} D_j A_{nn} D_{n+\varrho+1-j} u - \sum_{n+2 \leqslant j \leqslant n+\varrho-1} D_j A_{nn} \cdot D_{n+\varrho+1-j} u -
$$
$$
-\sum_{i,k=1}^{n}{}' \sum_{j=0}^{n+1} D_j A_{ik} \cdot D_{n+\varrho+1-j} u - \sum_{i,k=1}^{n}{}' \sum_{j \geqslant n+2} D_j A_{ik} \cdot D_{n+\varrho+1-j} u + \ldots D_{n+\varrho-1} F.
$$

Zu der in (31) benutzten symbolischen Schreibweise sind zuerst alle diejenigen Erklärungen hinzuzufügen, die im § 6 anläßlich der Formel (20) gemacht wurden. Das Zeichen'rechts in (30) bedeutet, daß $(i, k) \neq (n, n)$. Somit soll uns das Zeichen'rechts in (31) daran erinnern, daß in den dortigen Gruppen 3 und 4 in jeder Ableitung der Form $D_{n+\varrho+1} u$ die Differentiation nach x_n höchstens $s-1$-mal ausgeführt wird. An der Hand von (31) schließen wir nun folgendermaßen. In der ersten Gruppe rechts in (31), d. h. in $\sum_{j=1}^{n+1} D_j A_{nn} \cdot D_{n+\varrho+1-j} u$, sind alle Ableitungen $D_h u$ von niedrigerer Ordnung als $n+\varrho+1$, und also nach Induktion bereits abgeschätzt, während für $D_j A_{nn}$ wegen $j \leqslant n+1$ nach Voraussetzung [a] des § 6 eine Absolutabschätzung besteht. In der zweiten Gruppe rechts in (31) ist es gerade umgekehrt: für $D_j A_{nn}$ gilt wegen $j \geqslant n+2$ die neue Zusatzvoraussetzung [$V^{\varrho+1}$], d. h. eine Integralabschätzung für $\int\limits_{b_{n-1}}\!\!\cdots\!\int [D_j A_{nn}]^2$ und gleichzeitig in Beachtung von $j \geqslant n+2$ die bereits als bewiesen angenommene Formel [$B^{n+\varrho+1-j}$]. Genauer: es kommen in der zweiten Gruppe folgende $D_j u$ vor:

$$
D_{\varrho-1} u,\ D_{\varrho-2} u, \ldots\ D_2 u.
$$

Da nun [B^ϱ] bereits besteht, so können nach Hilfssatz I alle diese Ableitungen sogar absolut abgeschätzt werden. In der dritten Gruppe $\sum_{i,k=1}^{n}{}' \sum_{j=0}^{n+1} D_j A_{ik} \cdot D_{n+\varrho+1-j} u$ sind nur — was bereits gesagt wurde — solche $D_h u$ vorhanden, in denen die Differentiation nach x_n höchstens $s-1$-mal vorkommt. Sie sind abschätzbar (Induktion nach s). Endlich ist die vierte Gruppe, so wie die zweite zu behandeln.

ZWEITES KAPITEL.

Einige Eigenschaften der Lösungen linearer hyperbolischer Differentialgleichungen.

Hier werden wir uns mit einigen Differenzierbarkeitseigenschaften der *linearen* hyperbolischen Differentialgleichungen beschäftigen. Die Tatsache, daß für solche Differentialgleichungen sich das Cauchy'sche Problem lösen läßt, wenn auch die Analytizität nicht gefordert wird, ist heutzutage bekannt. Sie ergibt sich aber parallel zu den anderen Sätzen dieses Kapitels.

§ 1. Hilfssatz III. Es werde eine Differentialgleichung von der Form

$$
(1)\quad \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} B_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + Cu = F
$$

betrachtet, deren Koeffizienten, wie auch F „durchwegs *analytisch*" sind. Dabei wird eine Funktion $y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ durchwegs analytisch genannt, wenn sie sich in eine für alle Systeme $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ absolutkonvergente, nach $x_i - x_i^0$ fortschreitende Reihe, entwickeln läßt. Überdies möge der Einfachheit halber $A_{nn} \equiv 1$ angenommen werden.

Behauptung. Es gibt eine Zahl $\delta > 0$, die nur von den Koeffizienten A_{ik}, B_j, C und dem vorgegebenen Pyramidenstumpfe $\mathfrak{P}_n$ abhängt, so daß bei beliebiger Ebene E: $x_n = \text{Const}$, die $\mathfrak{P}_n$ schneidet, und für beliebige durchwegs analytische Anfangsdaten auf E, das Cauchy'sche Problem sich in einem Streifen um E von der Breite δ lösen läßt [24]).

[24]) Es ist also $\delta = \delta(A_{ik}, B_j, C;\ \mathfrak{P}_n)$.

Beweis. Sei

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = u(x_1, \ldots, x_{n-1}, C); \quad \psi = \frac{\partial}{\partial x_n} u(x_1, \ldots, x_{n-1}, C).$$

Setzen wir $\bar{u} = u - \varphi - (x_n - C)\psi$, so genügt $\bar{u}$ wieder einer Gleichung von der Form (1) mit eventuell verschiedenem F, das aber wieder durchwegs analytisch ist. Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß die Anfangswerte Null sind. Wir bilden — nach der Majorantenmethode — die Majorante für A_{ik}, B_j, C einerseits und für F anderseits. Es ist dann leicht die Existenz zweier durchwegs konvergenten Potenzreihen $g(t)$ und $h(t)$ mit positiven Koeffizienten einzusehen, so daß

α) $g\left(x_1 + x_2 + \ldots x_{n-1} + \dfrac{x_n}{\varrho}\right)$ eine gemeinsame Schranke für alle Koeffizienten A_{ik}, B_j, C,

β) $h\left(x_1 + x_2 + \ldots x_{n-1} + \dfrac{x_n}{\varrho}\right)$ eine Majorante für F darstellt $(0 < \varrho < 1)$.

Dabei wird diejenige Stelle der Ebene $x_n = C$, in deren Umgebung (1) gelöst werden soll, der Einfachheit halber als die Nullstelle angenommen [25]).

Das Problem reduziert sich nun nach der klassischen Schlußweise auf eine gewöhnliche, lineare Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dt^2} = [(n^2-1)\varrho^2 + (n-1)\varrho]\, g\left(\frac{t}{\varrho}\right)\frac{d^2u}{dt^2} + [\varrho + n - 1]\, g\left(\frac{t}{\varrho}\right)\frac{du}{dt} + {} + g\left(\frac{t}{\varrho}\right) u + h\left(\frac{t}{\varrho}\right). \tag{2}$$

Gesucht wird eine Lösung von (2), welche samt ihrer ersten Ableitung für $t = 0$ verschwindet. Es sei

$$\mu = \operatorname*{Max}_{|\xi| \leqslant 1} |g(\xi)|. \tag{3}$$

Wir setzen

$$\varrho = \frac{1}{2[\mu(n^2-1) + (n-1)]} \tag{4}$$

und beschränken uns auf t, die der Ungleichheit

$$\left|\frac{t}{\varrho}\right| < 1 \tag{5}$$

[25]) Es ist nämlich leicht einzusehen, daß diese Majoranten nicht von der Stelle $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0 = C$ innerhalb $\mathcal{P}_n$ abhängen, in deren δ-Umgebung die Existenz der Lösung nachgewiesen werden soll.

genügen. Dann ist die Gleichung (2) der Gleichung

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{\left[\varrho + (n-1)\, g\left(\frac{t}{\varrho}\right)\right]\frac{du}{dt} + g\left(\frac{t}{\varrho}\right)\frac{du}{dt} + g\left(\frac{t}{\varrho}\right) + h\left(\frac{t}{\varrho}\right)}{1 - \left[(n^2-1)\varrho^2 + (n-1)\varrho \cdot g\left(\frac{t}{\varrho}\right)\right]} \tag{6}$$

äquivalent und der Nenner von (6) bleibt für t, die (5) erfüllen, regulär.

Da $h\left(\frac{t}{\varrho}\right)$ für alle t analytisch ist, kann die rechte Seite von (6) keine andere Singularität, als die des erwähnten Nenners besitzen, bleibt also für $|t| < \varrho$ regulär und ist dort lösbar. Dies besagt aber für die ursprüngliche Gleichung (1) die Existenz einer Zahl δ mit den in der Behauptung des Hilfssatzes geforderten Eigenschaften.

§ 2. In diesem Paragraph sollen die durchwegs *analytischen* A_{ik}, B_j, C nur der einen im Pyramidenstumpfe $\mathcal{P}_n(M_1)$ zu bestehenden Bedingung $|A_{ik}| \leqslant M_1$; $|B_j| \leqslant M_1$, $|C| \leqslant M_1$, $|D_1 A_{ik}| \leqslant M_1$ unterworfen sei.

Dagegen verlangen wir über φ, ψ, F:

Voraussetzung. φ bezw. ψ lassen sich gleichmäßig durch durchwegs analytische Funktionenfolgen $\{\varphi_m\}$ bezw. $\{\psi_m\}$ so approximieren, daß die Integrale

$$\int_{b_{n-1}} \!\!\ldots \int [D_j \varphi_m]^2 \quad \text{und} \quad \int_{b_{n-1}} \!\!\ldots \int [D_h \psi_m]^2 \tag{7}$$

für $h \leqslant n + \varrho - 1$, $j \leqslant n + \varrho$ beschränkt [26]) bleiben $(\varrho \geqslant 2)$.

Ähnlich setzen wir über F die Möglichkeit der Approximation durch durchwegs analytische F_m mit

$$\int_{\mathcal{P}_n} \!\!\ldots \int [D_j F_m]^2 \leqslant \text{Const}, \quad \int_{b_{n-1}} \!\!\ldots \int [D_h F_m]^2 \leqslant \text{Const}; \tag{8}$$
$$j \leqslant n + \varrho - 1, \quad h \leqslant n + \varrho - 2$$

voraus.

Behauptung. Ist (7) und (8) erfüllt, so existiert die Lösung u von (1) in dem *ganzen* Pyramidenstumpf $\mathcal{P}_n(M_1)$ und besitzt dort samt ihren Ableitungen bis zu $\varrho - 1$-ter Ordnung einen stetigen Anschluss an die Randwerte auf b_{n-1}, falls ϱ genügend groß gewählt wird.

[26]) Bedingungen solcher Art bei K. Friedrichs und H. Lewy: *Über fortsetzbare Anfangsbedingungen* etc. Götting. Nachr. (1932), insb. S. 138.

Beweis. Wir bezeichnen mit u_m^1 die den Anfangsdaten φ_m, ψ_m, F_m entsprechende Lösung von (1). Nach § 1 existieren u_m^1 alle in demselben Teilpyramidenstumpf $\mathfrak{P}_n^1 \subset \mathfrak{P}_n$, der mit $\mathfrak{P}_n$ die gemeinsame untere Basis b_{n-1} besitzt und dessen Höhe δ ist. Nach den Bemerkungen im Kapitel I lassen sich die Abschätzungen I^ϱ und II^ϱ dieses Kapitels hier in $\mathfrak{P}_n^1$ anwenden und sie ergeben wegen der Formeln (7) (8) des vorliegenden Kapitels, daß auch auf der oberen Basis b_{n-1}^1 von $\mathfrak{P}_n^1$ [man vgl. Kap. I § 5]

$$(9) \qquad \int_{b_{n-1}^1}\!\!\cdots\int [D_j u_m^1]^2 \leqslant \text{Const}; \quad j = 0, 1, \ldots n + \varrho.$$

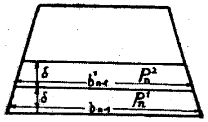
Ähnlich wegen Kap. I § 4. Formel $2^{n+\varrho}$ in $\mathfrak{P}_n^1$ selbst [vgl. Kap. I § 5]

$$(10) \qquad \int_{\mathfrak{P}_n^1}\!\!\cdots\int [D_j u_m^1]^2 \leqslant \text{Const}; \quad j \leqslant n + \varrho.$$

Wegen Hilfssatz I Kap. I gibt es nach (10) eine Teilfolge — die wir der Einfachheit halber wieder mit u_m^1 bezeichnen — die mit ihren Ableitungen bis zu Ordnungen $\leqslant \varrho - 1$ einschließlich konvergiert (gleichmäßig). Die Grenzfunktion u^1 besitzt also in $\mathfrak{P}_n^1$ stetige Ableitungen der Ordnungen $\leqslant \varrho - 1$ und erfüllt dort offensichtlich (1) mit den Anfangsdaten φ, ψ, F. Man setze auf b_{n-1}^1, falls diese Basis etwa dem Koordinatenwerte $x_n = C^{(1)}$ entspricht

$$(11) \qquad u[x_1, \ldots, x_{n-1}, C^{(1)}] = \varphi^1; \quad \frac{\partial u}{\partial x_n}[x_1, \ldots, x_{n-1}, C^{(1)}] = \psi^1$$

und suche eine Lösung u^2 von (1) in $\mathfrak{P}_n^2$ jetzt aber mit den Anfangswerten φ^1, ψ^1, F. Diese Aufgabe ist zwar ähnlich der soeben für $\mathfrak{P}_n^1$ gelösten, aber keineswegs mit ihr identisch.



Denn nach dem Vorhergesagten läßt sich die Lösung u^1 auf b_{n-1} den Formeln (7) (8) gemäß approximieren, während auf b_{n-1}^1 Ableitungen von u^1 (bzw. des gesuchten u^2) nur bis zu Ordnungen $\leqslant \varrho - 1$ vorhanden sind [17]). Ist aber ϱ' eine beliebige natürliche Zahl und wählen wir von Anfang an die Zahl ϱ so, daß

$$(12) \qquad \varrho - 1 \geqslant \Omega(\varrho' + n)$$

[17]) Die Benutzung von fortsetzbaren Anfangsbedingungen ist also nicht notwendig.

ist — unter $\Omega(\varrho')$ die im Hilfssatz II Kap. I vorkommende Zahl verstanden — so kann man φ^1, ψ^1 [und natürlich auch F] durch „durchwegs analytische Funktionen $\{\varphi_m^1\}, \{\psi_m^1\}, F_m$ den Formeln

$$(13) \qquad \int_{b_{n-1}^1}\!\!\cdots\int [D_j \varphi_m^1]^2 \leqslant \text{Const}; \quad \int_{b_{n-1}^1}\!\!\cdots\int [D_h \psi_m^1]^2 \leqslant \text{Const};$$
$$j \leqslant n + \varrho', \quad h \leqslant n + \varrho' - 1$$

gemäß approximieren. Die Überlegung kann nun in $\mathfrak{P}_n^2$ wiederholt werden und liefert eine $\varrho' - 1$ stetig differenzierbare Lösung u^2 von (1). Offensichtlich stimmen auf b_{n-1}^1 die Ableitungen von u^1 und die entsprechenden von u^2 der Ordnungen $\leqslant \varrho' - 1$ überein, da wegen (12) $\varrho' < \varrho$. Es stellen also u^1 und u^2 — in $P_n^1 + P_n^2$ betrachtet — dieselbe $\varrho' - 1$-mal stetig differenzierbare Funktion dar. In dieser Weise fährt man fort. Teilt man nun den Pyramidenstumpf $\mathfrak{P}_n$ in *endlich* viele Teilpyramidenstümpfe $\mathfrak{P}_n^i$ — $i = 1, 2, \ldots s_\delta$ — von der Höhe δ, (wobei δ die Zahl ist, die die Eigenschaft des § 1 erfüllt) und ist die natürliche Zahl ϱ^{s_δ} *beliebig gegeben*, so genügt es nur die Folge der natürlichen Zahlen $\varrho = \varrho^0, \varrho', \ldots \varrho^{s_\delta}$ den Ungleichheiten

$$(14) \qquad \varrho^{r-1} - 1 \geqslant \Omega(\varrho^r), \qquad r = 0, 1, \ldots s_\delta$$

gemäß zu bestimmen, um sich von der Existenz einer Lösung u von (1) mit den Anfangsdaten φ, ψ, F auf b_{n-1} zu überzeugen, die in $\mathfrak{P}_n$ insgesamt ϱ^{s_δ} — 1-mal differenzierbar ist und speziell auf b_{n-1} einen — samt ihren Ableitungen bis zu ϱ — 1-ter Ordnung — stetigen Anschluß an ihre Anfangswerte besitzt.

§ 3. Wir wollen einige Eigenschaften der so konstruierten Lösung beweisen.

1⁰. Zunächst gilt: Sind auf b_{n-1} die Anfangsdaten durchwegs analytisch [z. B. Polynome], wie auch die rechte Seite F (in $\mathfrak{P}_n$), so ist in $\mathfrak{P}_n(M_1)$ u *unendlich oft* differenzierbar [18]). Denn dann kann

[18]) Sind A_{ik}, B_j, C, F nicht analytisch, lassen sich aber diese Größen durch polynomiale $A_{ik}^s, B_j^s, C^s, F^s$ „quadratisch im Mittel" bis zu Ableitungen $n + \varrho$-er Ordnung einschliesslich ($\varrho \geqslant 2$) approximieren, genügen weiter die Anfangswerte φ, ψ den Formeln (7), so kann man auch dann die Existenz der Lösung des Cauchy'schen Problems behaupten. Die Lösung u besitzt auf fast jeder axenparallelen Geraden quadratisch integrierbare Ableitungen $D_j u$ ($j \leqslant n + \varrho$). Die Ableitungen $D_j u$ für $j \leqslant \varrho$ sind stetig; die Ableitungen $D_j u$ für $j \leqslant n + \varrho - 1$ sind absolutstetig auf fast jeder axenparallelen Geraden. Dies folgt sofort aus Kap. I und den bisherigen Ergebnissen des Kap. II.

man nach dem Ergebnis des vorhergehenden Paragraphen wegen $\varrho = \infty$ die Zahl $\varrho^{s\delta}$ beliebig groß wählen und die Funktion u in $\mathfrak{P}_n(M_1)$ betrachtet ist dann $\varrho^{s\delta}$ — 1-mal differenzierbar.

2°. Sind alle A_{ik}, B_j, C sowie φ, ψ, F Polynome in den Betracht kommenden Variablen — und speziell $A_{nn} \equiv 1$, woran noch einmal erinnert werden möge — dann können in $\mathfrak{P}_n(M_1)$ gewisse Approximationspolynome $\Pi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ für u so gewählt werden, daß

$$\int\limits_{\mathfrak{P}_n} \cdots \int [D_j \Pi_m - D_j u]^2 \to 0; \qquad j \leqslant n + \varrho, \tag{15}$$

$$D_j u = D_j \Pi_m \quad \text{für Punkte, die auf } b_{n-1} \text{ liegen;} \quad j \leqslant n + \varrho. \tag{16}$$

Beweis. Die Lösung u von (1) existiert dann nämlich im ganzen $\mathfrak{P}_n$ [vgl. § 2] und ist dort unendlich oft differenzierbar (nach 1°). Folglich gibt es nach Hilfssatz II, Kap. I eine Polynomfolge Π_m mit den in (15) geforderten Eigenschaften. Um (16) zu zeigen, berechnen wir formal durch Differentiationen von (1) die Ableitungen $D_j u$ bis zu Ordnungen $n + \varrho + 1$ einschließlich auf der Basis b_{n-1}. Es ergibt sich wegen $A_{nn} \equiv 1$, daß $(D_j u)_{x_n = a_n}$ *Polynome* sind in den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Nach der Bemerkung zum Hilfssatze II, Kap. I. kann also auch (16) erfüllt werden (man setze dort $r = n + \varrho + 1$).

3°. Ist $h_0(M_1)$ die Höhe des $\mathfrak{P}_n(M_1)$ und erfüllen die durchwegs analytischen A_{ik}, B_j, C die Ungleichheiten [29]) § 6: [a], [$^\varrho b$] und § 7: [V^ϱ] des Kap. I, so gilt für jeden „parallelen" Teilpyramidenstumpf $\mathfrak{P}_n' \subset \mathfrak{P}_n$ von der Höhe $h \leqslant h_0$ und für polynomiale Anfangsdaten φ, ψ, F die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathfrak{P}_n'} \cdots \int \sum_{h=0}^{n+\varrho} [D_h u]^2 \leqslant h \cdot K(M_1, M_2) \Big\{ \int\limits_{b_{n-1}} \cdots \int \sum_{j=0}^{n+\varrho} [D_j \varphi]^2 + \\ + \int\limits_{b_{n-1}} \cdots \int \sum_{j=0}^{n+\varrho-1} [D_j \psi]^2 + \sum_{j=0}^{n+\varrho-2} \int\limits_{b_{n-1}} \cdots \int [D_j F]^2 + \sum_{j=0}^{n+\varrho-1} \int\limits_{\mathfrak{P}_n'} \cdots \int [D_j F]^2 \Big\} \end{aligned} \tag{17}$$ [30]).

[29]) Für Ableitungen der Koeffizienten genügend hoher Ordnung besagen diese Ungleichheiten das Bestehen gewisser Integralabschätzungen. Noch einmal möge dabei betont werden, daß die Abschätzungen der Koeffizienten selbst und ihrer ersten Ableitungen durch die Zahl M_1 bestimmt sind, alle anderen Abschätzungen durch die Zahl M_2.

[30]) Vgl. Kap. III. Formel (39), wo diese Eigenschaft ausgenutzt wird.

Beweis. Es sei E_{n-1} eine beliebige Ebene $x_n = c$, die $\mathfrak{P}_n$ schneidet. Wir betrachten das $\mathfrak{P}_n'$ mit der Basis b_{n-1} von $\mathfrak{P}_n$ als der unteren Basis und dem Durchschnitte $\mathfrak{P}_n\, E_{n-1}$ als der oberen: b_{n-1}'.

Nach Kap. I § 6 Formel [II$^\varrho$] und Kap. I § 7 Formel [B^ϱ] besteht die Ungleichheit

$$\begin{aligned} \int\limits_{b_{n-1}'} \cdots \int \sum_{h=0}^{n+\varrho} [D_h u]^2 \leqslant K(M_1, M_2) \Big\{ \int\limits_{b_{n-1}} \cdots \int \sum_{h=0}^{n+\varrho} [D_h \varphi]^2 + \\ + \int\limits_{b_{n-1}} \cdots \int \sum_{j=0}^{n+\varrho-1} [D_j \psi]^2 + \sum_{j=0}^{n+\varrho-2} \int\limits_{b_{n-1}} \cdots \int [D_j F]^2 + \sum_{j=0}^{n+\varrho-1} \int\limits_{\mathfrak{P}_n'} \cdots \int [D_j F]^2 \Big\}. \end{aligned} \tag{18}$$

Durch Integration von (18) nach x_n als Parameter erhält man (17).

DRITTES KAPITEL.

Quasilineare Differentialgleichungen.

Mit $D_j F$ bezeichnen wir irgendeine Ableitung j-ter Ordnung der Funktion F nach den bezüglichen unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \ldots, p_i, \ldots$ etc. Mit $\mathfrak{D}_j F$ bezeichnen wir Ableitungen einer zusammengesetzten Funktion. Das Zeichen Δ_j behalten wir uns für eine totale Differentiation nach den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ vor.

§ 1. Es sei eine Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \ldots \frac{\partial u}{\partial x_i} \ldots, \ldots \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \ldots\right) \tag{1}$$

vorgegeben, wobei rechts $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ nicht vorkommt. Sind φ bzw. ψ die Werte für u bezw. $\dfrac{\partial u}{\partial x_n}$ auf der Ebene $x_n = a$, so kann man formal — unter Voraussetzung der dazu notwendiger Differenzierbarkeitseigenschaften — alle Ableitungen der hypothetischen Lösung u für $x_n = a$ bis zu einer gewissen Ordnung $n + \varrho$ berechnen. Es bezeichne nun $z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *irgendeine* $n + \varrho$-mal stetig differenzierbare Funktion, deren Ableitungen $D_j z$ mit den formal berechneten $D_j u$ für $0 \leqslant j \leqslant n + \varrho$ auf $x_n = a$ *übereinstimmen*. Wir betrachten nun neben (1) die Hilfsgleichung

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x_n^2} = F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_i} \ldots, \ldots \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_k} \ldots\right) \tag{2}$$

die aus (1) dadurch entsteht, daß man statt u, $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial u}{\partial x_n}$ die *bekannte* Funktion z und ihre Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ einsetzt und eine Funktion $Z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *sucht*, die (2) erfüllt und auf $x_n = a$ dieselben Anfangsdaten wie u annimmt. Man überzeugt sich nun leicht durch direkte Differentiation von (2) mit Ausnutzung der postulierten Beziehungen $(D_j z)_{x_n=a} = (D_j u)_{x_n=a}$ daß auch

$$(3) \qquad (D_j Z)_{x_n=a} = (D_j u)_{x_n=a}; \qquad 0 \leqslant j \leqslant n+\varrho$$

gilt.

§ 2. Eine quasilineare Differentialgleichung hat die Gestalt

$$(4) \qquad \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = F,$$

dabei sind A_{ik} und F Funktionen der Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n, u, \dots \frac{\partial u}{\partial x_i}, \dots$ $\dots \frac{\partial u}{\partial x_n}$. In den Paragraphen 2—7 wollen wir an der *Voraussetzung festhalten, daß alle Koeffizienten A_{ik}, F, wie auch die Anfangswerte $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$, $\psi(x_1, \dots, x_{n-1})$ Polynome sind.* Es wird immer $A_{nn} = 1$ angenommen. Es handle sich um das Cauchy'sche Problem für $x_n = x_n^0$. Wir nehmen weiter an, daß in einem Punkte der „Ebene“ $x_n = x_n$, etwa für $x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n-1}^0, x_n$ die gegebenen Anfangswerte φ, ψ uns den normalen, hyperbolischen Charakter der Gleichung (4) sichern. Wird

$$(5) \qquad \varphi(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0) = u^0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0) = p_i^0 \quad \text{für} \quad i \leqslant n-1,$$
$$\psi(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0) = p_n^0$$

gesetzt, so soll

$$(6) \qquad A_{ik}(x_1^0, \dots, x_n^0, u^0, \dots, p_i^0 \dots) = -\delta_{ik} \quad \text{für} \quad (i,k) \neq (n,n)\ ^{31})$$

sein. Für Wertsysteme $x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n$, die genügend nahe an $x_1^0, \dots, x_n^0, u_1^0, \dots, p_i^0, \dots$ liegen, etwa für

$$(7) \qquad |x_i - x_i^0| \leqslant \varepsilon < 1, \quad |u - u^0| \leqslant \varepsilon, \quad |p_i - p_i^0| \leqslant \varepsilon$$

ist die Gleichung (4) weiter vom normal hyperbolischen Charakter.

[31]) Sei $A_{ik}(x_1^0, \dots, z^0, \dots, p_i^0, \dots) = \alpha_{ik}^0$. Es sollte eigentlich — statt (5) — vorausgesetzt werden, daß die Ebene $x_n = x_n^0$ sich inbezug auf die linearisierte Gleichung: (5)' $\alpha_{ik}^0 r_{ik} = 0$ raumartig verhält. Dies bedeutet, daß die zu (5)' gehörenden, charakteristischen Kegel die Ebene $x_n = x_n^0$ in einem beschränkten Stück schneiden. Doch wollen wir uns — zwecks Vereinfachung der Rechnung — nur mit dem Fall (6) beschäftigen. Der hier erwähnte keineswegs allgemeinere Fall erledigt sich, was ausdrücklich betont werden möge, mühelos in vollkommen analoger Weise.

Wir wollen nun das Problem umformen und verwenden dazu einen Kunstgriff, der in einer etwas anderen Form bereits in meiner gemeinsamen Arbeit mit Herrn Leray vorkommt [32]). Sei $z(x_1, \dots, x_n)$ eine *beliebig gegebene* Funktion aus einem vorläufig nicht näher präzisierten Funktionenkörper $\mathfrak{K}$, die aber auf jeden Fall so gewählt wird, daß sie sich auf b_{n-1} zu φ, während zugleich ihre Ableitung $\frac{\partial z}{\partial x_n}$ sich dort zu ψ reduziert. Man *suche* nun eine Funktion $Z(x_1, \dots, x_n)$ aus demselben Funktionenkörper (die also wieder die Anfangswerte φ, ψ annimmt), die der Gleichung

$$(8) \qquad \sum_{ik} A_{ik}\left(x_1, \dots, x_n, z, \dots \frac{\partial z}{\partial x_i} \dots\right) \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_k} = F\left(x_1, \dots, x_n, z, \dots \frac{\partial z}{\partial x_i} \dots\right)$$

genügt. Diese Aufgabe ist viel leichter, denn für Z bekommt man eine lineare — in unserem Falle normal-hyperbolische — Differentialgleichung. Z ist eine Funktionaloperation von z, was wir durch die Schreibweise $Z = Z(z)$ andeuten. Die Lösung von (4) wird also darauf beruhen, einen Fixpunkt $z = Z(z)$ zu finden.

§ 3. Wir müssen zu diesem Zwecke verschiedene Eigenschaften der Funktionaloperation $Z(z)$ herleiten. Da es sich um eine Aufgabe „im kleinen“ handelt, richten wir unser Augenmerk nur auf die in (7) gegebene Umgebung der Stelle $x_1^0, \dots, x_n^0, u^0, p_1^0, \dots, p_n^0$. Im Gebiete (7) mögen die Ableitungen von A_{ik}, F nach allen in diesen Funktionen vorkommenden $2n+1$ Variablen bis zu $n+\varrho$-ter Ordnung einschließlich etwa den Abschätzungen

$$(9) \qquad |D_j A_{ik}| < \mu(\varepsilon); \quad |D_j F| < \mu(\varepsilon); \quad 0 \leqslant j \leqslant n+\varrho$$

genügen und es mögen zu gleicher Zeit die Ungleichheiten

$$(10) \qquad |\Delta_j \varphi| \leqslant \nu; \quad |\Delta_{j'} \psi| \leqslant \nu; \quad 0 \leqslant j \leqslant n+\varrho; \quad 0 \leqslant j' \leqslant n+\varrho-1$$

bestehen. Wegen (5) (10) hat man also

$$(11) \qquad |u_0| \leqslant \nu, \quad |p_i^0| \leqslant \nu.$$

Wir berechnen *formal* alle Ableitungen der gesuchten Lösung u von (4) bis zur Ordnung $n+\varrho$ einschließlich auf $x_n = x_n^0$. Aus den über A_{ik}, F, φ, ψ am Anfang des § 2 gemachten Voraussetzungen folgt wegen $A_{nn} = 1$, daß auch $D_j u$ für $x_n = x_n^0$ sich zu *Polynomen* reduzieren. (9) und (10) ergeben dann sofort die Existenz einer

[32]) J. Leray et J. Schauder, *Topologie et équations fonctionelles*, Ann. de l'Ec. Norm. Sup. 1934.

Zahl $K_1[\mu(\varepsilon), \varepsilon] \geqslant 1$ so, daß jedes diese Ableitungen darstellende Polynom $\mathfrak{p}_j = [D_j u]_{x_n = x_n^0}$ die Abschätzung

$$(12) \qquad |D_j u|_{x_n = x_n^0} = |\mathfrak{p}_j| \leqslant K_1(\mu, \nu)$$
$$|x_i - x_i^0| < \varepsilon; \quad i = 1, \ldots, (n-1); \quad K_1 \geqslant 1$$

zuläßt. Dabei ist zu beachten — da (10) und (12) sich nicht widersprechen können — daß

$$(13) \qquad K_1 \geqslant \nu$$

ist. Es werde nun [33])

$$(14) \qquad M_1 \overset{df}{=} \mu(1 + 4n K_1)$$

gesetzt.

§ 4. Die Wahl des Pyramidenstumpfes $\mathcal{P}_n(M_1)$, in welchem alle weiteren Überlegungen geführt werden sollen. Zu diesem Zwecke schreiben wir die gesuchte Lösung u von (4) formal in der Form

$$(15) \quad u = \varphi + \psi, (x_n - x_n^0) + a_2(x_n - x_n^0)^2 + \ldots a_{n+\varrho}(x_n - x_n^0)^{n+\varrho} + \ldots.$$

wobei $a_2, \ldots, a_{n+\varrho}$ aus (4) durch Differentiation berechnet werden und betrachten das Polynom $\mathfrak{p}$ (in den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$)

$$(16) \quad \mathfrak{p} = \varphi + \psi(x_n - x_n^0) + a_2(x_n - x_n^0)^2 + \ldots a_{n+\varrho}(x_n - x_n^0)^{n+\varrho}$$

im Gebiete $|x_i - x_i^0| < \varepsilon$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Wegen (12) ist dort

$$(17) \qquad \sum_{j=0}^{n+\varrho} |D_j \mathfrak{p}| \leqslant \widetilde{K}(\mu, \nu) \quad \text{für} \quad |x_i - x_i^0| < \varepsilon; \quad \widetilde{K} > 1.$$

Nun wird $\mathcal{P}_n$ folgendermaßen bestimmt. Seine größere Basis b_{n-1} soll auf $x_n = x_n^0$ liegen, der Mittelpunkt von b_{n-1} in $x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_n^0$. Die Kantenlänge von b_{n-1} sei kleiner als

$$(18) \qquad \operatorname{Min}\left[l_0(M_1), \frac{\varepsilon}{n'(\widetilde{K} + \varepsilon)}\right].$$

Hier bezeichnet $l_0(M_1)$ die im Kap. I § 3 eingeführte Funktion. Auch die Funktionen $\alpha_0(M_1)$, $h_0(M_1)$, von denen sogleich die Rede sein wird, kommen zum ersten Male dort vor. n' ist eine natürliche Zahl, nämlich die Anzahl aller möglichen Ableitungen $D_j u$ einer

[33]) Nachdem die Zahl M_1 der Formel (14) gemäß definiert wurde, wird sie im Folgenden nicht mehr geändert. Warum wir M_1 auf diese Weise bestimmt haben, wird erst später klar.

Funktion von n Veränderlichen der Ordnungen $0 \leqslant j \leqslant n + \varrho$. Die Größen M_1 und $\widetilde{K}$ wurden soeben definiert [vgl. (14), (17)]. Der Neigungswinkel der Mantelfläche des Pyramidenstumpfes $\mathcal{P}_n$ zur Basis b_{n-1} soll genau $\alpha_0(M_1)$ betragen. Um die Höhe h von $\mathcal{E}_n$ zu beschränken, beachten wir, daß wie man *auch diese Höhe wählen würde, Hilfssatz I′ aus Kap. I angewendet werden kann* (denn die Basis und der Neigungswinkel der Mantelfläche wurden bereits festgesetzt). Folglich ist die in Formel (11) Kap. I vorkommende Konstante C' von nun an *als gegeben zu betrachten* und sie wird eine Funktion von $\nu, \varepsilon: C' = C'(\nu, \varepsilon)$. Nachdem man also *zuerst* die Kantenlänge von b_{n-1} der Formel (18) gemäß und den Neigungswinkel $\alpha_0(M_1)$ festgelegt hat, wählt man *nachher*

$$(19) \qquad h \leqslant \operatorname{Min}\left[h_0(M_1), \frac{\varepsilon}{n'(\widetilde{K} + C' + \varepsilon)}\right].$$

§ 5. Wir sind jetzt imstande den Funktionenkörper $\mathfrak{K}$ [vgl. § 2] zu definieren. Er besteht aus Funktionen z, die folgende Eigenschaften besitzen:

α) z ist in $\mathcal{P}_n$ erklärt.

β) z läßt sich durch Polynome $\mathfrak{z}^s$ derart gleichmäßig approximieren, daß

$$(20) \qquad \sqrt{\int_{\mathcal{P}_n} \!\!\ldots \int [D_j \mathfrak{z}^s]^2} \leqslant 2; \qquad 0 \leqslant j \leqslant n + \varrho.$$

Dabei soll $\varrho \geqslant n + 2$ sein.

γ) Die Approximationspolynome $\mathfrak{z}^s$ und ihre partiellen Ableitungen $D_j \mathfrak{z}^s$ $(0 \leqslant j \leqslant n + \varrho)$ nehmen auf b_{n-1} dieselben Werte an, wie die zu findende Lösung u von (4) bezw. ihre formal aus (4) berechneten Ableitungen [bis zu $(n + \varrho)$-ter Ordnung].

Bekanntlich folgt aus (20), daß z selbst fast überall in $\mathcal{P}_n$ Ableitungen $D_j z$ $(j \leqslant n + \varrho)$ besitzt, die quadratisch integrierbar sind und für $j \leqslant n + \varrho - 1$ sogar sich auf fast jeder axenparallelen Geraden als absolutstetig erweisen. Somit kann als „Entfernung" zweier Funktionen z_1, z_2 aus $\mathfrak{K}$ die Zahl

$$(21) \qquad \|z_1 - z_2\| = \left\{\sum_{j=0}^{n+\varrho} \int_{\mathcal{P}_n} \!\!\ldots \int [D_j z_1 - D_j z_2]^2\right\}^{1/2} \text{[34])}$$

[34]) Die Entfernung von „Null" $\|z - 0\|$ wird mit $\|z\|$ bezeichnet und Norm genannt.

eingeführt werden. Der Funktionenkörper $\mathfrak{K}$ ist nicht leer. Denn das Polynom $\mathfrak{p}$ [vgl. Formel (16)] gehört dazu. In der Tat bekommen wir unmittelbar wegen (17) (18) (19)

$$\int\limits_{\mathcal{P}_n}\cdots\int [D_j \mathfrak{p}]^2 \leqslant 2; \qquad 0 \leqslant j \leqslant n+\varrho \tag{22}$$

und es wurde $\mathfrak{p}$ gerade so definiert, daß es mitsamt seinen Ableitungen bis zu Ordnungen $n+\varrho$ einschließlich auf b_{n-1} mit u — der Lösung von (4) — und deren entsprechenden Ableitungen übereinstimmt.

§ 6. In $\mathfrak{K}$ betrachten wir nunmehr die „Funktionalkugel" $\mathfrak{B}$, die aus allen denjenigen Funktionen z in $\mathfrak{K}$ besteht, für welche

$$\|z-\mathfrak{p}\| \leqslant 1. \tag{23}$$

$\mathfrak{B}$ ist offensichtlich eine konvexe Menge in $\mathfrak{K}$ und nur in $\mathfrak{B}$ erklären wir die Funktionaloperation $Z(z)$ nach dem Schema des § 2. Wir tun dies, indem wir Lösungen Z^s von (8) bilden, die den Approximationsfunktionen $\mathfrak{z}^s$ entsprechen. Der Grenzwert der Z^s ist dann das gesuchte Z.

Die erste Frage, die sich da aufdrängt, ist die folgende: ist die Bestimmung von Z^s überhaupt möglich? Es könnte nämlich vorkommen, daß falls man in den Koeffizienten A_{ik} und in F das willkürliche $\mathfrak{z}^s$ — das aber Eigenschaft γ) erfüllt — einsetzt, die lineare Gleichung (8) sich nicht mehr als hyperbolisch erweist. Die vorsichtige Wahl des Pyramidenstumpfes $\mathcal{P}_n$, welche wir im § 4 getroffen haben, bewirkt aber, daß ein solcher Fall der Nichtexistenz von Z^s überhaupt nicht eintreten kann.

Betrachten wir nämlich eine willkürliche Funktion z aus $\mathfrak{B}$. Da die Höhe $h<\varepsilon<1$ — wegen (19) — und die Kantenlänge der Basis $<\varepsilon$ — wegen (18) — so gehört $\mathcal{P}_n$ zur Punktmenge

$$|x_i - x_i^0| < \varepsilon; \qquad i=1,2,\dots n. \tag{24}$$

Aus (23) folgt weiter nach Hilfssatz I′ Kap. I [35] [36]

[35]) Es muß im Folgenden überall Hilfssatz I′ Kap. I und nicht Hilfssatz I angewendet werden. Denn die im Hilfssatze I vorkommende Konstante wird unendlich groß, wenn die Höhe h nach Null konvergiert, so daß sein Gebrauch den Beweis nur erschweren würde. Anderseits muß beachtet werden, daß der durchzuführende Existenzbeweis — welche Methode wir auch benutzen — nur dann gelingt, wenn die Höhe h „genügend klein" ist.

[36]) Da beide Funktionen z und $\mathfrak{p}$ zu $\mathfrak{K}$ gehören, so verschwindet nach Eigenschaft γ die Differenz $z-\mathfrak{p}$ samt ihren Ableitungen etwa bis zu $(\varrho+1)$-ter Ordnung auf $x_n = x_n^0$. Dies muß bei Ableitung von (25), (26) berücksichtigt werden.

$$|z-\mathfrak{p}| + \sum |D_1(z-\mathfrak{p})| + \sum |D_2(z-\mathfrak{p})| + \tag{25}$$
$$+ \sum |D_3(z-\mathfrak{p})| \leqslant n' C'.$$

Aus (25) erhalten wir nach Ausführung entsprechender Integrationen und Berücksichtigung von (17) (18) (19) sukzessiv die Ungleichheiten [37])

$$\sum |D_1(z-\mathfrak{p})| + \sum |D_2(z-\mathfrak{p})| \leqslant n' C' h \leqslant \varepsilon,$$
$$\sum |D_1 z| + \sum |D_2 z| \leqslant \varepsilon + \widetilde{K}, \tag{26}$$
$$|z - z^0| \leqslant \frac{n-1}{n'}\,\varepsilon + \frac{\varepsilon}{n'} < \varepsilon; \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial x_i} - p_i^0\right| < \varepsilon.$$

Der „Punkt" $x_1, \dots, x_n, z, \dots \frac{\partial z}{\partial x_i} \dots$ gehört wegen (24) und $(26)_3$ zum $2n+1$-dimensionalen durch (7) gegebenen Gebiete. Für solche, der Ungleichheit (7) genügende „Punkte" war aber nach dem Vorhergesagten der hyperbolische Charakter gesichert.

Wegen (20) kann man aus den $\mathfrak{z}^s$ eine Teilfolge herausgreifen: $\mathfrak{z}^{s_j}$, die — nach Hilfssatz I Kap. I — samt ihren Ableitungen bis zu ϱ-ter Ordnung gleichmäßig gegen z und deren entsprechende Ableitungen konvergiert. Für genügend hohe Indexe s_j gehört also auch der „Punkt" $x_1, \dots, x_n, \mathfrak{z}^{s_j}, \dots \frac{\partial \mathfrak{z}^{s_j}}{\partial x_i} \dots$ zum Gebiete (7), d. h. auch die „Approximationsgleichung" ist vom hyperbolischen Typus. Der Einfachheit halber wollen wir uns überhaupt nur mit solchen $\mathfrak{z}^{s_j}$ beschäftigen und die $\mathfrak{z}^s$ entsprechend umnumerieren. Für das Folgende möge noch [Anwendung von $(26)_3$ (10) (12) (13)] vermerkt werden

$$|\mathfrak{z}^s| \leqslant \varepsilon + |z^0| < \varepsilon + K_1 \leqslant 2K_1, \qquad \left|\frac{\partial \mathfrak{z}^s}{\partial x_i}\right| < 2K_1 \text{ [38]}. \tag{27}$$

[37]) Ungleichheit $(26)_1$ ergibt sich durch Integration von $\frac{\partial}{\partial x_n} D_2(z-\mathfrak{p})$, $\frac{\partial}{\partial x_n} D_3(z-\mathfrak{p})$ nach x_n von 0 bis h und Anwendung der Formel (25) unter Beachtung der Fußnote [35]). $(26)_3$ bekommt man durch Integration von $(26)_2$; $z^0 = u^0$ und p_i^0 wurden in (5) definiert. [Vgl. auch Eigenschaft γ) des Funktionenkörpers $\mathfrak{K}$]

[38]) $\varepsilon < 1$ [vgl. (7)]; $K_1 \geqslant 1$ [vgl. (12)].

§ 7. Z^s (und also auch Z) kann nun gebildet werden mit einem Vorbehalt! Das Existenzgebiet von Z^s ist — vorläufig — nicht näher bestimmt. Wir müssen aber wissen, daß Z^s auch in $\mathfrak{P}_n$ existiert, d. h. in demselben Gebiete, in welchem das entsprechende $\mathfrak{z}^s$ definiert ist[39]). Um dies zu verifizieren, zeigen wir, daß die Koeffizienten A_{ik} der Gleichung (8) — wenn man A_{ik} nach Einsetzung von $\mathfrak{z}^s$ nur als Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ deutet — samt ihren ersten totalen Ableitungen gerade durch M_1 abgeschätzt sind. Es genügt — wie früher — dies nur für die Grenzfunktion z durchzuführen, wenn man sich auf eine entsprechende Teilfolge — die wieder mit $\mathfrak{z}^s$ bezeichnet werden möge — beschränkt.

In der Tat, der „Punkt" $x_1, \ldots, x_n, z, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_i} \ldots$ gehört zum Gebiete (7) [vgl. (24), $(26)_3$]. Somit ist (9) erfüllt und man hat in Berücksichtigung von (9) $(26)_3$ (14)

(28) $$|A_{ik}(x_1, \ldots, x_n, z, \ldots)| \leqslant \mu < M_1$$
$$|\mathfrak{D}_1 A_{ik}| < M_1 \text{ [40])}.$$

Da in (28) das Gleichheitszeichen ausgeschlossen ist, genügen auch passende $\mathfrak{z}^s$ einer analogen Ungleichheit. Daraus schließt man, daß entsprechende Z^s im *ganzem* $\mathfrak{P}_n(M_1)$ existieren müssen und dort *unendlich oft* differenzierbar sind. [vgl. Kap. II].

§ 8. Wir zeigen jetzt, daß

(29). $$\|Z^s\| \leqslant K_2(\mu, \nu),$$

unter K_2 eine passende von μ, ν, abhängige Konstante verstanden; dann können wir nämlich eine Teilfolge Z^{s_i} herausgreifen, die samt ihren Ableitungen bis zu ϱ-ter Ordnung einschließlich gegen eine Funktion Z und deren Ableitungen konvergiert. Z ist die gesuchte Lösung von (8). Zu diesem Zwecke genügt es nur das Bestehen der Voraussetzungen § 6: [α] [$^\varrho b$] und § 7: [V^ϱ] des Kap. I zu verifizieren. Formel (29) erweist sich inhaltlich mit den Ergebnissen des Kapitels I gleichbedeutend.

[39]) Denn das Nichtbestehen dieses Umstandes würde auch ein „Herausfallen aus der Klasse" bedeuten.

[40]) Jetzt wird uns die spezielle Wahl von M_1 in (14) verständlich. Wir heben hervor, daß in (28) das Gleichheitszeichen ausgeschlossen ist. Daraus folgt, daß falls man in A_{ik} statt z, $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ die ihnen nach Eigenschaften $\alpha)$ $\beta)$ $\gamma)$ zugeordneten Approximationspolynome $\mathfrak{z}^s$, $\frac{\partial \mathfrak{z}^s}{\partial x_i}$ einführt, daß dann für $s > s_0$ wieder
$$|A_{ik}(\ldots, \mathfrak{z}^s, \ldots)| < M_1; \quad |\mathfrak{D}_1 A_{ik}(\ldots \mathfrak{z}^s \ldots)| < M_1$$
gilt.

Schätzen wir also

(30) $$\alpha^s_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A_{ik}\left(x_1, \ldots x_n, \mathfrak{z}^s, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_i}\mathfrak{z}^s \ldots\right)$$

ab. Wegen $\varrho \geqslant n+2$ und wegen (20) können mit Benutzung des Hilfssatzes I [vgl. auch (9), (10)] alle Ableitungen $D_j \alpha^s_{ik}$ für $j = 0, 1, 2, \ldots, n+1, \ldots, \varrho - 1$ sogar *absolut* abgeschätzt werden. Man gewinnt [41]) [42])

(31) $$\operatorname{Max} |D_j \alpha^s_{ik}| \leqslant K'(\nu, \mu) \int_{\mathfrak{P}_n} \!\!\cdots\! \int \sum_{h=0}^{n+\varrho} [D_h \mathfrak{z}^s]^2, \qquad j \leqslant \varrho - 1.$$

Ist aber $j > \varrho - 1$, so erhält man

(32) $$|D_j \alpha^s_{ik}| = |\mathfrak{D}_j A_{ik}| \leqslant \sum_g |D_g A_{ik}| \cdot |\Phi_g|, \qquad j > \varrho - 1.$$

In (32) bezeichnet Φ_g ein Produkt verschiedener Ableitungen von $\mathfrak{z}^s$, wobei aber *in jedem Φ_g höchstens eine Ableitung $D_h \mathfrak{z}^s$ der Ordnung $h > \varrho$ vorkommen kann.* In der Tat, kämen in einem Φ_g zwei solche Ableitungen vor, so würde dies wegen (32) bedeuten, daß

(33) $$n + \varrho - 1 \geqslant j > 2(\varrho - 1),$$

woraus $\varrho < n+1$ folgen würde, entgegen der Voraussetzung [vgl. (20)].

Wir sind also imstande, aus (32) [vgl. auch (9) (10)] die Ungleichheit

(34) $$\int_{\mathfrak{P}_n} \!\!\cdots\! \int [D_j \alpha^s_{ik}]^2 \leqslant K''(\nu, \mu) \int_{\mathfrak{P}_n} \!\!\cdots\! \int \sum_{h=0}^{n+\varrho} [D_h \mathfrak{z}^s]^2;$$
$$\varrho \leqslant j \leqslant n + \varrho - 1$$

zu folgern. Oder (31) und (34) zusammenfassend in Beachtung von (20)

(35) $$\int_{\mathfrak{P}_n} \!\!\cdots\! \int [D_j \alpha^s_{ik}]^2 \leqslant K'''(\nu, \mu); \quad j = 0, 1, \ldots, n + \varrho - 1.$$

[41]) K', K'', $\widetilde{K}$ etc. bezeichnen Konstanten, die nicht näher bestimmt zu werden brauchen.

[42]) Nun ist verständlich, warum wir $\varrho \geqslant n+2$ gewählt haben. Es müssen die Voraussetzungen [a] § 6 aus Kap. I erfüllt werden. Denn in § 9 des vorliegenden Kap. III werden wir die im Kap. II § 3 Abschn. 3° bewiesene Eigenschaft benützen müssen.

Eigentlich müsste auch die Gültigkeit einer *gemeinsamen* Abschätzung der Integrale $\int\limits_{b_{n-1}}\!\!\ldots\!\int [D_j\, \alpha^s_{ik}]^2$ für $j \leqslant n+\varrho-2$ nachgewiesen werden.

Dies ist aber unmittelbar klar. Denn wegen der im Funktionenkörper $\mathfrak{K}$ geltenden Eigenschaft γ ist auf b_{n-1}: $\alpha^s_{ik} \equiv \alpha^{s'}_{ik}$ etc.

§ 9. Eine unmittelbare Folge von (29) ist

$$\|Z(z)\| \leqslant K_2(\mu, \nu). \tag{36}$$

Formel (36) genügt aber nicht für das Weitere. Wir wollen nämlich zeigen, daß *lediglich durch eine passende Wahl der Höhe* h des Pyramidenstumpfes $\mathfrak{P}_n$ [also bei Beibehaltung der Basis und des Neigungswinkels] die Ungleichheit

$$\|Z - \mathfrak{p}\| < \tfrac{1}{2} \tag{37}$$

erzielt werden kann. Für $\mathfrak{p}$ hat man nämlich [vgl. (17)]

$$\|\mathfrak{p}\| \leqslant \sqrt{h}\, K^{\mathrm{IV}}(\mu, \nu). \tag{38}$$

Anderseits liefert Kap. II § 3 Abschn. 3° Formel (17) und Kap. III Formel (35)

$$\|Z^s\| \leqslant \sqrt{h}\, K^{\mathrm{V}}(\mu, \nu). \tag{39}$$

Aus (38) (39) ergibt sich sofort das gewünschte Resultat, falls h genügend klein angenommen wird [43]).

§ 10. Es bleibt uns noch zu zeigen, daß Z wieder zum Funktionenkörper $\mathfrak{K}$ gehört, der durch die Eigenschaften α, β, γ (§ 5) gekennzeichnet ist. D. h. es muß die Möglichkeit der Approximation von Z durch Polynome $\mathfrak{Z}^s$ in der dort näher bestimmten Art nachgewiesen werden. Z^s leisten dies nicht, weil sie im Allgemeinen keine Polynome sind und sich nur als unendlich oft differenzierbar erweisen. Wegen Eigenschaft γ stimmt auf b_{n-1} jedes $\mathfrak{z}^s$ mit der gesuchten Lösung u von (4) bis zu Ableitungen der Ordnung $n+\varrho$ überein. Nach § 1 muß also auch Z^s diese Eigenschaft erfüllen. Anderseits reduzieren sich die fraglichen Ableitungen von Z^s auf b_{n-1} zu Polynomen. Nach Kap. II § 3 Abschn. 2° gibt es also ein Polynom $\mathfrak{Z}^{s}$, das wieder Eigenschaft γ besitzt, für welches

$$\|Z^s - \mathfrak{Z}^s\| < \frac{1}{s}, \tag{40}$$

womit die Zugehörigkeit von Z zum Körper $\mathfrak{K}$ bestätigt wird.

[43]) h muß auch der Ungleichheit (19) genügen.

§ 11. Fassen wir das Resultat der §§ 9 und 10 zusammen, so können wir sagen: *Die soeben definierte Funktionaloperation* $Z(z)$ *bildet die konvexe „Kugel"* $\mathfrak{B}$ [zur Definition der Kugel $\mathfrak{B}$ vgl. (23)] *auf sich ab.* Immer an den Voraussetzungen festhaltend, die am Anfang des § 2 aufgezählt wurden, wollen wir noch eine zweite Norm $|z|$ einführen. Sei jetzt z eine in $\mathfrak{P}_n(M_1)$ definierte Funktion, die dort $n+2$-mal stetig differenzierbar ist. Man setze

$$|z| = \sum_{g=0}^{n+2} \operatorname*{Max}_{\mathfrak{P}_n} |D_g z|. \tag{41}$$

Man bekommt einen linearen, normierten und vollständigen Raum [44]) $\mathfrak{C}$.

Diejenigen Funktionen z, die in der „Kugel" (23) liegen, bilden — in $\mathfrak{C}$ betrachtet eine *konvexe, abgeschlossene und kompakte* Teilmenge H (in Bezug auf die Norm $|\,|$). $Z(z)$ bildet H in sich ab, — die Abbildung ist stetig in der Norm $|\,|$ nach den Ergebnissen der vorhergehenden Paragraphen (der Beweis ist am besten indirekt zu führen, mit Benutzung der Eindeutigkeit einer linearen, hyperbolischen Differentialgleichung). Nach einem bekannten Satze gibt es also einen Fixpunkt [45])

$$z = Z(z)\ ^{46)}. \tag{42}$$

§ 12. **Erst jetzt lassen wir die einschränkenden Voraussetzungen über** A_{ik}, F, φ, ψ **fallen** und nehmen diese Funktionen nur als genügend hoch differenzierbar an. Ist die Gleichung (4) in der Umgebung der Stelle $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, u_0, p_1^0, \ldots, p_n^0$ vom hyperbolischen Typus, so approximiere man A_{ik}, F, φ, ψ durch Polynome derart, daß die gemeinsamen Abschätzungen (9) (10) in einem *festen* Gebiete der Form (7) bestehen. Die wegen (42) existierenden Lösungen u_k der angenäherten Gleichungen haben dann

[44]) Zur Definition solcher Räume vgl. z. B. S. Banach, Fund. Math. III.

[45]) Vgl. z. B. Birkhoff and Kellog, Amer. Trans. 23 und J. Schauder, Math. Zeitschr. 26, Studia Math. 2.

[46]) Es möge ausdrücklich betont werden, daß eine geringfügige Änderung, die im Texte des § 11 auszuführen wäre, auch den Beweis für sukzessive Approximationen zugänglich macht. Die Eindeutigkeit der Lösung ist, wie bereits in der Fußnote [17]) [für die allgemeinste nichtlineare Differentialgleichung] bemerkt wurde, eine triviale Folge der „a priori" Abschätzungen.

alle *dasselbe* Definitionsgebiet $\mathfrak{F}_n(M_1)$ und deren Normen lassen dort wegen (36) eine gemeinsame Schranke zu.

Mithin läßt sich eine (mitsamt den Ableitungen bis zur Ordnung $n+2$ einschließlich) konvergente Folge u_{h_g} herausgreifen; die Grenzfunktion löst (4) [47].

[47]) Systeme von quasilinearen Differentialgleichungen können nach derselben Methode erledigt werden.

Es können auch in den Koeffizienten Integrale vorkommen, z. B. $\int z_s\, dx_i$, $\int \frac{\partial z_s}{\partial x_k} dx_i$ etc. Da nun eine beliebige nichtlineare Differentialgleichung durch Differentiation in ein solches immer lösbares quasilineares System übergeht, so wäre im allgemeinen Falle nur noch zu zeigen, daß die Lösung dieses letzten Systems der ursprünglichen Gleichung äquivalent ist.

Lwów, 14 November 1934.

Sur une propriété de la droite.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Une conséquence immédiate d'une proposition que j'ai démontré dans le t. XXI des *Fundamenta Mathematicae*, p. 39 [1]) est le théorème suivant:

Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe un ensemble plan E, tel que le plan est une somme de $2^{\aleph_0}$ ensembles disjoints, dont chacun est superposable par translation avec E et en même temps le plan est une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles, dont chacun est superposable par translation ou rotation avec E.

Le but de cette Note est de démontrer qu'un théorême de ce genre ne subsiste pas pour la droite. Je prouverai notamment (sans admetre que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$) ce

Théorème: *Soit $\mathfrak{m}$ un nombre cardinal donné quelconque. Si la droite est décomposée en $\mathfrak{m}$ ensembles disjoints dont chacun est superposable par translation avec un ensemble E, la droite n'est pas une somme de moins que $\mathfrak{m}$ ensembles, dont chacun soit superposable par translation ou rotation avec E.*

Démonstration.

Soit $\mathfrak{m}$ un nombre cardinal donné et soit E un ensemble linéaire tel que l'ensemble D de tous les points de la droite (axe d'abscisses) est une somme de $\mathfrak{m}$ ensembles disjoints, dont chacun est superposable par translation avec l'ensemble E. Il existe donc un ensemble de nombres réels M de puissance $\mathfrak{m}$, tel que

$$D=\sum_{a\,\epsilon\, M} E(a) \tag{1}$$

et

$$E(a)\,E(b)=0 \quad \text{pour} \quad a\,\epsilon\, M,\ b\,\epsilon\, M,\ a \neq b, \tag{2}$$

[1]) Cf. aussi mon livre *Hypothèse du continu* (Warszawa 1934, Monografje Matematyczne t. IV), p. 100.