$$\psi_2(x) = \varphi_i(2^{i+2}(x-1+2^{-i})) \quad \text{pour} \quad 1-2^{-i} \leqq x \leqq 1-2^{-i}+2^{-i-2};$$
$$i = 1, 2, 3, 4,$$

$$\psi_2(x) = 8(x-1+2^{-5}) \quad \text{pour} \quad 1-2^{-5} \leqq x \leqq 1;$$

dans le reste de l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$, définissons $\psi_2(x)$ d'une telle manière que $\psi_2(x) \epsilon A$. Ceci est possible; pour le voir, il suffit de remarquer que

$$1-2^{-i}+2^{-i-2} < 1-2^{-(i+1)}, \quad 1-2^{-4}+2^{-6} < 1-2^{-5}.$$

On a

$$\psi_1^n(x) = 2^{-n}(x+2^n-1) \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots;$$

on le voit aussitôt par induction.

Soit maintenant i un nombre entier, $1 \leqq i \leqq 4$, $0 \leqq x \leqq 1$; alors on a

$$\psi_1^5(x) = 2^{-5}(x+2^5-1), \quad \text{donc} \quad 1-2^{-5} \leqq \psi_1^5(x) \leqq 1,$$

d'où

$$\psi_2\, \psi_1^5(x) = 8(\psi_1^5(x)-1+2^{-5}) = \frac{x}{4},$$

$$\psi_1^i\, \psi_2\, \psi_1^5(x) = 2^{-i}\left[\frac{x}{4}+2^i-1\right] = 2^{-i-2}x+1-2^{-i},$$

donc

$$1-2^{-i} \leqq \psi_1^i\, \psi_2\, \psi_1^5(x) \leqq 1-2^{-i}+2^{-i-2},$$

d'où enfin

$$\psi_2\, \psi_1^i\, \psi_2\, \psi_1^5(x) = \varphi_i(2^{i+2}(\psi_1^i\, \psi_2\, \psi_1^5(x)-1+2^{-i})) = \varphi_i(x),$$

ce qui achève la démonstration.

Démonstration du théorème 3^e^. Posons $f_1(x)=0$. $f_2(x)=1$ pour $0 \leqq x \leqq 1$. Supposons qu'il existe une fonction $\varphi(x) \epsilon A$ et deux nombres entiers et positifs n, m tels que l'on ait pour tous les $x \epsilon I$

$$|f_1(x)-\varphi^n(x)| < \tfrac{1}{2}, \quad |f_2(x)-\varphi^m(x)| < \tfrac{1}{2},$$

c'est-à-dire

$$\varphi^n(x) < \tfrac{1}{2}, \quad \varphi^m(x) > \tfrac{1}{2}.$$

Si l'on avait $n = m$, on aurait $\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ — contradiction; si l'on avait $n < m$, on aurait pour $0 \leqq x \leqq 1$

$$\varphi^m(x) = \varphi^n\, \varphi^{m-n}(x) < \tfrac{1}{2}$$

— contradiction; si l'on avait $n > m$, on aurait pour $0 \leqq x \leqq 1$

$$\varphi^n(x) = \varphi^m\, \varphi^{n-m}(x) > \tfrac{1}{2}$$

— contradiction.

Sur les suites infinies de fonctions définies dans les ensembles quelconques.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Le but de cette Note est de démontrer ce

Théorème I: *$f_1(p), f_2(p), f_3(p), \ldots$ étant une suite infinie de fonctions définies sur un ensemble infini E (formé d'éléments quelconques), dont les valeurs sont des éléments de E, il existe deux fonctions de même nature, telles que toute fonction de la suite infinie considérée est une superposition (finie) de ces deux fonctions.*

Nous démontrerons d'abord le théorème I affaibli qu'on obtient lorsqu'on remplace dans le théorème I le nombre *deux* par le nombre *trois* [1]).

Soit E un ensemble infini donné. Comme on sait, E est une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles disjoints, dont chacun est de même puissance que E, soit

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots \tag{1}$$

Soit $\varphi(p)$ une fonction (définie dans E) qui transforme d'une façon biunivoque l'ensemble E en l'ensemble E_1, et soit $\varphi^{-1}(p)$ sa fonction inverse (définie dans E_1).

Soit $\psi(p)$ une fonction définie dans E et qui, pour tout n naturel, transforme d'une façon biunivoque l'ensemble E_n en l'ensemble E_{n+1} et soit, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\psi^{-n}(p)$ la fonction (définie dans l'en-

[1]) C'est ce théorème affaibli qui était trouvé par moi d'abord, et c'est la méthode de MM. Jarník et Knichal (voir ce volume, p. 206) qui a permis d'en déduire notre théorème I.

semble $E_{n+1}+E_{n+2}+\dots$) inverse pour la fonction $\psi^n(p)$ (n-ième itérée de la fonction $\psi(p)$).

Soit enfin $\partial(p)$ une fonction définie dans E de la façon suivante. Soit $p\in E$: d'après (1), les termes de la série (1) étant disjoints, il existe un nombre naturel $\nu(p)$ bien déterminé (par p), tel que $p\in E_{\nu(p)}$. Nous poserons

(2) $$\partial(p)=f_{\nu(p)}\varphi^{-1}\psi^{1-\nu(p)}(p).$$

Soit maintenant p un élément donné quelconque de E et soit n un nombre naturel donné. D'après la définition de la fonction $\varphi(p)$, on a $\varphi(p)\in E_1$, donc, d'après la définition de la fonction ψ, $\psi^{n-1}\varphi(p)\in E_n$, d'où $\nu(\psi^{n-1}\varphi(p))=n$ et, d'après (2):

$$\partial\psi^{n-1}\varphi(p)=f_n\varphi^{-1}\psi^{1-n}\psi^{n-1}\varphi(p)=f_n(p).$$

On a donc pour tout élément p de E et tout nombre naturel n la formule

$$f_n(p)=\partial\psi^{n-1}\varphi(p)$$

et le théorème I affaibli est démontré.

Lemme. $f_1(p)$, $f_2(p)$ et $f_3(p)$ *étant trois fonctions définies sur un ensemble infini* E (formé d'éléments quelconques) *et dont les valeurs sont des éléments de* E, *il existe deux fonctions* $\varphi(p)$ *et* $\psi(p)$ *de même nature, telles que chacune de fonctions* $f_i(p)$ ($i=1,2,3$) *est une superposition (finie) de fonctions* $\varphi(p)$ *et* $\psi(p)$.

Démonstration. Soit (1) la même décomposition de l'ensemble E et soit $\psi(p)$ la même fonction que dans la démonstration du théorème I affaibli.

L'ensemble $R=E_4+E_5+\dots$ est évidemment de même puissance que E, donc aussi que E_1, et il existe une fonction $g(p)$ définie dans E_1 et qui transforme d'une façon biunivoque E_1 en R: soit $g^{-1}(p)$ sa fonction inverse (définie dans R).

Définissons maintenant la fonction $\varphi(p)$ dans E de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
&\textit{Si}\quad p\in E_1,\quad \varphi(p)=f_1\psi^{-3}g(p),\\
&\textit{si}\quad p\in E_2,\quad \varphi(p)=f_2\psi^{-3}g\psi^{-1}(p),\\
&\textit{si}\quad p\in E_3,\quad \varphi(p)=f_3\psi^{-3}g\psi^{-2}(p),\\
&\textit{si}\quad p\in R,\quad \varphi(p)=g^{-1}(p).
\end{aligned}$$

Soit p un élément de E. D'après la définition de la fonction $\psi(p)$ on a $\psi^3(p)\in R$, donc (la fonction $g^{-1}(p)$ transformant R en E_1): $\varphi\psi^3(p)=g^{-1}\psi^3(p)\in E_1$, d'où (vu la définition de la fonction ψ) $\psi\varphi\psi^3(p)\in E_2$ et $\psi^2\varphi\psi^3(p)\in E_3$, donc, vu la définition de la fonction φ:

$$\varphi^2\psi^3(p)=\varphi g^{-1}\psi^3(p)=f_1\psi^{-3}gg^{-1}\psi^3(p)=f_1(p),$$
$$\varphi\psi\varphi\psi^3(p)=\varphi\psi g^{-1}\psi^3(p)=f_2\psi^{-3}g\psi^{-1}\psi g^{-1}\psi^3(p)=f_2(p),$$
$$\varphi\psi^2\varphi\psi^3(p)=\varphi\psi^2g^{-1}\psi^3(p)=f_3\psi^{-3}g\psi^{-2}\psi^2g^{-1}\psi^3(p)=f_3(p).$$

On a donc pour $p\in E$ les formules:

$$f_1(p)=\varphi^2\psi^3(p),\quad f_2(p)=\varphi\psi\varphi\psi^3(p),\quad f_3(p)=\varphi\psi^2\varphi\psi^3(p)$$

et notre lemme est démontré.

Le théorème I résulte tout de suite du théorème I affaibli et de notre lemme.

Nous allons maintenant à démontrer que le nombre *deux* (fonctions) ne peut pas être remplacé dans le théorème I par *une*.

Nous pouverons notamment ce

Théorème II. *E étant un ensemble infini donné quelconque, il n'existe aucune fonction $\varphi(p)$ définie sur E et dont les valeurs appartiennent à E, telle que les fonctions $f_1(p)=p$ pour $p\in E$ et $f_2(p)=$* Const. *soient des itérations de la fonction $\varphi(p)$* (c'est-à-dire qu'il existe des nombres naturels m et n, tels que $f_1(p)=\varphi^m(p)$ et $f_2(p)=\varphi^n(p)$ pour $p\in E$).

Démonstration. Comme on voit sans peine, les itérations (d'ordre $1,2,3,\dots$) d'une fonction à valeurs distinctes (définie sur E, dont les valeurs appartiennent à E) sont aussi des fonctions à valeurs distinctes, et les itérations d'une fonction qui n'est pas à valeurs distinctes ne sont pas également à valeurs distinctes (puisque, si $f(p)=f(q)$, où $p\neq q$, on a aussi $f^n(p)=f^n(q)$ pour $n=1,2,3,\dots$)

La fonction $f_1(p)=p$ étant à valeurs distinctes, et la fonction $f_2(p)=$ Const. n'étant pas à valeurs distinctes (sur l'ensemble infini E), il résulte tout de suite de notre remarque que les fonctions $f_1(p)$ et $f_2(p)$ ne peuvent pas être itérations d'une même fonction. Le théorème II est ainsi démontré.

M. Jarník m'a communiqué une démonstration du théorème II basée sur la remarque si $\varphi(p)$ est une fonction (définie sur un ensemble E contenant plus qu'un élément), telle que $\varphi(E)=E$ pour $n=1,2,3,\dots$, on a aussi $\varphi^n(E)=E$ pour $n=1,2,3,\dots$, et si $\varphi(p)$ est une fonction telle que $\varphi(p)\neq p_0$ pour $p\in E$, on a aussi $\varphi^n(p)\neq p_0$ pour $p\in E$ et pour $n=1,2,3,\dots$ Il suffit donc de prendre pour $f_1(p)$ une fonction, telle que $f_1(E)=E$ et pour $f_2(p)$ une fonction telle que $f_2(E)\neq E$.

La question se pose encore: *notre lemme, est-il vrai pour les ensembles E finis?* C'est, comme on voit sans peine, le cas pour les ensembles formés de deux éléments (En effet, E étant un ensemble formé de deux éléments 1 et 2, nous n'avons que 4 fonctions définies dans E et dont les valeurs appartiennent à E, notamment les fonctions $f_i(x)$ $(i=1,2,3,4)$, où $f_1(1)=f_1(2)=1$, $f_2(1)=2$, $f_2(2)=1$, $f_3(1)=f_3(2)=2$ et $f_4(1)=1$, $f_4(2)=2$, et on a $f_3(x)=f_2f_1(x)$ et $f_4(x)=f_2^2(x)$ pour $x \in E$).

Or, comme l'a démontré M. S. Eilenberg, *notre lemme est faux pour les ensembles finis contenant plus que deux éléments.*

En effet, soit n un nombre naturel $\geqslant 3$ et soit E l'ensemble formé des nombres $1,2,3,\dots,n$. Définissons dans E trois fonctions f_1, f_2 et f_3 comme il suit:

$$f_1(1)=3,\quad f_1(2)=2,\quad f_1(3)=1,\quad f_1(k)=k \quad \text{pour} \quad 4\leqslant k\leqslant n,$$

$$f_2(1)=1,\quad f_2(2)=3,\quad f_2(3)=2,\quad f_2(k)=k \quad \text{pour} \quad 4\leqslant k\leqslant n,$$

$$f_3(k)=1 \quad \text{pour} \quad 1\leqslant k\leqslant n.$$

Admettons qu'il existe deux fonctions φ et ψ définies sur E et dont les valeurs appartiennent à E, telles que chacune des fonctions f_1, f_2 et f_3 est une superposition (d'un nombre fini) de fonctions φ et ψ. Les fonctions f_1 et f_2, en tant qu'étant à valeurs distinctes sur E, ne peuvent pas être des superpositions que des fonctions à valeurs distinctes sur E, et la fonction f_3, en tant que n'étant pas à valeurs distinctes sur E, n'est pas une superposition de fonctions à valeurs distinctes sur E.

Il en résulte qu'une de fonctions φ et ψ, soit φ, est à valeurs distinctes sur E, et l'autre, ψ, n'est pas à valeurs distinctes sur E. Donc, les fonctions f_1 et f_2 sont (sur E) des itérations de la fonction φ, soit $f_1(x)=\varphi^p(x)$ et $f_2(x)=\varphi^q(x)$ pour $x \in E$, d'où

$$f_2 f_1(x)=f_1 f_2(x) \quad \text{pour} \quad x \in E,$$

ce qui est impossible, puisque $f_2 f_1(1)=2$ et $f_1 f_2(1)=3$.

Das Anfangswertproblem einer quasilinearen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung in beliebiger Anzahl von unabhängigen Veränderlichen.

Von

J. Schauder (Lwów).

Das sgn. Cauchy'sche Anfangswertproblem für eine partielle Differentialgleichung k-ter Ordnung

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, z, \dots \frac{\partial z}{\partial x_l}, \dots \frac{\partial^k z}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \dots \partial x_n^{l_n}} \dots\right)=0 \tag{1}$$

besteht bekanntlich in der Lösung von (1), falls die Werte von z und deren Ableitungen bis zur Ordnung $k-1$ einschließlich auf einer $n-1$ dimensionalen Mannigfaltigkeit M_{n-1} vorgegeben sind. Der Existenzbeweis wird mittels der Cauchy'schen Majorantenmethode geführt, die aber stark einschränkende Voraussetzungen erfordert. F, die Anfangswerte, sowie die diese Anfangswerte tragende Mannigfaltigkeit M_{n-1}, müssen in den in Betracht kommenden Variablen analytisch sein. Nun gibt es für partielle Differentialgleichungen erster Ordnung auch andere Methoden, die keine Analytizität erheischen, und sich auf Voraussetzung der Differenzierbarkeit genügend hoher Ordnung beschränken. Für das Folgende möge nur die Charakteristikenmethode genannt werden. Das Bestreben, sich von der Analytizität zu befreien, ist nicht nur vom mathematischen Interesse. Für normal hyperbolische [1]) Differentialgleichungen, mit

[1]) Die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung $F(x_1,\dots,x_n,z,\dots p_l,\dots r_{lk})=0$ wird normal-hyperbolisch (kurz hyperbolisch) genannt, falls die in den Hilfsvariablen ξ_l quadratische Form $\sum\limits_{l,k} F_{r_{lk}}\xi_l\xi_k$ sich in die Normalform $\xi_n^2-\sum\limits_{l=1}^{n-1}\xi_l^2$ überführen läßt.