und $\mathfrak{D}$ aus $\mathfrak{S}_2$ ist etwas umständlicher. Eine gewisse Schwierigkeit verursacht übrigens nur das Postulat $\mathfrak{D}$. Es kommt darauf an, um zu zeigen, dass jede von 0 verschiedene Menge $X \epsilon \mathfrak{K}$ eine „atomistische" Untermenge enthält, d. h. solch eine andere, ebenfalls von 0 verschiedene Menge $Y \epsilon \mathfrak{K}$, welche keine anderen Mengen der Klasse $\mathfrak{K}$ umfasst, als 0 und sich selbst. Zu diesem Zweck betrachten wir ein beliebiges Element $x \epsilon X$ und setzen: $Y = \prod_{x \epsilon Z \text{ und } Z \epsilon \mathfrak{K}} Z$; auf Grund von (1) und (2) ist es nicht schwer zu beweisen, dass die Menge Y gerade solch eine „atomistische" Menge ist [8]). Der Satz ist also bewiesen.

Den Sinn des Satzes 8 könnte man in folgender Weise ausdrücken: das atomistische System der Boole'schen Algebra ist mit dem gewöhnlichen Klassenkalkül isomorph. In diesem Satz ist ausserdem eine ziemlich interessante Tatsache aus dem Gebiet der Mengenlehre enthalten: jede Klasse von Mengen $\mathfrak{K}$, welche die Bedingungen (1) und (2) des Postulats $\mathfrak{S}_2$ erfüllt (d. h. in Bezug auf die Operationen der Komplementbildung und der unbegrenzten Addition abgeschlossen ist), ist bezüglich der Inklusionsbeziehung mit der Klasse aller Untermengen einer gewissen Menge E isomorph.

[8]) Vergl. meine Arbeit: *Sur les classes d'ensembles closes par rapport à certaines opérations élémentaires*, Fund. Math., vol. 16, pp. 235 ff.

Sur la séparabilité multiple des ensembles.

Par

Stanisław Ruziewicz (Lwów).

Soit K une classe donnée, formée d'éléments quelconques et soit Φ une famille donnée de sous-ensembles de K. La famille Φ sera dite *(simplement) additive* (resp. *multiplicative*) si, E_1 et E_2 étant deux ensembles de la famille Φ, leur somme $E_1 + E_2$ (resp. leur produit $E_1 E_2$) appartient encore à Φ.

Nous dirons que *la famille Φ admet le second principe de M. Lusin* si E_1 et E_2 étant deux ensembles de la famille Φ, il existe deux ensembles H_1 et H_2, tels que $H_1 H_2 = 0$, $E_1 - E_2 \subset H_1$, $E_2 - E_1 \subset H_2$, $K - H_1 \epsilon \Phi$ et $K - H_2 \epsilon \Phi$.

Nous dirons que la famille Φ admet le second principe de M. Lusin généralisé si, étant donné un nombre fini d'ensembles de la famille Φ, $E_1, E_2, \dots, E_n$, il existe des ensembles $H_1, H_2, \dots, H_n$, tels que $H_1 H_2 \dots H_n = 0$ et que $K - H_i \epsilon \Phi$ et $E_i - E_1 E_2 \dots E_n \subset H_i$ pour $i = 1, 2, \dots, n$ [1]). Si cela a lieu pour un nombre n fixe d'ensembles, nous dirons que la famille Φ jouit de la propriété P_n.

Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant:

Théorème. *Si la famille Φ* (de sous-ensembles d'une classe K quelconque) *est (simplement) additive et multiplicative et si elle admet le second principe de M. Lusin, elle admet le second principe de M. Lusin généralisé.*

Ce théorème est une généralisation d'une proposition démontrée par M. N. Lusin d'après laquelle la famille de tous les ensembles analytiques jouit de la propriété P_3 [2]). Il est à remarquer que notre

[1]) W. Sierpiński, *Fund. Math.* t. 23, p. 293.

[2]) N. Lusin, *C. R. de l'Acad. des Sc. de l'URSS* vol. II, p. 282 (séance du 19. IV. 1934).

théorème permet de déduire le théorème III de M. Sierpiński, démontré dans le t. XXIII des *Fundamenta Mathematicae*, p. 300—303 (que la famille Φ_α de tous les ensembles Q^α admet le second principe de M. Lusin généralisé), immédiatement du théorème que M. Sierpiński a démontré dans *Mathematica* (Cluj 1932), vol. VI, p. 117 (que la famille Φ_α admet le second principe de M. Lusin). Il est aussi à remarquer que notre théorème ne peut pas être généralisé pour une suite infinie d'ensembles $E_1, E_2, E_3, \ldots$, ce qui résulte d'une remarque de M. Sierpiński, *Fund. Math.* t. XXIII, p. 303.

Démonstration.

Nous démontrerons notre théorème par l'induction. D'après la condition de notre théorème, la famille Φ jouit de la propriété P_2. Il suffira donc de démontrer que si la famille Φ (de sous-ensembles d'une classe K) est (simplement) additive et multiplicative et si elle jouit (pour un nombre naturel $n > 2$) de la propriété P_k, pour $2 \leqslant k \leqslant n-1$, elle jouit aussi de la propriété P_n.

Lemme I. *$E_1, E_2, \ldots, E_n$ étant des ensembles quelconques (où $n > 1$), on a l'identité*

$$(1)\qquad \begin{aligned} E_1 - E_1E_2\ldots E_n = {} & (E_1-E_2)(E_1-E_n) + (E_1-E_3)(E_1-E_n) + \\ & \ldots + (E_1-E_{n-1})(E_1-E_n) + (E_1-E_n)(E_{n-1}-E_n) + \\ & + (E_1-E_2)(E_n-E_2) + (E_1-E_3)(E_n-E_3) + \\ & \ldots + (E_1-E_{n-1})(E_n-E_{n-1}). \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $p \in E_1 - E_1E_2\ldots E_n$. On a donc $p \in E_1$ et p non $\in E_i$, où i est un indice, tel que $2 \leqslant i \leqslant n$. Distinguons deux cas:

1) $p \in E_n$. Dans ce cas on a p non $\in E_i$, où $2 \leqslant i \leqslant n-1$, donc $p \in (E_1 - E_i)(E_n - E_i)$.

2) p non $\in E_n$. Si $p \in E_{n-1}$, on a $p \in (E_1 - E_n)(E_{n-1} - E_n)$, et si p non $\in E_{n-1}$, on a $p \in (E_1 - E_{n-1})(E_1 - E_n)$.

Donc, si p appartient au côté gauche de la formule (1), p appartient aussi au côté droit de cette formule. Or, il est évident que si p appartient au côté droit de la formule (1), on a $p \in E_1$ et p n'appartient pas à un au moins des ensembles $E_2, E_3, \ldots, E_n$: on a donc $p \in E_1 - E_1E_2\ldots E_n$.

L'identité (1) est ainsi établie.

De l'identité (1) on tire $n-1$ nouvelles identités en échangeant successivement les indices 1 et 2, puis 1 et 3, …, enfin 1 et n. On obtient ainsi avec (1) les n identités

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} E_1 - E_1E_2\ldots E_n = {} & (E_1-E_2)(E_1-E_n) + (E_1-E_3)(E_1-E_n) + \\ & \ldots + (E_1-E_{n-1})(E_1-E_n) + (E_1-E_n)(E_{n-1}-E_n) + \\ & + (E_1-E_2)(E_n-E_2) + \ldots + (E_1-E_{n-1})(E_n-E_{n-1}), \\ E_2 - E_1E_2\ldots E_n = {} & (E_2-E_1)(E_2-E_n) + (E_2-E_3)(E_2-E_n) + \\ & \ldots + (E_2-E_{n-1})(E_2-E_n) + (E_2-E_n)(E_{n-1}-E_n) + \\ & + (E_2-E_1)(E_n-E_1) + \ldots + (E_2-E_{n-1})(E_n-E_{n-1}) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_n - E_1E_2\ldots E_n = {} & (E_n-E_2)(E_n-E_1) + (E_n-E_3)(E_n-E_1) + \\ & \ldots + (E_n-E_{n-1})(E_n-E_1) + (E_n-E_1)(E_{n-1}-E_1) + \\ & + (E_n-E_2)(E_1-E_2) + \ldots + (E_n-E_{n-1})(E_1-E_{n-1}). \end{aligned} \right.$$

Nous allons maintenant à définir (pour $n \geqslant 3$) les ensembles $H_{i,j}$ ($i \neq j$; $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$) comme il suit.

Soient i et j, deux indices donnés différents $\leqslant n$.

D'après l'hypothèse, la famille Φ jouit de la propriété P_k pour $2 \leqslant k \leqslant n-1$, donc, en particulier, de la propriété P_2 (puisque $n \geqslant 3$).

Il existe donc deux ensembles disjoints $H_i(j)$ et $H_j(i)$, dont les complémentaires (par rapport à K) appartiennent à la famille Φ et telles que

$$(3)\qquad E_i - E_iE_j \subset H_i(j) \quad \text{et} \quad E_j - E_iE_j \subset H_j(i).$$

Si $n > 3$, la famille Φ jouit (d'après l'hypothèse) de la propriété P_3 et il existe pour tout nombre naturel s, où $1 \leqslant s \leqslant n$, $s \neq i$ et $s \neq j$, trois ensembles $H_i(j,s)$, $H_j(i,s)$, $H_s(i,j)$, dont le produit est vide et dont les complémentaires appartiennent à Φ et tels que

$$E_i - E_iE_jE_s \subset H_i(j,s),\quad E_j - E_iE_jE_s \subset H_j(i,s),\quad E_s - E_iE_jE_s \subset H_s(i,j).$$

Généralement (si $n > 3$), r étant un indice $\leqslant n-3$ (la famille Φ jouissant de la propriété P_k pour $k \leqslant n-1$), il existe pour tout système $s_1, s_2, \ldots, s_r$ de r nombres de la suite $1, 2, \ldots, n$, distincts de i et de j, $r+2$ ensembles

$$H_i(j, s_1, s_2, \ldots, s_r),\ H_j(i, s_1, s_2, \ldots, s_r),\ H_{s_1}(i, j, s_2, \ldots, s_r),$$
$$\ldots,\ H_{s_l}(i, j, s_1, s_2, \ldots, s_{l-1}, s_{l+1}, \ldots, s_r), \ldots,\ H_{s_r}(i, j, s_1, \ldots, s_{r-1}),$$

dont le produit est vide et dont les complémentaires appartiennent à Φ, et tels que

$$
\begin{aligned}
&E_i - E_i E_j E_{s_1} E_{s_2} \dots E_{s_r} \subset H_i(j, s_1, s_2, \dots, s_r),\\
&E_j - E_i E_j E_{s_1} E_{s_2} \dots E_{s_r} \subset H_j(i, s_1, s_2, \dots, s_r),\\
&E_{s_1} - E_i E_j E_{s_1} E_{s_2} \dots E_{s_r} \subset H_{s_1}(i, j, s_2, \dots, s_r),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&E_{s_l} - E_i E_j E_{s_1} E_{s_2} \dots E_{s_r} \subset H_{s_l}(i, j, s_1, \dots, s_{l-1}, s_{l+1}, \dots, s_r),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&E_{s_r} - E_i E_j E_{s_1} E_{s_2} \dots E_{s_r} \subset H_{s_r}(i, j, s_1, \dots, s_{r-1}).
\end{aligned}
$$

Nous poserons:

$$
(4)\qquad H_{i,j} = H_i(j) \cdot \prod_{s_1} H_i(j, s_1) \cdot \prod_{t_1, t_2} H_i(j, t_1, t_2) \dots \prod_{z_1, z_2, \dots, z_{n-3}} H_i(j, z_1, z_2, \dots, z_{n-3}),
$$

où $\prod\limits_{l_1, l_2, \dots, l_k} H_i(j, l_1, l_2, \dots, l_k)$ désigne (pour $k \leqslant n-3$) le produit de tous les ensembles $H_i(j\ l_1, l_2, \dots, l_k)$ correspondant à tous les systèmes de k nombres $l_1, l_2, \dots, l_k$ de la suite $1, 2, \dots, n$ distinct de i et de j [1]).

Il résulte tout de suite de (3) et (4) que

$$
(5)\qquad E_i - E_j \subset H_{i,j}.
$$

Soit maintenant $a_1, a_2, \dots, a_k$, où $k \leqslant n-1$, une suite croissante de nombres naturels. Nous dirons que les ensembles

$$
H_{a_1, b_1}, H_{a_2, b_2}, \dots, H_{a_k, b_k} \quad (\text{où } a_i \neq b_i \text{ pour } i = 1, 2, \dots, k)
$$

forment un *cycle*, si $b_1, b_2, \dots, b_k$ sont des nombres de la suite $a_1, a_2, \dots, a_k$ (pas nécessairement distincts).

Lemme II. *Le produit des ensembles formant un cycle est* (*pour* $k \leqslant n-1$) *un ensemble vide.*

Démonstration. L'ensemble

$$
(6)\qquad H_{a_1, b_1} H_{a_2, b_2} \dots H_{a_k, b_k}
$$

contient, comme il résulte de la définition des ensembles $H_{i,j}$ (formule (4)), le facteur

$$
(7)\qquad H_{a_1}(b_1, s_1, s_2, \dots, s_{k-2})\, H_{a_2}(b_2, t_1, t_2, \dots, t_{k-2}) \dots H_{a_k}(b_k, z_1, z_2, \dots, z_{k-2})
$$

[1]) On peut admettre que $l_1 < l_2 < \dots < l_k$, les ensembles $H_i(j, l_1, l_2, \dots, l_k)$ étant égaux pour toutes les permutations du système donné $l_1, l_2, \dots, l_k$.

où $s_1, s_2, \dots, s_{k-2}$ sont tous les nombres de la suite $a_1, a_2, \dots, a_k$ autres que a_1, b_1, puis, $t_1, t_2, \dots, t_{k-2}$ sont tous les nombres de la suite $a_1, a_2, \dots, a_k$, autres que a_2 et b_2, enfin $z_1, z_2, \dots, z_{k-2}$ sont tous les nombres de la suite $a_1, a_2, \dots, a_k$ autres que a_k et b_k. D'après la définition des ensembles $H_i(j, s_1, s_2, \dots, s_r)$ le produit (7) est donc vide. L'ensemble (6), en tant que contenant un facteur vide, est donc vide et le lemme II est démontré.

De (2) et (5) on tire les formules:

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
&E_1 - E_1 E_2 \dots E_n \subset H_{1,2} H_{1,n} + H_{1,3} H_{1,n} + \dots + H_{1,n-1} H_{1,n} +\\
&\qquad + H_{1,n} H_{n-1,n} + H_{1,2} H_{n,2} + H_{1,3} H_{n,3} + \dots + H_{1,n-1} H_{n,n-1},\\
&E_2 - E_1 E_2 \dots E_n \subset H_{2,1} H_{2,n} + H_{2,3} H_{2,n} + \dots + H_{2,n-1} H_{2,n} +\\
&\qquad + H_{2,n} H_{n-1,n} + H_{2,1} H_{n,1} + H_{2,3} H_{n,3} + \dots + H_{2,n-1} H_{n,n-1},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&E_k - E_1 E_2 \dots E_n \subset H_{k,2} H_{k,n} + H_{k,3} H_{k,n} + \dots + H_{k,n-1} H_{k,n} +\\
&\qquad + H_{k,n} H_{n-1,n} + H_{k,2} H_{n,2} + H_{k,3} H_{n,3} + \dots + H_{k,n-1} H_{n,n-1}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&E_{n-1} - E_1 E_2 \dots E_n \subset H_{n-1,2} H_{n-1,n} + H_{n-1,3} H_{n-1,n} + \dots + H_{n-1,1} H_{n-1,n} +\\
&\qquad + H_{n-1,n} H_{1,n} + H_{n-1,2} H_{n,2} + H_{n-1,3} H_{n,3} + \dots + H_{n-1,1} H_{n,1},\\
&E_n - E_1 E_2 \dots E_n \subset H_{n,2} H_{n,1} + H_{n,3} H_{n,1} + \dots + H_{n,n-1} H_{n,1} +\\
&\qquad + H_{n,1} H_{n-1,1} + H_{n,2} H_{1,2} + H_{n,3} H_{1,3} + \dots + H_{n,n-1} H_{1,n-1}.
\end{aligned}
\right.
$$

Divisons les $2n-3$ termes du côté droit de chaque ligne de formule (8) en trois groupes, en rangeant dans le premier groupe les $n-2$ premiers termes, dans le deuxième groupe un seul terme suivant et dans le troisième groupe les $n-2$ termes qui restent.

Nous démontrerons maintenant que le produit des côtés droits des formules (8) est vide.

Considérons donc un terme F de $(2n-3)^n$ termes de ce produit.

Supposons que F contient comme facteurs du 1[er] groupe

$$
(9)\qquad H_{a_1, b_1} H_{a_1, n}, H_{a_2, b_2} H_{a_2, n}, \dots, H_{a_r, b_r} H_{a_r, \varepsilon}
$$

où $\varepsilon = n$ si $a_r < n$, et $\varepsilon = 1$ si $a_r = n$; comme facteurs du troisième groupe

$$
(10)\qquad H_{c_1, d_1} H_{n, d_1} H_{c_2, d_2} H_{n, d_2}, \dots, H_{c_s, d_s} H_{n, d_s},
$$

et supposons que les $n - r - s$ facteurs restants appartiennent au deuxième groupe aux lignes $g_1, g_2, \dots g_{n-r-s}$: ces facteurs sont de la forme $H_{g_i,n} H_{n-1,n}$ si $g_i < n-1$, de la forme $H_{1,n} H_{n-1,n}$ si $g_i = n-1$ et de la forme $H_{g_i,1} H_{n-1,1}$, si $g_i = n$.

La suite de n nombres

$$a_1, a_2, \ldots, a_r, \quad c_1, c_2, \ldots, c_s, \quad g_1, g_2, \ldots, g_{n-r-s}$$

ne diffère que peut être par l'orde de leur termes de la suite $1, 2, 3, \ldots, n$.

I) Supposons d'abord que $r > 0$, $s > 0$, $n - r - s > 0$, c'est-à-dire que le produit F contient effectivement les facteurs de chacun de nos trois groupes.

Distinguons ici les cas suivants:

1) Tous les nombres d_i sont pris parmis les $c_1, c_2, \ldots, c_s$. Dans ce cas (d'après $s < n$) les premiers facteurs des ensembles (10) forment un cycle: leur produit est donc vide, d'où $F = 0$.

2) Il existe deux indices i et j, tels que $d_i = a_j$.

Le produit des ensembles (9) et (10) contient dans ce cas les facteurs $H_{a_j,n}$ et H_{n,a_j}, dont le produit est vide (puisque ces deux ensembles forment un cycle), d'où $F = 0$.

3) Il existe deux indices i et j, tels que $d_i = g_j$. Dans ce cas on a $g_j < n$, le troisième groupe ne contenant pas le facteur $H_{n,n}$. Alors le produit des ensembles (10) par les facteurs du troisième groupe contient les facteurs H_{n,g_j} et $H_{g_j,n}$, dont le produit est vide. On a donc $F = 0$.

II) Supposons que $r = 0$, $s > 0$, $n - r - s > 0$. Dans ce cas ou bien tous les d_i appartiennent à la suite $c_1, c_2, \ldots, c_s$ et alors, d'après $s < n$, les premiers facteurs des ensembles (10) forment un cycle, d'où $F = 0$, ou bien un d_i est un g_j, d'où, comme dans I_3, nous concluons que $F = 0$.

III) Supposons que $n - r - s = 0$, $r \geqslant 0$, $s \geqslant 0$.

Considérons le produit de ces des ensembles (9) et (10) qui appartiennent au premières $n - 1$ lignes.

Ce produit contient les facteurs

$$H_{a_1,b_1} H_{a_2,b_2} \ldots H_{a_r,b_r} H_{c_1,d_1} H_{c_2,d_2} \ldots H_{c_{s-1},d_{s-1}},$$

resp. les facteurs

$$H_{a_1,b_1} H_{a_2,b_2} \ldots H_{a_{r-1},b_{r-1}} H_{c_1,d_1} H_{c_r,d_r} \ldots H_{c_s,d_s}.$$

Dans les deux cas on a $a_i \leqslant n-1$, $b_i \leqslant n-1$, $c_i \leqslant n-1$, $d_i \leqslant n-1$ pour chaque i correspondant à ces facteurs, et chacun de ces deux produits contient $n-1$ facteurs du type $H_{i,j}$. Les facteurs de nos produits forment donc des cycles, d'où $F = 0$.

IV) Supposons que $n - r - s = n$, donc que $r = 0$ et $s = 0$.

Le produit F contient dans ce cas comme facteurs tous et seulement les termes du deuxième groupe. Mais le premier terme de ce groupe est $H_{1,n} H_{n-1,n}$ et le dernier est $H_{n,1} H_{n-1,1}$, d'où, d'après $H_{1,n} H_{n,1} = 0$, nous concluons que $F = 0$.

V) Supposons enfin que $s = 0$, $r \geqslant 0$, $n - r - s \geqslant 0$.

Si $r = 0$, nous avons le cas IV), si $n - r - s = 0$, nous avons le cas III). Soit donc $r > 0$ et $n - r - s > 0$. Le terme F contient alors comme facteurs seulement les ensembles du premier et du deuxième groupe. Mais chaque terme de la 1[re] ligne du premier et du deuxième groupe contient le facteur $H_{1,n}$ et de la dernière ligne — le facteur $H_{n,1}$: on a donc encore dans ce cas $F = 0$.

Chacun de $(2n-3)^n$ termes F du point de côtes droits des formules (8) est donc vide, d'où il résulte que ce produit lui-même est un ensemble vide.

Nous avons donc démontré que les ensembles $E_i - E_1 E_2 \ldots E_n$ sont contenus respectivement dans les ensembles H_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, dont le produit est vide.

Or, il résulte sans peine des propriétés de la famille Φ et des formules de de Morgan que $K - H_i \in \Phi$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

Notre théorème est ainsi démontré.