Un théorème de la théorie générale des ensembles et ses conséquences.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Le but de cette Note est de démontrer un théorème de la théorie générale des ensembles et d'en déduire quelques conséquences.

Théorème I. *Si E est un ensemble infini de puissance $\mathfrak{m}$ (formé d'éléments quelconques) et Φ une famille de puissance $\mathfrak{m}$ de sous-ensembles de E de puissance $\mathfrak{m}$, l'ensemble E contient $\mathfrak{m}$ ensembles disjoints de puissance $<\mathfrak{m}$ et tels que la somme de toute infinité de puissance $\mathfrak{m}$ d'entre eux a au moins un élément commun avec tout ensemble de la famille Φ.*

Démonstration.

Soit E un ensemble infini de puissance $\mathfrak{m}$ et soit φ le plus petit nombre ordinal de puissance $\mathfrak{m}$. Il existe donc une suite transfinie

$$(1) \qquad x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\xi, \ldots \qquad (\xi<\varphi)$$

formée de tous les éléments de l'ensemble E.

Soit Φ une famille de puissance $\mathfrak{m}$ de sous-ensembles de E de puissance $\mathfrak{m}$: il existe donc une suite transfinie du type φ,

$$(2) \qquad E_1, E_2, E_3, \ldots, E_\omega, E_{\omega+1}, \ldots, E_\xi, \ldots, \qquad (\xi<\varphi)$$

formée de tous les ensembles de la famille Φ.

Nous définirons maintenant par l'induction transfinie une suite transfinie $\{H_\xi\}_{\xi<\varphi}$ de sous-ensembles de E comme il suit.

L'ensemble H_1 sera défini comme formé d'un seul élément x_1. Soit maintenant α un nombre ordinal donné quelconque compris entre 1 et φ et supposons que nous avons déjà défini tous les ensembles H_ξ, où $\xi<\alpha$ et que la puissance de H_ξ est $\leqslant \bar{\xi}$. Soit $S_\alpha = \sum_{\xi<\alpha} H_\xi$. L'ensemble H_ξ étant de puissance $\leqslant\bar{\xi}\leqslant\bar{\alpha}$, pour $\xi<\alpha$, la somme S_α est évidemment de puissance $\leqslant\bar{\alpha}^2$, donc de puissance $<\mathfrak{m}$, puisque $\alpha<\varphi$ et φ est le plus petit nombre ordinal de puissance $\mathfrak{m}$. Nous définirons par l'induction transfinie une suite transfinie d'éléments $\{p_\xi^\alpha\}_{\xi<\alpha}$ comme il suit. L'ensemble E_1 étant de puissance $\mathfrak{m}$ et l'ensemble S_α étant de puissance $<\mathfrak{m}$, on a $E_1 - S_\alpha \neq 0$. Soit p_1^α le premier terme de la suite (1) qui appartient à $E_1 - S_\alpha$.

Soit maintenant η un nombre ordinal compris entre 1 et α et supposons que nous avons déjà défini tous les éléments p_ξ^α, où $\xi<\eta$: soit T_η^α leur ensemble: c'est donc un ensemble de puissance $\leqslant\bar{\eta}\leqslant\bar{\alpha}<\mathfrak{m}$ et on a (E_η étant de puissance $\mathfrak{m}$) $E_\eta-(S_\alpha+T_\eta)\neq 0$. Soit p_η^α le premier terme de la suite (1) qui appartient à l'ensemble $E_\eta-(S_\alpha+T_\eta)$.

Nous définirons H_α comme l'ensemble de tous les points p_ξ^α, où $\xi<\alpha$: ce sera donc un ensemble de puissance $\leqslant\bar{\alpha}$, donc de puissance $<\mathfrak{m}$ (puisque $\alpha<\varphi$).

Les ensembles H_ξ $(\xi<\varphi)$ sont ainsi définis par l'induction transfinie, et on voit sans peine qu'ils sont des sous-ensembles disjoints de E, chacun de puissance $<\mathfrak{m}$.

Soit maintenant F une famille quelconque de puissance $\mathfrak{m}$ d'ensembles de la suite transfinie $\{H_\xi\}_{\xi<\varphi}$. Il résulte donc de la propriété du nombre φ qu'il existe pour tout nombre ordinal $\mu<\varphi$ un nombre ordinal α, tel que $\mu<\alpha<\varphi$ et $H_\alpha \in F$. D'après $\alpha>\mu$ et d'après la définition de l'ensemble H_α, on a $p_\mu^\alpha \in H_\alpha$. Or, d'après la définition de l'élément p_μ^α, on a $p_\mu^\alpha \in E_\mu$. On a donc $E_\mu H_\alpha \neq 0$, donc, S désignant la somme de tous les ensembles de la famille F: $E_\mu S \neq 0$.

Or, μ pouvant être un nombre ordinal quelconque $<\varphi$, cela prouve que l'ensemble S a au moins un élément commun avec tout ensemble de la suite (2), donc avec tout ensemble de la famille Φ.

Notre théorème est ainsi démontré.

Remarque. Il est à remarquer que dans l'énoncé de notre théorème le mot „*contient*" peut être remplacé par les mots „*est une somme de*".

En effet, soient $\{H_\xi\}_{\xi<\varphi}$ les sous-ensembles de E qui satisfont aux conditions de notre théorème. L'ensemble $R = E - \sum_{\xi<\varphi} H_\xi$ est évidemment de puissance $\leqslant \overline{\overline{E}} = \mathfrak{m}$ et il existe une suite bien ordonnée $\{q_\xi\}_{\xi<\psi}$ du type ψ, où $0 \leqslant \psi \leqslant \varphi$, formée de tous les éléments de l'ensemble R. Posons $M_\xi = H_\xi + (q_\xi)$ pour $\xi < \psi$ et $M_\xi = H_\xi$ pour $\psi \leqslant \xi < \varphi$ (si $\psi < \varphi$): les ensembles M_ξ $(\xi < \varphi)$ sont évidemment des sous-ensembles disjoints de E de puissance $< \mathfrak{m}$, tels que la somme de toute infinité de puissance $\mathfrak{m}$ d'entre eux a au moins un élément commun avec tout ensemble de la famille Φ et, comme on voit sans peine, on a $E = \sum_{\xi<\varphi} M_\xi$.

Soit maintenant E l'intervalle $J = [0 \leqslant x \leqslant 1]$, $\mathfrak{m} = 2^{\aleph_0}$ et soit Φ la famille de tous les ensembles parfaits contenus dans J. Cette dernière étant de puissance $2^{\aleph_0}$, il résulte tout de suite de notre théorème et de notre Remarque ce

Corollaire. *Il existe une décomposition de l'intervalle $J = [0 \leqslant x \leqslant 1]$ en $2^{\aleph_0}$ ensembles disjoints de puissance $< 2^{\aleph_0}$ et tels que la somme de toute infinité de puissance $2^{\aleph_0}$ d'entre eux a au moins un point commun avec tout ensemble parfait contenu dans J.*

De notre corollaire on déduit facilement ce

Théorème II. *L'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$) équivaut à la proposition (P) suivante:*

(P). *L'intervalle $J = [0 \leqslant x \leqslant 1]$ est une somme d'ensembles dénombrables disjoints et tels que la somme de toute infinité indénombrable d'entre eux a au moins un point commun avec tout ensemble parfait contenu dans J.*

En effet, d'une part, la proposition (P) est une conséquence facile de notre corollaire et de l'hypothèse, que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

D'autre part, admettons la proposition (P). Il en résulte qu'il existe dans l'intervalle J $\aleph_1$ ensembles dénombrables disjoints, dont la somme — qui est évidemment de puissance $\aleph_1$ — a au moins un point commun avec tout ensemble parfait contenu dans J, et par suite est de puissance $2^{\aleph_0}$ (puisque J contient $2^{\aleph_0}$ ensembles parfaits disjoints). On a donc $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$.

M. S. Ruziewicz a posé récemment le problème suivant.

L'intervalle $J = [0 \leqslant x \leqslant 1]$ étant décomposé en une famille F d'ensembles disjoints de mesure nulle, existe-t-il toujours une partie F_1 de la famille F telle que la somme de tous les ensembles de la famille F_1 soit un ensemble mesurable de mesure positive donnée quelconque < 1?

Il résulte tout de suite de notre théorème II que, *si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, la réponse au problème de M. Ruziewicz est négative* [1]).

C'est le problème de M. Ruziewicz qui m'a conduit au théorème I.

En admettant que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ j'ai démontré qu'il existe une décomposition de tout ensemble M de puissance $2^{\aleph_0}$ en une classe de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ d'ensembles non dénombrables, ayant deux à deux un ensemble au plus dénombrable d'éléments communs [2]). Du théorème II et de cette proposition (appliquée à l'ensemble M formé d'ensembles dénombrables disjoints satisfaisant aux conditions de la proposition (P)) on déduit facilement ce

Théorème III. *Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe une décomposition de l'intervalle $J = [0 \leqslant x \leqslant 1]$ en $2^{2^{\aleph_0}}$ ensembles ayant deux à deux un ensemble au plus dénombrable de points communs et ayant chacun au moins un point commun avec tout ensemble parfait contenu dans J.*

Tout ensemble $\subset J$ qui a au moins un point commun avec tout ensemble parfait contenu dans J est, comme on voit sans peine, de mesure extérieure $= 1$ et de deuxième catégorie sur tout ensemble parfait. Il résulte donc tout de suite du théorème III le théorème que j'ai démontré dans le t. XIII de ce journal, p. 195.

[1]) Cf. ma Note dans *Mathematica*, Vol. X. Dans une Note ultérieure qui paraîtra dans ce volume je donnerai une solution du problème de M. Ruziewicz sans utiliser l'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. (Voir p. 43).

[2]) *Monatshefte f. Math. u. Phys.* XXXV (1928), p. 241; v. aussi A. Tarski, *Fund. Math.* t. XII, p. 199 (Cor. 20 pour $\alpha = 0$).