Sur les transformations d'espaces métriques en circonférence.

Par

Samuel Eilenberg (Varsovie).

Introduction.

Dans cette Note, je me propose de caractériser par un procédé particulièrement simple les transformations, dites *essentielles*, des espaces métriques en circonférence et d'en déduire par une voie très courte: 1⁰ les théorèmes antérieurs de M. K. Borsuk sur les ensembles unicohérents [1]) (même dans une forme généralisée) 2⁰ les théorèmes bien généraux sur les coupures du plan faites par des ensembles tout à fait arbitraires et qui donnent, en particulier, la solution d'un problème de M. C. Kuratowski (th. 12) 3⁰ un théorème (th. 14) sur les transformations dites intérieures et qui semble être nouveau.

La partie méthodologique de cette Note peut être justifiée par le rôle que les transformations de divers espaces en surface S_n (= sphère euclidienne à n-dimensions) jouent actuellement en Topologie. L'étude de ces transformations paraît constituer, en effet, le seul moyen permettant de passer à l'heure présente des recherches topologiques qui contiennent des notions combinatoires aux recherches qui en sont dépourvues.

C'est ainsi p. ex. que la démonstration de M. P. Alexandroff pour l'équivalence de sa notion de dimension (selon le module variable) avec celle de Menger-Urysohn s'appuie essentiellement sur les propriétés des transformations en question [2]). Sans avoir recours à ces transformaiions, on ne sait établir non plus l'invariance des coupures dans un espace euclidien [3]), sinon à l'aide des notions

[1]) Borsuk [1]. Pour les chiffres entre crochets voir la table des ouvrages cités, p. 175.

[2]) Alexandroff [1], p. 196.

[3]) Borsuk [3].

combinatoires. De même, la notion combinatoire d'espace *simplement cyclique* („einfach zyklisch") se laisse caractériser, pour les espaces compacts de dimension n, par l'existence des transformations essentielles de cet espace en S_n [4]). Enfin, l'importance des transformations continues d'un espace compact en circonférence S_1 s'exprime par le fait qu'elles déterminent complêtement son groupe 1-dimensionnel de Betti [5]).

1. Transformations essentielles en S_1.

Désignons par R_1 l'espace des nombres réels et par S_1 la circonférence $|z| = 1$ sur le plan des nombres complexes.

Tous les espaces considérés seront supposés métriques. Etant donnés deux espaces X et Y, on désigne par Y^X l'ensemble de toutes les fonctions continues f qui transforment X en sous-ensembles de Y. Dans le cas où l'espace Y est borné ou bien si l'espace X est compact, on considère Y^X comme un espace métrique, en posant

$$|f_1 - f_2| = \sup_{x \in X} |f_1(x) - f_2(x)| \text{ [6]).}$$

Une fonction $f \in S_1^X$ sera dite *inessentielle*, lorsqu'elle appartient à la même composante de l'espace S_1^X que la fonction $f_0(x) = 1$. Dans le cas contraire, la transformation f s'appellera *essentielle* [7]).

La connexité de l'espace S_1^X équivaut donc à la propriété de X que chaque transformation $f \in S_1^X$ est inessentielle.

Considérons maintenant deux fonctions $f_1, f_2 \in S_1^X$ telles que $|f_1 - f_2| < 2$. Désignons, pour tout $x \in X$, par $\psi(x)$ le plus petit angle de rotation (muni de son signe) que doit effectuer le vecteur $\overrightarrow{0, f_1(x)}$ jusqu'à sa coïncidence avec le vecteur $\overrightarrow{0, f_2(x)}$. La fonction ψ est donc continue (puisque $|\psi(x)| < \pi$) et on a $f_2(x) = f_1(x) \cdot e^{i\psi(x)}$ pour tout $x \in X$. On en conclut facilement (en considérant les fonctions $f_1(x) \cdot e^{it\psi(x)}$) que si l'une des fonctions f_1, f_2 est inessentielle, l'autre l'est aussi. Il en résulte que les transformations inessentielles forment un ensemble connexe, ouvert et fermé dans S_1^X.

[4]) Alexandroff [1], p. 223.

[5]) Bruschlinsky [1], voir aussi Borsuk [5] et Čech [1].

[6]) Voir p. ex. Kuratowski [4], p. 90.

[7]) Hopf [1]. La définition de M. H. Hopf est différente de celle du texte, mais elle lui équivaut dans les cas des sphères eucliediennes S_n et des espaces X compacts.

Théorème 1. *Pour qu'une transformation $f \in S_1^X$ d'un espace compact X soit inessentielle, il faut et il suffit qu'il existe une fonction $\varphi \in R_1^X$ telle que $f(x) = e^{i\varphi(x)}$ pour tout $x \in X$.*

D é m o n s t r a t i o n. La condition est suffisante; en effet, on n'a qu'à poser $f(x, t) = e^{it\varphi(x)}$ pour $x \in X$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$ [8]). Pour prouver que toutes les transformations inessentielles remplissent la condition du th. 1, remarquons que la fonction $f_0(x) \equiv 1$ la remplit (notamment en posant $\varphi_0(x) \equiv 0$); considérons une fonction $f_1 \in S_1^X$ qui jouit de la propriété en question et supposons que $f_2 \in S_1^X$ et que $|f_1 - f_2| < 2$. Il en résulte qu'il existe deux fonctions $\psi \in R_1^X$ et $\varphi_1 \in R_1^X$ telles que $f_2(x) = f_1(x)\, e^{i\psi(x)}$ et que $f_1(x) = e^{i\varphi_1(x)}$ pour tout $x \in X$. En posant donc $\varphi_2 = \varphi_1 + \psi$ on a $\varphi_2 \in R_1^X$ et $f_2(x) = e^{i\varphi_2(x)}$ pour tout $x \in X$. Nous avons ainsi démontré que les transformations $f \in S_1^X$ qui jouissent de la propriété en question forment dans l'espace S_1^X un ensemble ouvert, fermé et contenant la transformation inessentielle $f_0(x) \equiv 1$. Cet ensemble contient donc toutes les transformations inessentielles, puisque ces dernières forment un ensemble connexe.

Théorème 2. *X étant une courbe simple fermée, toute homéomorphie $f \in S_1^X$ est une transformation essentielle* [9]).

D é m o n s t r a t i o n. En supposant notamment qu'il existe une fonction $\varphi \in R_1^X$ telle que $f(x) = e^{i\varphi(x)}$ pour tout $x \in X$, la fonction $\varphi \in R_1^X$ serait une homéomorphie, ce qui est évidemment impossible.

Il est à remarquer que le th. 2 permet d'obtenir [10]) une démonstration particulièrement simple du „Fixpunktsatz" de M. L. E. J. B r o u w e r dans le cas du cercle $|z| \leqslant 1$.

2. Propriétés générales de l'espace S_1^X.

Théorème 3. *$X + Y$ étant une somme de deux espaces compacts, la connexité des espaces S_1^X, S_1^Y et $X \cdot Y$ entraîne celle de l'espace S_1^{X+Y}* [11]).

[8]) c'est ici qu'intervient la compacité de X.

[9]) Ce théorème a été démontré par M. K. B o r s u k [2] dans le cas beaucoup plus général à l'aide du „Fixpunktsatz" de M. B r o u w e r.

[10]) B o r s u k [2]. p. 385.

[11]) En remplaçant dans ce théorème la connexité des espaces S_1^X S_1^Y et S_1^{X+Y} par la condition équivalente, que les nombres de Betti 1-dimensionnels de X, de Y

D é m o n s t r a t i o n. Soit $f \in S_1^{X+Y}$. En vertu du th. 1 il existe donc deux fonctions $\varphi_1 \in R_1^X$ et $\varphi_2 \in R_1^Y$ telles que $f(x) = e^{i\varphi_1(x)}$ pour tout $x \in X$ et $f(x) = e^{i\varphi_2(x)}$ pour tout $x \in Y$. Posons $\psi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ pour tout $x \in X \cdot Y$. On a donc $\psi \in R_1^{X \cdot Y}$ et $e^{i\psi(x)} = 1$. L'ensemble $X \cdot Y$ étant connexe, il en résulte l'existence d'un entier constant k tel que $\psi(x) = 2k\pi$ pour tout $x \in X \cdot Y$. Posons donc

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi_1(x) && \textit{pour} \quad x \in X, \\ \varphi(x) &= \varphi_2(x) + 2k\pi && \textit{pour} \quad x \in Y; \end{aligned}$$

on a évidemment $\varphi \in R_1^{X+Y}$ et $f(x) = e^{i\varphi(x)}$ pour tout $x \in X + Y$. Par conséquent f n'est pas essentielle en vertu du th. 1.

Théorème 4. *$X \times Y$ étant le produit cartésien* [12]) *de deux espaces compacts, la connexité des espaces S_1^X et S_1^Y entraîne celle de $S_1^{X \times Y}$.*

D é m o n s t r a t i o n. Envisageons d'abord le cas où X et Y s o n t d e s c o n t i n u s. Soient $f \in S_1^{X \times Y}$ et $x_0 \in X$. En vertu du th. 1 il existe une fonction $\varphi_{x_0} \in R_1^Y$ telle que $f(x_0, y) = e^{i\varphi_{x_0}(x)}$ pour tout $y \in Y$. Le même théorème entraîne pour tout $y \in Y$ l'existence d'une fonction $\psi_y \in R_1^X$ telle que l'on ait $f(x, y) = e^{i\psi_y(x)}$ pour tout $x \in X$. Comme évidemment $e^{i\varphi_{x_0}(y)} = e^{i\psi_y(x_0)}$, on peut supposer (en remplaçant, s'il y a lieu, ψ_y par $\psi_y + 2k\pi$) que l'on a $\varphi_{x_0}(y) = \psi_y(x_0)$ pour tout $y \in Y$.

Ceci dit, posons $\varphi(x, y) = \psi_y(x)$ pour tout $(x, y) \in X \times Y$. On a

(i) $\qquad f(x, y) = e^{i\varphi(x,y)} \quad$ *pour tout* $\quad (x, y) \in X \times Y$

(ii) $\qquad \varphi(x_0, y) = \varphi_{x_0}(y) \quad$ *pour tout* $\quad y \in Y$.

Pour en déduire, à l'aide du th. 1, que l'espace $S_1^{X \times Y}$ est connexe, il reste donc à montrer que la fonction $\varphi(x, y)$ est continue.

Soit $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$. Par suite de la continuité de f et de la compacité de $Y \times X$, il existe selon (ii) un $\eta > 0$ tel que la relation $|y_1 - y_2| < \eta$ entraîne les relations

(iii) $\qquad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \varepsilon \quad$ *pour tout* $\quad x \in X$,

(iv) $\qquad |\varphi(x_0, y_1) - \varphi(x_0, y_2)| < 2\varepsilon$.

et de $X + Y$ s'annulent (B o r s u k [5]). on parvient à un cas particulier d'un lemme combinatoire de M. K. B o r s u k [6]. p. 225.

[12]) Voir p. ex. K u r a t o w s k i [4], p. 135.

Considérons la fonction $\chi(x)=\varphi(x,y_1)-\varphi(x,y_2)=\psi_{y_1}(x)-\psi_{y_2}(x)$. En vertu de (iii) et de (i) on a

$$\textit{soit} \quad |\chi(x)|<2\varepsilon<\pi, \qquad \textit{soit} \quad |\chi(x)|>2\pi-2\varepsilon>\pi$$

et $|\chi(x_0)|<2\varepsilon$ selon (iv). La fonction χ étant continue et X connexe, on a $|\chi(x)|<2\varepsilon$ pour tout $x\in X$, c. à d. que

$$|\varphi(x,y_1)-\varphi(x,y_2)|<2\varepsilon$$

pour $y_1\in Y$ et $y_2\in X$ tels que $|y_1-y_2|<\eta$ et pour tout $x\in X$.

Ceci établi, choisissons, pour prouver que la fonction φ est continue au point $(x',y')\in X\times Y$, un $\eta'>0$ tel que la relation $|x-x'|<\eta'$ entraîne la relation $|\varphi(x,y')-\varphi(x',y')|<\varepsilon$; un tel η' existe en vertu de la continuité de la fonction $\varphi(x,y')=\psi_{y'}(x)$. Soit maintenant (x,y) un point de $X\times Y$ tel que $|x-x'|<\eta'$ et que $|y-y'|<\eta$. On a $|\varphi(x,y)-\varphi(x',y')|\leqslant|\varphi(x,y')-\varphi(x',y')|+$ $+|\varphi(x,y')-\varphi(x,y)|<\varepsilon+2\varepsilon=3\varepsilon$, de sorte que φ est en effet une fonction continue.

Quant au cas général, il résulte du cas qui vient d'être démontré, en vertu du lemme suivant:

Lemme. *Etant donné un espace compact X, la condition nécessaire et suffisante pour la connexité de l'espace S_1^X est que pour chaque composante X' de X l'espace $S_1^{X'}$ soit connexe.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit $f'\in S_1^{X'}$ une transformation essentielle. S_1 étant un *rétracte absolu de voisinage* („Umgebungsretrakt") dans le sens de M. K. B o r s u k, il existe un entourage U de X' sur lequel la fonction f' admet une extension f^* [13]). Soit U' un ensemble ouvert, fermé et tel que $X'\subset U'\subset U$; son existence résulte de l'hypothèse que X' est une composante de l'espace compact X.

Posons $f(x)=1$ pour $x\in X-U'$ et $f(x)=f^*(x)$ pour $x\in U'$. Ainsi f est une transformation essentielle de X. La condition est donc n é c e s s a i r e.

Pour prouver qu'elle est aussi s u f f i s a n t e, considérons une fonction $f\in S_1^X$ qui n'est essentielle sur aucune composante de X. Soit X' une de ces composantes. Il existe alors un point $p'\in S_1$ et une fonction continue $g(x,t)$ du couple $x\in X'$ et $0\leqslant t\leqslant 1$ telle que

[13]) B o r s u k [4], pp. 222, 227 et 224.

$g(x,t)\in S_1$, que $g(x,0)=f(x)$ et que $g(x,1)=p'$ pour tout $x\in X'$. Soit $B=X\times(0)+X'\times[0,1]+X\times(1)$ un sous-ensemble du produit cartésien $X\times[0,1]$ où $[0,1]$ désigne l'intervalle fermé aux extrémités 0 et 1. Posons

$$g'(x,0)=f(x) \quad \textit{et} \quad g'(x,1)=p' \quad \textit{pour tout} \quad x\in X,$$

$$g'(x,t)=g(x,t) \quad \textit{pour tout} \quad x\in X' \quad \textit{et} \quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

On a évidemment $g'\in S_1^B$ et, S_1 étant un rétracte absolu de voisinage, il existe un entourage U de B sur lequel la fonction g' admet une extension. X' étant une composante de l'espace compact X, on peut trouver un entourage fermé U' de X' (dans X) tel que $U'\times[0,1]\subset U$. Il en résulte que f est une transformation inessentielle de l'entourage fermé U'. L'espace X étant compact, on parvient ainsi à une suite finie $U_1, U_2, \ldots, U_n$ d'ensembles ouverts, fermés, disjoints et tels que chacun d'eux est transformé par f d'une façon inessentielle. Par suite de la connexité de S_1, f est donc une transformation inessentielle de X, c. q. f. d. [14]).

Théorème 5. *Etant donnée une transformation continue g à tranches connexes d'un espace compact X tel que l'espace S_1^X est connexe, l'espace $S_1^{g(X)}$ l'est aussi* [15]).

D é m o n s t r a t i o n. Soit $f\in S^{g(X)}$. Posons $f^*(x)=fg(x)$ pour tout $x\in X$. En vertu du th. 1, il existe une fonction $\varphi^*\in R_1^X$ telle que $f^*(x)=e^{i\varphi^*(x)}$ pour tout $x\in X$.

Soit $y\in g(X)$. La tranche $g^{-1}(y)$ est donc connexe et pour tout $x\in g^{-1}(y)$ on a $e^{i\varphi^*(x)}=f^*(x)=fg(x)=f(y)$. Par conséquent l'ensemble $\varphi^*g^{-1}(y)$ se réduit à un seul point, de sorte que l'on peut poser $\varphi(y)=\varphi^*g^{-1}(y)$. On vérifie facilement que l'on a $\varphi\in R^{g(X)}$ et que $f(y)=e^{i\varphi(y)}$ pour tout $y\in g(X)$.

[14]) Remarquons que nous avons eu recours dans la démonstration seulement aux propriétés suivantes de S_1: 1° que la circonférence est un ensemble connexe 2° qu'elle est un rétracte absolu de voisinage.

[15]) Un théorème analogue (cf. renvoi [11])) est bien connu dans la topologie combinatoire (V i e t o r i s [1], p. 465).

En remplaçant la connexité de S_1^X par l'unicohérence de X, on obtient le théorème de M. C. K u r a t o w s k i [1], p. 182, corollaire II, 4°.

3. Espaces unicohérents.

Un espace connexe X est dit *unicohérent*, lorsque pour toute décomposition de X en deux ensembles fermés et connexes X_1 et X_2 l'ensemble $X_1 \cdot X_2$ est connexe [16]).

Théorème 6. *Tout continu X pour lequel l'espace S_1^X est connexe, est unicohérent.*

Démonstration. Supposons que X ne soit pas unicohérent. Il existe alors deux continus X_1 et X_2 et deux ensembles fermés non vides et disjoints P_1 et P_2 tels que $X = X_1 + X_2$ et que $X_1 \cdot X_2 = P_1 + P_2$.

Posons:

$$\psi(x) = \pi \frac{\varrho(x, P_1)}{\varrho(x, P_1) + \varrho(x, P_2)} \text{ [17]) } \quad \textit{pour tout} \quad x \in X$$

$$f(x) = e^{i\psi(x)} \qquad \textit{pour tout} \quad x \in X_1$$

$$f(x) = e^{-i\psi(x)} \qquad \textit{pour tout} \quad x \in X_2.$$

On trouve $\psi(x) = 0$ pour $x \in P_1$ et $\psi(x) = \pi$ pour $x \in P_2$, de sorte que la fonction f est univoque et continue. Remarquons qu'on a $f(P_1) = (1)$, $f(P_2) = (-1)$, $f(X_1) = L_1$, $f(X_2) = L_2$ où L_1 et L_2 désignent le deux arcs déterminés sur S_1 par le couple $1, -1$.

Or, si la transformation f n'était pas essentielle, il existerait en vertu du th. 1 une fonction $\varphi \in R_1^X$ telle qu'on aurait $f(x) = e^{i\varphi(x)}$ pour tout $x \in X$. Pour $x \in X_1$ on aurait donc $e^{i\varphi(x)} = e^{i\psi(x)}$. Par suite de la connexité de X_1 il existerait donc un entier k tel que $\varphi(x) = \psi(x) + 2k\pi$ pour tout $x \in X_1$. Il en résulte que $\varphi(x) = 2k\pi$ pour tout $x \in P_1$, que $\varphi(x) = (2k+1)\pi$ pour tout $x \in P_2$ et que $2k\pi \leqslant \varphi(x) \leqslant (2k+1)\pi$ pour tout $x \in X_1$. Or, X_2 étant un ensemble connexe contenant P_1 et P_2, l'ensemble $\varphi(X_2)$ contiendrait donc l'intervalle $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, puisqu'il en contient les extrémités. On aurait par conséquent $\varphi(X_1) \subset \varphi(X_2)$, d'où $f(X_1) \subset f(X_2)$, contrairement aux relations $f(X_1) \subset L_1$ et $f(X_2) \subset L_2$, établies plus haut.

[16]) Kuratowski [3], p. 307.

[17]) $\varrho(x, Y) = \inf_{\epsilon Y} |x - y|$.

La fonction $f \in S_1^X$ étant ainsi une transformation essentielle, l'espace S_1^X ne serait pas connexe, contrairement à l'hypothèse.

En particulier, lorsque l'espace considéré est un continu *localement connexe*, le théorème inverse est aussi vrai [18]). On en tire immédiatement le théorème suivant, dû à M. K. Borsuk [19]):

Théorème 7. *Pour qu'un continu localement connexe soit unihérent, il faut et il suffit que l'espace S_1^X soit connexe.*

Théorème 8. *Tout continu X (supposé situé dans un espace métrique Y) tel que l'espace S_1^X n'est pas connexe admet un entourage U (dans Y) tel qu'aucun sous-continu localement connexe X' de U qui contient X n'est unicohérent* [20]).

Démonstration. Soit $f \in S_1^X$ une transformation essentielle. Or, S_1 étant un rétracte absolu de voisinage, il existe un entourage U de X sur lequel la fonction f admet une extension. Chaque continu X' localement connexe et tel que $X \subset X' \subset U$, admet donc une transformation essentielle sur S_1, ce qui prouve en vertu du th. 7 que X' n'est pas unicohérent.

Les théorèmes 3, 4, 6, 7 et 8 entraînent les suivants

Corollaires: 1) *La somme de deux continus localement connexes unicohérents et dont le produit est connexe, est un continu localement connexe unicohérent* [21]).

2) *Le produit cartésien de deux continus localement connexes unicohérents est un continu localement connexe unicohérent* [22]).

3) *Le produit d'une suite décroissante de continus localement connexes unicohérents est un continu unicohérent* [23]).

4. Espaces non compacts.

Il est à remarquer que dans certaines démonstrations qui précèdent l'hypothèse de compacité n'intervient pas. Ainsi on a le

[18]) Borsuk [1], p. 195. Pour une courte démonstration (sans théorie de la „rotation d'une fonction", dont se sert M. Borsuk) voir Eilenberg [1].

[19]) Borsuk [1], p. 195.

[20]) Ibidem, p. 207.

[21]) Ibidem, p. 197.

[22]) Ibidem, p. 207.

[23]) Ibidem, p. 208.

Théorème 1'. *Etant donnée une transformation inessentielle $f \in S_1^X$ d'un espace métrique X, il existe une fonction $\varphi \in R_1^X$ telle que l'on a $f(x) = e^{i\varphi(x)}$ pour tout $x \in X$.*

Dans d'autres cas l'hypothèse de la connexité de l'espace S_1^X peut être remplacée par la propriété (b) suivante, qui lui est équivalente (notamment, en vertu du th. 1) pour X compacts:

(b) *à toute transformation $f \in S_1^X$ correspond une transformation $\varphi \in R_1^X$ telle que $f(x) = e^{i\varphi(x)}$ pour tout $x \in X$.*

On obtient alors les théorèmes plus généraux, qui correspondent aux th. 3 et 6 pour les espaces compacts:

Théorème 3'. *Etant donnés deux espaces X et Y jouissant de la propriété* (b), *fermés dans leur somme $X+Y$ et dont le produit $X \cdot Y$ est connexe* (ou vide), *l'espace $X+Y$ jouit de la propriété* (b).

Théorème 6'. *Tout espace connexe jouissant de la propriété* (b) *ist unicohérent.*

Théorème 9. *Soit $X = \sum_{n=1}^{\infty} X_n$ où $X_1 \subset X_2 \subset \dots$ sont des continus jouissant la propriété* (b). *Si, en outre, pour toute suite convergente de points de X il existe un indice n tel que X_n contient tous les points de cette suite, l'espace X jouit de la propriété* (b).

Démonstration. Soit $f \in S_1^X$. Soit x_1 un point arbitraire de X_1. Chaque X_n étant par hypothèse un continu localement connexe unicohérent, il existe en vertu des th. 7 et 1 une fonction $\varphi_n \in R_1^{X_n}$ telle que l'on a $f(x) = e^{i\varphi_n(x)}$ pour tout $x \in X_n$. Comme $e^{i\varphi_n(x_1)} = e^{i\varphi_1(x_1)}$, on peut supposer que $\varphi_n(x_1) = \varphi_1(x_1)$ pour tout $n = 1, 2, \dots$

Par suite de la connexité de X_n et de l'égalité $\varphi_n(x_1) = \varphi_{n+1}(x_1)$, la relation $e^{i\varphi_n(x)} = e^{i\varphi_{n+1}(x)}$ pour tout $x \in X_n$ entraîne $\varphi_n(x) = \varphi_{n+1}(x)$ pour tout $x \in X_n$. Posons $\varphi(x) = \varphi_n(x)$ pour $x \in X_n$. On a évidemment $f(x) = e^{i\varphi(x)}$ pour tout $x \in X$. Reste donc à montrer que la fonction φ est continue. Soit à ce but $x = \lim_{k\to\infty} x_k$ dans X; soit n un indice tel que $x_k \in X_n$ pour $k = 1, 2, \dots$ Par conséquent $\lim_{n\to\infty} \varphi(x) = = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x_k) = \varphi_n(x) = \varphi(x)$.

Corollaire. *Tout espace R_n (espace euclidien à n dimensions) jouit de la propriété* (b).

Ce corollaire résulte immédiatement du corollaire 2 (p. 167) et du th. 9. Il entraîne, en vertu du th. 6' l'unicohérence de R_n.

5. Coupures du plan.

Nous allons appliquer à présent les théorèmes qui précèdent aux ensembles qui coupent le plan entre deux points [24]) ou, ce qui revient au même, aux ensembles qui coupent la surface sphérique entre ses pôles.

Considérons dans R_3 la surface S_2, donnée par l'équation $\varrho = 1$ (en coordonnées sphériques). Soient p_1 et p_2 les pôles de cette surface, c. à d. les points $\vartheta = 0$ et $\vartheta = \pi$. Pour chaque point $x \in S_2 - (p_1) - (p_2)$ dont les coordonnées sphériques sont 1, ψ et ϑ désignons par $r(x)$ le point $\left(1, \psi, \frac{\pi}{2}\right)$ de l'équateur S_1 de S_2. Ainsi on a $r \in S_1^{S_2-(p_1)-(p_2)}$.

De plus, désignons d'une façon générale par $U(x, \varepsilon)$ le cercle ouvert de rayon ε autour de $x \in S_2$ situé sur S_2.

Lemme [25]). *Etant donné un ensemble $X \subset S_2 - (p_1) - (p_2)$ et une fonction $\varphi \in R_1^X$ telle que $r(x) = e^{i\varphi(x)}$ pour tout $x \in X$, il existe un ensemble ouvert U tel que $X \subset U \subset S_2 - (p_1) - (p_2)$ et une fonction $\varphi' \in R_1^U$ telle que $r(x) = e^{i\varphi'(x)}$ pour tout $x \in U$.*

Démonstration. Faisons correspondre à tout $x \in X$ un nombre positif ε_x tel que

(i) $$U(x, \varepsilon_x) \subset S_2 - (p_1) - (p_2)$$

(ii) $$\delta\{r[U(x, \varepsilon_x)]\} < 1$$

(iii) $$\delta\{\varphi[X \cdot U(x, 2\varepsilon_x)]\} < \pi$$

où δ désigne le diamètre.

On déduit de (i) et de (ii) l'existence pour tout $x \in X$ d'une fonction $\varphi_x \in R_1^{U(x, \varepsilon_x)}$ telle que

(iv) $$|\varphi_x(y) = \varphi(x)| < \frac{\pi}{2} \quad \text{pour tout} \quad y \in U(x, \varepsilon_x)$$

et

(v) $$r(y) = e^{i\varphi_x(y)} \quad \text{pour tout} \quad y \in U(x, \varepsilon_x).$$

[24]) On dit qu'un ensemble $X \subset Y$ *coupe* l'espace Y entre les points p_1 et p_2, lorsqu'il n'existe aucun continu $K \subset Y - X$ qui contienne p_1 et p_2.

[25]) Je dois à M. St. Kierst l'énoncé de ce lemme.

En vertu de (v) le lemme sera établi, lorsqu'on aura démontré que la relation

(vi) $$y \in U(x_1, \varepsilon_{x_1}) \cdot U(r_2, \varepsilon_{x_2})$$

entraîne la relation $\varphi_{x_1}(y) = \varphi_{x_2}(y)$, qui équivaut en vertu de (v) à la relation $|\varphi_{x_1}(y) - \varphi_{x_2}(y)| < 2\pi$. Or, on a

$$|\varphi_{x_1}(y) - \varphi_{x_2}(y)| \leqslant |\varphi_{x_1}(y) - \varphi_{x_1}(x_1)| + |\varphi_{x_1}(x_1) - \varphi_{x_2}(x_2)| + \\ + |\varphi_{x_2}(x_2) - \varphi_{x_2}(y)|,$$

ce qui donne d'après (iv)

$$|\varphi_{x_1}(y) - \varphi_{x_2}(y)| < \frac{\pi}{2} + |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| + \frac{\pi}{2}.$$

Comme la relation (vi) entraîne l'une ou l'autre des relations $x_1 \in U(x_2, 2\varepsilon_{x_2})$ et $x_2 \in U(x_1, 2\varepsilon_{x_1})$, on conclut de (iii) que

$$|\varphi_{x_1}(y) - \varphi_{x_2}(y)| < \frac{\pi}{2} + \pi + \frac{\pi}{2} = 2\pi, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Théorème 10. *Pour qu'un ensemble $X \subset S_2 - (p_1) - (p_2)$ ne coupe pas la surface sphérique S_2 entre p_1 et p_2 il faut et il suffit qu'il existe une fonction $\varphi \in R_1^X$ telle que $r(x) = e^{i\varphi(x)}$ pour tout $x \in X$* [26].

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, soit $K \subset S_2 - X$ un continu contenant p_1 et p_2. Toute composante C de $S_2 - K$ est, comme on sait, homéomorphe à R_2. Il en résulte en vertu du corollaire (p. 168) que C jouit de la propriété (b). Il existe donc une fonction $\varphi_C \in R_1^C$ telle que $r(x) = e^{i\varphi_C(x)}$ pour tout $x \in C$. En posant $\varphi(x) = \varphi_C(x)$ où $x \in C$ on obtient $\varphi \in S_1^{S_2-K}$ et $r(x) = e^{i\varphi(x)}$ pour tout $x \in X \subset S_2 - K$, c. q. f. d.

Pour prouver que la condition est suffisante, on peut se borner, en vertu du lemme, au cas où X est un ensemble ouvert. Nous allons montrer d'abord que si X coupe S_2 entre p_1 et p_2, X contient une coupure *fermée* Y entre les mêmes points. Posons

$$U_n = \sum_{x \in S_2 - X} U\left(x, \frac{1}{n}\right).$$

[26]) Pour les ensembles X compacts, un théorème analogue concernant l'espace euclidien R_n se trouve démontré chez K. Borsuk [2].

En supposant qu'aucun ensemble fermé $S_2 - U_n \subset X$ ne coupe S_2 entre p_1 et p_2, il existerait pour tout $n = 1, 2, \ldots$ un continu $K_n \subset U_n$ contenant les points p_1 et p_2. Or, $S_2 - X$ étant fermé, on a $S_2 - X = \prod_{n=1}^{\infty} U_n$. Il existerait donc dans $S_2 - X$, comme on sait, un continu K joignant les points p_1 et p_2, contrairement à l'hypothèse que X coupe S_2 entre ces points. L'existence d'une coupure fermée $Y \subset X$ se trouve ainsi établie.

Soit maintenant K_2 l'hemisphère contenant p_1 et déterminée sur S_2 per l'équateur S_1. Evidemment, on peut supposer que $Y \subset K_2 - (p_1)$. Soit C la composante du point p_1 dans l'ensemble $K_2 - Y$.

Il existe par hypothèse une fonction $\varphi \in R_1^Y$ telle que $r(x) = e^{i\varphi(x)}$ pour tout $x \in Y$. Il existe par conséquent [27]) une fonction $\varphi' \in R_1^{K_2}$ telle que $\varphi'(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in Y$. Posons

$$r'(x) = r(x) \quad \textit{pour} \quad x \in K_2 - C$$
$$r'(x) = e^{i\varphi'(x)} \quad \textit{pour} \quad x \in C.$$

On a $r' \in S_1^{K_2}$ et $r'(x) = x$ pour tout $x \in S_1$, contrairement au th. 2.

Par un raisonnement tout à fait analogue à celui de la démonstration du th. 3, on obtient le

Théorème 11. *Etant donnés deux ensembles $X \subset S_2$ et $Y \subset S_2$ fermés dans leur somme $X + Y$, dont aucun ne coupe S_2 entre p_1 et p_2 et dont le produit $X \cdot Y$ est connexe (ou vide), l'ensemble $X + Y$ ne coupe non plus S_2 entre p_1 et p_2* [28]).

Théorème 12. *Etant donnés deux ensembles connexes X et Y tels que $X \subset Y \subset \overline{X} \subset S_2$ et dont Y coupe S_2 entre p_1 et p_2, il existe un point $q \in Y$ tel que $X + (q)$ coupe S_2 entre p_1 et p_2* [29]).

Démonstration. On peut évidemment supposer que X ne coupe pas S_2 entre p_1 et p_2. En vertu du th. 10 il existe donc une fonction $\varphi \in R_1^X$ telle que $r(x) = e^{i\varphi(x)}$ pour tout $x \in X$. La fonction φ ne se laisse pas prolonger sur Y (à moins de cesser d'être continue)

[27]) Voir p. ex. Kuratowski [4], p. 211.

[28]) C'est une généralisation aux ensembles quelconques du premier théorème de S. Janiszewski [1], p. 62; cf. aussi S. Nikodym [1], p. 20 th. 2.

[29]) Ce théorème renferme la solution positive du problème posé par M. C. Kuratowski [2], p. 216.

puisque Y coupe S_2 entre p_1 et p_2. Il doit donc exister un point $q \in Y$ dans lequel la fonction φ admet une oscillation positive [30]).

Or, si $X+(q)$ ne coupait pas S_2 entre p_1 et p_2, il existerait, en vertu du th. 10, une fonction $\varphi' \in R_1^{X+(q)}$ telle que $r(x) = e^{i\varphi'(x)}$ pour tout $x \in X+(q)$. On aurait donc $e^{i\varphi(x)} = e^{i\varphi'(x)}$ pour tout $x \in X$. L'ensemble X étant connexe, il existerait en conséquence un k tel que $\varphi'(x) = \varphi(x) + 2k\pi$ pour tout $x \in X$, contrairement à l'hypothèse que l'oscillation de φ au point q est positive.

Corollaire. *X et Y étant deux sous-ensembles connexes de S_1 tels que $\overline{X}+\overline{Y}$ coupe S_2 entre p_1 et p_2, il existe pour tout $q_1 \in \overline{X}\cdot\overline{Y}$ un $q_2 \in \overline{X}\cdot\overline{Y}$ tel que l'ensemble $X+Y+(q_1)+(q_2)$ coupe S_2 entre p_1 et p_2* [31]).

En effet, pour déterminer q_2, on n'a qu'à appliquer le th. 12 à l'ensemble connexe $X+Y+(q_1)$.

6. Un théorème de balayage.

On dit que Y *s'obtient de X par une déformation continue dans Z*, lorsqu'il existe une fonction continue g du couple des variables $x \in X$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ telle que l'on ait:

$$g(x,t) \in Z \quad \textit{pour tout} \quad x \in X \textit{ et } 0 \leqslant t \leqslant 1,$$
$$g(x,0) = x \quad \textit{pour tout} \quad x \in X,$$
$$g(X,1) = Y.$$

Un point $x \in Z$ est dit *balayé par la déformation g*, lorsqu'il existe un $0 \leqslant t \leqslant 1$ tel que $x \in g(X,t)$.

Théorème 13. *X étant un sous-ensemble de S_2 qui coupe S_2 entre p_1 et p_2, tout ensemble Y qui s'obtient de X par une déformation continue dans $S_2-(p_1)-(p_2)$ coupe S_2 entre p_1 et p_2.*

Démonstration. Supposons, par contre, que Y ne coupe pas S_2 entre p_1 et p_2. Il existerait donc en vertu du th. 10 une fonction $\varphi \in R_1^Y$ telle que $r(y) = e^{i\varphi(y)}$ pour tout $y \in Y$. Posons pour tout $x \in X$

(i) $$f_x(t) = rg(x,t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

[30]) Voir p. ex. Kuratowski [4], p. 210.

[31]) Ce corollaire constitue une généralisation du th. III de Kuratowski [2], p. 226.

où g est la fonction qui déforme X en Y dans $S_2-(p_1)-(p_2)$. On a $f_x \in S_1^{[0,1]}$. L'espace $S_1^{[0,1]}$ étant connexe, il existe donc en vertu du th. 1 une fonction $\varphi_x \in R_1^{[0,1]}$ telle que

(ii) $$f_x(t) = e^{i\varphi_x(t)} \quad \textit{pour tout} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Comme on a évidemment $e^{i\varphi_x(1)} = e^{i\varphi g(x,1)}$, on peut supposer (en remplaçant, s'il y a lieu, φ_x par $\varphi_x + 2k\pi$) que

(iii) $$\varphi_x(1) = \varphi g(x,1) \quad \textit{pour tout} \quad x \in X.$$

Posons

(iv) $$\psi(x) = \varphi_x(0) \quad \textit{pour tout} \quad x \in X.$$

En vertu de (i) et de (ii) on a $e^{i\psi(x)} = e^{i\varphi_x(0)} = f_x(0) = rg(x,0) = r(x)$. Pour en conclure à l'aide du th. 10 que X ne coupe pas S_2 entre p_1 et p_2, il reste donc à montrer que la fonction ψ est continue.

Soit à ce but $\{x_n\}$ une suite de points de X convergeant vers $x_0 \in X$. Désignons par B le sous-ensemble du produit cartésien $X \times [0,1]$, composé de tous les points de la forme (x_n, t) où $n = 0, 1, \ldots$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$. L'espace S_1^B est connexe en vertu du lemme p. 164. Il existe donc, d'après le th. 1, une fonction $\varphi' \in R_1^B$ telle que $rg(x_n,t) = e^{i\varphi'(x_n,t)}$ pour tout $(x_n,t) \in B$. Il en résulte en vertu de (i) et de (ii) que $e^{i\varphi'(x_n,t)} = e^{i\varphi_{x_n}(t)}$ pour tout $(x_n,t) \in B$. L'intervalle $[0,1]$ étant connexe, il existe une suite d'entiers k_n telle que

$$\varphi_{x_n}(t) - \varphi'(x_n,t) = 2k_n\pi \quad \textit{pour tout} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Or, par suite de la continuité de φ' on a $\lim_{n\to\infty} \varphi'(x_n,1) = \varphi'(x_0,1)$ et, en vertu de (iii) $\lim_{n\to\infty} \varphi_{x_n}(1) = \lim_{n\to\infty} \varphi g(x_n,1) = \varphi g(x_0,1) = \varphi_{x_0}(1)$. Il en résulte que $\lim_{n\to\infty} k_n = k_0$, d'où, en vertu de (iv), $\lim_{n\to\infty} \psi(x_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{x_n}(0) = \lim_{n\to\infty} [\varphi'(x_n,0) + 2k_n\pi] = \varphi'(x_0,0) + 2k_0\pi = \varphi_{x_0}(0) = \psi(x_0)$.

Corollaire. *X étant un sous-ensemble de S_2 qui coupe S_2 entre p_1 et p_2, l'un (au moins) des points p_1 et p_2 se trouve balayé par toute déformation continue de X dans S_2 qui transforme X en un point* [26]).

7. Transformation intérieures.

Une transformation continue g d'un espace compact X en un espace $Y=g(X)$ ist dite *intérieure*, lorsque les images $g(U)$ de les ensembles U ouverts dans X sont ouvertes dans Y [32]).

Si g est une transformation intérieure de X en Y, nous dirons Y l'*image intérieure* de X.

Lemme. *Pour qu'une transformation continue g d'un espace compact X soit intérieure, il faut et il suffit que pour toute suite $\{y_k\}$ de points de $Y=g(X)$, la relation $y=\lim\limits_{k\to\infty} y_k$ entraîne la relation $\operatorname*{Lim}\limits_{k\to\infty} g^{-1}(y_k)=g^{-1}(y)$.*

Démonstration. Par suite de la continuité de g on a $\operatorname*{Lim\,sup}\limits_{k\to\infty} g^{-1}(y_k) \subset g^{-1}(y)$ [33]). Supposons qu'il existe un point $x\in g^{-1}(y) - \operatorname*{Lim\,inf}\limits_{k\to\infty} g^{-1}(y_k)$. Il en résulte l'existence d'une suite infinie d'indices $\{k_n\}$ et d'un entourage ouvert U de x tels que $U\cdot g^{-1}(y_{k_n})=0$. On aurait donc y_{n_k} *non* $\in g(U)$, ce qui est impossible, puisque $\lim y_{k_n}=y$ et $g(U)$ est un ensemble ouvert contenant y. La condition est donc nécessaire.

Pour prouver qu'elle est suffisante, considérons un ensemble ouvert $U\subset X$ et supposons que $g(U)$ ne soit pas ouvert. Il existerait alors une suite $\{y_k\}$ de points de $Y-g(U)$ convergente vers un point $y\in g(U)$, d'où $\operatorname*{Lim}\limits_{k\to\infty} g^{-1}(y_k)=g^{-1}(y)$, $U\cdot g^{-1}(y_k)=0$ et $U\cdot g^{-1}(y)\neq 0$, contrairement à l'hypothèse que U est ouvert.

Théorème 14. *Pour toute transformation intérieure g d'un espace compact X, si l'espace S_1^X est connexe, l'espace $S_1^{g(X)}$ est également connexe.*

Démonstration. Soit $f\in S_1^{g(X)}$. Posons $f^*(x)=\dot{f}g(x)$ pour tout $x\in X$. En vertu du th. 1, il existe une fonction $\varphi^*\in R_1^X$ telle que $fg(x)=e^{i\varphi^*(x)}$ pour tout $x\in X$. Posons pour tout $y\in g(X)$

$$\varphi(y)=\inf[\varphi^* g^{-1}(y)].$$

[32]) Stoïlow [1], p. 347. M. S. Stoïlow exige en plus que les tranches de g soient 0-dimensionnelles.

[33]) Kuratowski [1], p. 171.

Pour tout $x\in g^{-1}(y)$ on a $f(y)=e^{i\varphi^*(x)}$, d'où $f(y)=e^{i\varphi(y)}$. Pour en déduire, à l'aide du th. 1, que l'espace $S_1^{g(X)}$ est connexe, il reste donc à montrer que la fonction φ est continue. Soit à ce but $\{y_k\}$ une suite de points de $g(X)$ et $y=\lim\limits_{k\to\infty} y_k$. On a en vertu du lemme précédent $\operatorname*{Lim}\limits_{k\to\infty} g^{-1}(y_k)=g^{-1}(y)$, d'où $\operatorname*{Lim}\limits_{k\to\infty} \varphi^* g^{-1}(y_k)=\varphi^* g^{-1}(y)$, ce qui donne $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(y_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\{\inf[\varphi^* g^{-1}(y_k)]\}=\inf[\varphi^* g^{-1}(y)]=\varphi(y)$.

Corollaire. *L'image intérieure d'un continu localement connexe unicohérent est toujours un continu localement connexe unicohérent.*

La question si l'on peut remplacer dans le th. 10 S_1 par S_n reste ouverte. En tenant compte des relations entre les propriétés combinatoires de l'espace X et la connexité de l'espace S_1^X, on est conduit au problème suivant: *Y étant l'image intérieure d'un espace métrique compact X,*

1) *les groupes de Betti de Y sont-ils des images homomorphes des groupes correspondants de X?*

2) *la dimension de Y est-elle inférieure ou égale à celle de X?*

Ouvrages cités.

Alexandroff, P. [1] *Dimensionstheorie. Ein Beitrag zur Geometrie der abgeschlossenen Mengen*, Math. Ann. 106 (1932), pp. 161—238.

Borsuk, K. [1] *Quelques théorèmes sur les ensembles unicohérents*, Fund. Math. XXVII (1931), pp. 171—209.

— [2] *Sur un espace des transformations continues et ses applications topologiques*, Monatshefte für Math. u. Physik 38 (1931), pp. 381—386.

— [3] *Über Schnitte der n-dimensionalen Euklidischen Räume*, Math. Ann. 106 (1932), pp. 239—248.

— [4] *Über eine Klasse von lokal zusammenhängenden Räumen*, Fund. Math. XIX (1932), pp. 220—242.

— [5] *Über die Abbildungen der metrischen kompakten Räume auf die Kreislinie*, Fund. Math. XX (1933), pp. 224—231.

— [6] *O zagadnieniu topologicznego scharakteryzowania sfer euklidesowych* (en polonais), Wiadomości Matematyczne 38 (1934), pp. 1—30.

Bruschlinsky, N. [1] *Stetige Abbildungen und Bettische Gruppen der Dimensionszahlen 1 und 3*, Math. Ann. 109 (1934). pp. 525—537.

Čech, E. [1] *Sur les continus Péaniens unicohérents*, Fund. Math. XX (1933), pp. 232—243.

Eilenberg, S. [1] *Sur les transformations continues d'espaces métriques compacts*, Fund. Math. XXII (1934), pp. 292—296.

Hopf, H. [1] *Über wesentliche und unwesentliche Abbildungen von Komplexen*, Recueil Soc. Math. de Moscou 37 (1932), pp. 53—62.

Janiszewski, Z. [1] *O rozcinaniu płaszczyzny przez kontinua* (en polonais), Prace Matematyczno-Fizyczne 26 (1915), pp. 11—63.

Kuratowski, C. [1] *Sur les décompositions semi-continues d'espaces métriques et compacts*, Fund. Math. XI (1928), pp. 169—192.

— [2] *Sur la séparation d'ensembles situés sur le plan*, Fund. Math. XII (1928), pp. 214—239.

— [3] *Une caractérisation topologique de la surface de la sphère*, Fund. Math. XIII (1929), pp. 307—318.

— [4] *Topologie I*, Monografje Matematyczne 3, Warszawa—Lwów 1933.

Nikodym, S. [1] *Sur les coupures du plan*, Fund Math. VII (1925), pp. 14—22.

Stoïlow, S. [1] *Sur les transformations continues et la topologie des fonctions analytiques*, Ann. Ec. Norm. Sup. III, 45 (1928), pp. 347—382.

Vietoris, L. [1] *Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen*, Math. Ann. 97 (1927), pp. 454—472.

Zur Grundlegung der Boole'schen Algebra I.

Von

Alfred Tarski (Warszawa).

Die Boole'sche Algebra, auch Algebra der Logik genannt, ist bekanntlich ein formales System mit einer Reihe von wichtigen Interpretationen in verschiedenen Grundgebieten der Logik und Mathematik. Die allerwichtigste, jedenfalls die bekannteste, Interpretation dieses Systems stellt der sogenannte Klassenkalkül dar.

Die vorliegende Arbeit enthält einige Beiträge zur Grundlegung der Boole'schen Algebra. Von den Ergebnissen, welche von mir auf diesem Gebiete erreicht worden sind, werde ich nur diejenigen mitteilen, die sich mit Hilfe gewöhnlicher mathematischer Schlussweisen begründen lassen und keinen speziellen metamathematischen Forschungsapparat erfordern.

§ 1. Das gewöhnliche und das erweiterte System der Boole'schen Algebra.

Es sind gegenwärtig mehrere äquivalente Systeme von Grundausdrücken und Postulaten bekannt, die zur Begründung der Boole'schen Algebra ausreichen. Um die weiteren Ausführungen zu konkretisieren, führen wir hier eins dieser Systeme explicite an.

In diesem System treten acht Grundausdrücke auf: „B" — „*der Betrachtungsbereich*", „$x < y$" — „*das Element x steht zum Element y in der Beziehung der Inklusion*" („*das Element x ist im Element y enthalten*"), „$x = y$", — „*das Element x steht zum Element y in der Beziehung der Gleichheit*" („*das Element x ist dem Element y gleich*") „$x + y$" — „*die Summe der Elemente x und y*", „$x \cdot y$" — „*das Produkt der Elemente x und y*", „0" — „*das leere Element*", „1" —