Remarque sur un théorème de M. Hurewicz.

Par

Samuel Eilenberg (Varsovie).

M. W. Hurewicz [1]) a démontré récemment le théorème suivant, qui constitue une généralisation du „Einbettungssatz" de Menger-Nöbeling.

(*H*) *X étant un espace métrique compact de dimension* $\leqslant n$, *il existe pour tout* m *une fonction* $f \in R^X_{n+m}$ [2]) *telle que l'on a*

$$\dim B_k(f) \leqslant n-(k-1)\,m \ {}^{3}).$$

Les fonctions f *de ce genre forment un ensemble dense dans* R^X_{n+m}.

En remarquant que l'on a $n-(k-1)\,m<0$ pour $m>0$ et pour k suffisamment grands, on en tire que

(*H'*) *X étant un espace métrique compact de dimension* $\leqslant n$, *il existe pour tout* $m>0$ *une fonction* $f \in R^X_{n+m}$ *à tranches* [4]) *0-dimensionnelles et telle que l'on a*

$$\dim B_2(f) \leqslant n-m.$$

J'établis dans cette Note un théorème général qui constitue dans certains cas un critère pour l'existence d'une homéomorphie.

[1]) *Über Abbildungen von endlichdimensionalen Räumen auf Teilmengen Cartesischer Räume*, Sitzungsb. Preus. Akad. (1933), p. 754—768.

[2]) B^A désigne l'espace des transformations continues de l'espace A en sous-ensembles de B. Voir p. ex. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografje Matematyczne 3, Warszawa—Lwów 1933, p. 90. M. Hurewicz désigne cet espace par $\mathfrak{F}(A,B)$.

[3]) $B_k(f)$ désigne ici, conformément à la notation de M. Hurewicz, l'ensemble des points $y \in f(X) \subset Y$ tel que l'ensemble $f^{-1}(y)$ se compose d'au moins k points.

[4]) c. à d. ensembles de la forme $f^{-1}(y)$.

Or, M. A. Flores [5]) a construit pour tout n un complexe n-dimensionnel M_n dont il a démontré qu'*il n'existe aucune homéomorphie* $h \in R^{M_n}_{2n}$. Il en résultera immédiatement (en vertu du théorème qui va suivre) que:

Il n'existe pour $m>0$ *aucune fonction* $f \in R^{M_n}_{n+m}$ *à tranches 0-dimensionnelles et telle que l'on ait*

$$\dim B_2(f) < n-m.$$

Théorème. *Etant donnée une transformation* $f \in Y^X$ *d'un espace métrique compact* X *(en sous-ensemble d'un espace métrique* Y*) ayant toutes les tranches* [4]) *de dimension 0 et telle que* $\dim B_2(f) \leqslant q$ [3]), *il existe une homéomorphie* $h \in (Y \times R_{q+1})^X$ [6]).

Si les transformations f *de ce genre forment un ensemble dense dans* Y^X, *ces homéomorphies forment un ensemble dense dans* $(Y \times R_{q+1})^X$

Démonstration. Nous allons nous appuyer sur les propositions suivantes:

(1) ψ *étant une transformation continue de* X, *l'ensemble* $B_2(\psi)$ *est un* F_σ [7])

(2) *Pour tout* F_σ *au plus* q*-dimensionnel* $P \subset Y$ *il existe un* F_σ *au plus 0-dimensionnel* $A \subset P$ *tel que* $\dim(P-A) \leqslant q-1$.

En effet, soit $P = Q + (P-Q)'$ une décomposition telle que $\dim Q \leqslant q-1$ et $\dim(P-Q) \leqslant 0$ [8]). Il existe un ensemble Q_1 qui est un G_δ tel que l'on ait $Q \subset Q_1$ et $\dim Q_1 \leqslant q-1$ [9]). Il suffit de poser $A = Q - P_1$.

(3) *A étant un sous-ensemble 0-dimensionnel de* $f(X) \subset Y$, *l'ensemble* $f^{-1}(A)$ *est aussi 0-dimensionnel* [10]).

(4) *B étant un sous-ensemble* F_σ *0-dimensionnel de* X, *les fonctions* $\varphi \in R^X_1$ *qui transforment* B *d'une façon biunivoque forment un ensemble dense dans* R^X_1.

[5]) *Über die Existenz n-dimensionaler Komplexe, die nicht in den* R_{2n} *einbettbar sind*, Ergebnisse Menger's Kolloquiums, 5 (1933), p. 17.

[6]) $A \times B$ désigne le produit cartésien des espaces A et B. Voir p. ex. C. Kuratowski, l. c., p. 135.

[7]) W. Hurewicz, l. c., p. 761.

[8]) C. Kuratowski, l. c., p. 128.

[9]) Ibidem, p. 132, th. 5.

[10]) W. Hurewicz, *Über stetige Abbildungen von Punktmengen*, Akad. Wensch. Amsterdam, Proc. XXX (1927), p. 163, th. III.

Soit $B=\sum_{i=1}^{\infty}F_i$ où F_i sont des ensembles fermés. D'après le th. de M. W. Hurewicz, l'ensemble $\Phi_k \subset R_1^X$ des fonctions qui transforment $\sum_{i=1}^{k}F_i$ par homéomorphie est un G_δ dense [7]) dans R_1^X. Or, R_1^X étant un espace complet [11]), $\Phi=\prod_{k=1}^{\infty}\Phi_k$ est donc [12]) également un ensemble dense dans R_1^X, c. q. f. d.

Ceci dit, nous allons définir une suite de fonctions

$$\text{(s)} \qquad \psi_0=0,\ \psi_1,\dots,\ \psi_{q+1}$$

telles que 1° $\psi_i \in R_i^X$ [13]) 2° P_i désignant la projection de l'ensemble $B_2(f\times\psi_i)$ [14]) sur l'axe Y, parallèle à l'axe R_i, on a

$$\text{(5)} \qquad \dim P_i \leqslant q-i.$$

La fonction ψ_0 satisfait évidemment à (5), puisque $P_0=B_2(f)$ et $\dim B_2(f)\leqslant q$.

Supposons la fonction ψ_i déjà définie. $B(f\times\psi_i)$ étant un F_σ selon (1), sa projection P_i l'est aussi. Il existe donc en vertu de (5) et de (2) un F_σ au plus 0-dimensionnel $A_i \subset P_i$ tel que

$$\text{(6)} \qquad \dim(P_i-A_i)\leqslant q-(i+1).$$

D'après (3), l'ensemble $f^{-1}(A)$ est un F_σ au plus 0-dimensionnel. Il existe donc en vertu de (4) une fonction $\varphi_i \in R_i^X$ qui transforme $f^{-1}(A_i)$ d'une façon biunivoque. Posons $\psi_{i+1}=\psi_i\times\varphi_i$. On a évidemment $\psi_{i+1}\in R_{i+1}^X$. Pour prouver que $\dim P_{i+1}\leqslant q-(i+1)$, il suffit en raison de (6) de montrer que $P_{i+1}\subset P_i-A_i$. Soit donc $y\in P_{i+1}$, c. à d. qu'il existe deux points différents $x_1, x_2 \in X$ tels que l'on ait $f(x_1)=f(x_2)$, $\psi_i(x_1)=\psi_i(x_2)$ et $\varphi_i(x_1)=\varphi_i(x_2)$. Or, deux prémières relations impliquent que $y\in P_i$ et la dernière que y *non* $\in A_i$, puisque φ_i est une transformation biunivoque sur $f^{-1}(A_i)$. On a donc $y\in P_i-A_i$.

La suite (s) se trouve ainsi définie.

Soit maintenant $h=f\times\psi_{q+1}$. On a $h\epsilon(Y\times R_{q+1})^X$ et $\dim P_{q+1}\leqslant -1$, ce qui donne $P_{q+1}=0$. Or, P_{q+1} étant une projection de $B_2(h)$, il vient $B_2(h)=0$. La fonction h est donc bien une homéomorphie.

11) C. Kuratowski, l. c., p. 199.

12) Ibidem, p. 206.

13) $R_0=(0)$, c. à d. l'espace composé du point 0 seul.

14) $f\times\psi_i$ est une fonction qui fait correspondre à tout point $x\in X$ le point $(f(x),\psi_i(x))\in Y\times R_i$. On a évidemment $(f\times\psi_i)\in(Y\times R_i)^X$.

Enfin, la deuxième partie du théorème résulte du raisonnement qui précède et de la proposition (4), les fonctions $\psi_{q+1}\in R_{q+1}^X$ telles que $f\times\psi_{q+1}$ sont des homéomorphies formant un ensemble dense dans R_{q+1}^X.

Le théorème se trouve ainsi démontré.

Pour terminer, considérons le cas où la fonction f n'admet que des tranches au plus dénombrables. Les ensembles $\psi_1 f^{-1}(y)$ sont alors au plus dénombrables pour tout $y\in f(X)$. Il en résulte que la projection de $B_2(f\times\psi_1)$ sur Y n'admet, elle aussi, que des tranches au plus dénombrables, donc 0-dimensionnelles. Par conséquent [10]) $\dim B_2(f\times\psi_1)\leqslant\dim P_1$. On en tire l'énoncé suivant:

Etant donnée une transformation $f\in Y^X$ d'un espace métrique compact X (en espace métrique Y) n'ayant que des tranches au plus dénombrables et telle que

$$\dim B_2(f)\leqslant q,$$

il existe une transformation $f_1\in(Y\times R_1)^X$ à tranches au plus dénombrables et telle que

$$\dim B_2(f_1)\leqslant q-1.$$