Sur l'approximation des fonctions continues par les superpositions de deux fonctions.

Par

V. **Jarník** et V. **Knichal** (Prague).

Soit A l'ensemble de toutes les fonctions $f(x)$ qui sont définies et continues sur l'intervalle fermé $I=\langle 0,1\rangle$ et dont les valeurs appartiennent à I. Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant:

Théorème 1er. *Soit $f_1(x), f_2(x),\ldots$ une suite infinie de fonctions de l'ensemble A. Alors il existe deux fonctions $\varphi_1(x)\in A$, $\varphi_2(x)\in A$ telles que toute fonction de la suite $f_1(x), f_2(x),\ldots$ soit une superposition finie de ces deux fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$.*

Prenons pour $f_1(x), f_2(x),\ldots$ la suite de tous les polynomes en x (définis dans I), réduits à l'intervalle I[1]), aux coefficients rationnels. En se rappelant un théorème bien connu de Weierstrass sur l'approximation des fonctions continues par les polynomes, on voit que le théorème 1er entraîne le conséquence suivante:

Théorème 2e. *Il existe deux fonctions $\varphi_1(x)\in A$, $\varphi_2(x)\in A$ jouissantes de la propriété suivante: $f(x)$ étant une fonction quelconque de A et de δ étant un nombre positif quelconque, il existe une fonction $\psi(x)$, qui est une superposition finie de ces deux fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, telle que*

$$\operatorname*{Max}_{0\leq x\leq 1}|f(x)-\psi(x)|<\delta.$$

C'est aux MM. Schreier et Ulam[2]) que l'on doit le théorème 2e, mais sous une forme moins précise: on obtient leur théorème en remplaçant, dans notre théorème 2e, partout les mots „deux fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$“ par „cinq fonctions $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_5(x)$“. Ensuite, M. Sierpiński[1]) a démontré un théorème, qui s'obtient de notre théorème 1er en y remplaçant partout les mots „deux fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$“ par „quatre fonctions $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_4(x)$“; il a donc aussi remplacé (à l'aide du théorème mentionné de Weierstrass) le nombre 5 par 4 dans le théorème des MM. Schreier et Ulam. Le but de cette note est donc de remplacer le nombre 4 dans le théorème de M. Sierpiński par 2.

[1]) C'est-à-dire tout polynome $P(x)$ doit être remplacé par la fonction $F(x)$, égale à $P(x)$, si $0\leq P(x)\leq 1$, égale à 0, si $P(x)<0$ et égale à 1, si $P(x)>1$.

[2]) Über topologische Abbildungen der euklidischen Sphären, *Fund. Math.* t. XXIII, p. 102—118.

Remarquons enfin que l'on ne peut remplacer, ni dans le théorème 1er, ni dans le théorème 2e, le nombre „deux“ par „un“. D'une manière plus précise, on a le théorème (presque banal) suivant:

Théorème 3e. *Il existe deux fonctions $f_1(x)\in A$, $f_2(x)\in A$, jouissantes de la propriété suivante: quelle que soit la fonction $\varphi(x)\in A$, on a ou bien*[2])

$$\operatorname*{Max}_{0\leq x\leq 1}|f_1(x)-\varphi^n(x)|\geqq \tfrac{1}{2}$$

pour chaque n entier et positif ou bien

$$\operatorname*{Max}_{0\leq x\leq 1}|f_2(x)-\varphi^n(x)|\geqq \tfrac{1}{2}$$

pour chaque n entier et positif[3]).

Démonstration du théorème 1er. Soit $f_1(x), f_2(x),\ldots$ une suite de fonctions de l'ensemble A. D'après le théorème de M. Sierpiński il existe quatre fonctions $\varphi_i(x)\in A$ $(i=1,2,3,4)$ telles que toute fonction $f_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ soit une superposition finie de ces quatre fonctions $\varphi_i(x)$. Pour achever la démonstration du théorème 1er, il suffit donc de construir deux fonctions $\psi_1(x)\in A$, $\psi_2(x)\in A$ telles que chaque fonction $\varphi_i(x)$ $(i=1,2,3,4)$ soit une superposition finie de ces deux fonctions $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$.

Pour ce but, posons

$$\psi_1(x)=\tfrac{1}{2}(x+1)\quad\text{pour}\quad 0\leqq x\leqq 1;$$

[1]) Sur l'approximation des fonctions continues par les superpositions de quatre fonctions, Fund. Math. t. XXIII. p. 119—120.

[2]) $\varphi^n(x)$ signifie la n-tième itérée de $\varphi(x)$.

[3]) Remarquons que le nombre 1/2 ne peut pas être remplacé par aucun nombre plus grand; car, en posant $\varphi(x)=1/2$ pour $x\in I$, on a $|f(x)-\varphi(x)|\leqq 1/2$ pour chaque $f\in A$ et pour chaque $x\in I$.

$$\psi_2(x) = \varphi_i(2^{i+2}(x-1+2^{-i})) \text{ pour } 1-2^{-i} \leqq x \leqq 1-2^{-i}+2^{-i-2}, \quad i=1,2,3,4,$$

$$\psi_2(x) = 8(x-1+2^{-5}) \text{ pour } 1-2^{-5} \leqq x \leqq 1;$$

dans le reste de l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$, définissons $\psi_2(x)$ d'une telle manière que $\psi_2(x) \in A$. Ceci est possible; pour le voir, il suffit de remarquer que

$$1-2^{-i}+2^{-i-2} < 1-2^{-(i+1)}, \quad 1-2^{-4}+2^{-6} < 1-2^{-5}.$$

On a

$$\psi_1^n(x) = 2^{-n}(x+2^n-1) \quad \text{pour} \quad n=1,2,\dots;$$

on le voit aussitôt par induction.

Soit maintenant i un nombre entier, $1 \leqq i \leqq 4$, $0 \leqq x \leqq 1$; alors on a

$$\psi_1^5(x) = 2^{-5}(x+2^5-1), \quad \text{donc} \quad 1-2^{-5} \leqq \psi_1^5(x) \leqq 1,$$

d'où

$$\psi_2\,\psi_1^5(x) = 8(\psi_1^5(x)-1+2^{-5}) = \frac{x}{4},$$

$$\psi_1^i\,\psi_2\,\psi_1^5(x) = 2^{-i}\left[\frac{x}{4}+2^i-1\right] = 2^{-i-2}x+1-2^{-i},$$

donc

$$1-2^{-i} \leqq \psi_1^i\,\psi_2\,\psi_1^5(x) \leqq 1-2^{-i}+2^{-i-2},$$

d'où enfin

$$\psi_2\,\psi_1^i\,\psi_2\,\psi_1^5(x) = \varphi_i(2^{i+2}(\psi_1^i\,\psi_2\,\psi_1^5(x)-1+2^{-i})) = \varphi_i(x),$$

ce qui achève le démonstration.

Démonstration du théorème 3e. Posons $f_1(x)=0$, $f_2(x)=1$ pour $0 \leqq x \leqq 1$. Supposons qu'il existe une fonction $\varphi(x) \in A$ et deux nombres entiers et positifs n, m tels que l'on ait pour tous les $x \in I$

$$|f_1(x)-\varphi^n(x)| < \tfrac{1}{2}, \quad |f_2(x)-\varphi^m(x)| < \tfrac{1}{2},$$

c'est-à-dire

$$\varphi^n(x) < \tfrac{1}{2}, \quad \varphi^m(x) > \tfrac{1}{2}.$$

Si l'on avait $n=m$, on aurait $\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ — contradiction; si l'on avait $n<m$, on aurait pour $0 \leqq x \leqq 1$

$$\varphi^m(x) = \varphi^n\,\varphi^{m-n}(x) < \tfrac{1}{2}$$

— contradiction; si l'on avait $n>m$, on aurait pour $0 \leqq x \leqq 1$

$$\varphi^n(x) = \varphi^m\,\varphi^{n-m}(x) > \tfrac{1}{2}$$

— contradiction.

Sur les suites infinies de fonctions définies dans les ensembles quelconques.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Le but de cette Note est de démontrer ce

Théorème I: *$f_1(p), f_2(p), f_3(p), \dots$ étant une suite infinie de fonctions définies sur un ensemble infini E (formé d'éléments quelconques), dont les valeurs sont des éléments de E, il existe deux fonctions de même nature, telles que toute fonction de la suite infinie considérée est une superposition (finie) de ces deux fonctions.*

Nous démontrerons d'abord le théorème I affaibli qu'on obtient lorsqu'on remplace dans le théorème I le nombre *deux* par le nombre *trois* [1]).

Soit E un ensemble infini donné. Comme on sait, E est une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles disjoints, dont chacun est de même puissance que E, soit

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots \tag{1}$$

Soit $\varphi(p)$ une fonction (définie dans E) qui transforme d'une façon biunivoque l'ensemble E en l'ensemble E_1, et soit $\varphi^{-1}(p)$ sa fonction inverse (définie dans E_1).

Soit $\psi(p)$ une fonction définie dans E et qui, pour tout n naturel, transforme d'une façon biunivoque l'ensemble E_n en l'ensemble E_{n+1} et soit, pour $n=1,2,3,\dots$, $\psi^{-n}(p)$ la fonction (définie dans l'en-

[1]) C'est ce théorème affaibli qui était trouvé par moi d'abord, et c'est la méthode de MM. Jarník et Knichal (voir ce volume, p. 206) qui a permis d'en déduire notre théorème I.