Voraussetzung gibt es eine stetige Abbildung ψ von R auf S, die in S^* mit φ zusammenfällt. Definiert man jetzt auf R eine neue Abbildung θ, indem man $\theta(x) = \psi(x)$ für $x \epsilon K^*$ und sonst $\theta(x) = \varphi(x)$ setzt, so ist die Abbildung θ stetig und lässt die Kugel K von den Bildpunkten frei, folglich ist $\theta \epsilon \mathfrak{G}_{n+1}(R)$, und, da andererseits für jedes $x \epsilon R$ der Abstand zwischen den Punkten $\varphi(x)$ und $\theta(x)$ (wie aus der Definition von θ sofort hervorgeht) kleiner ist als die willkürlich vorgeschriebene Zahl δ, ist damit bewiesen, dass $\mathfrak{G}_{n+1}(R)$ in $\mathfrak{F}_{n+1}(R)$ dicht liegt.

Anschliessend an die vorstehenden Überlegungen sei an die grosse Rolle erinnert, welche die Abbildungen auf die n-dimensionale Sphären in der topologischen Forschung der letzten Jahre spielen (vor allem in den Untersuchungen von Hopf und Borsuk) Es scheint mir die Hoffnung berechtigt, dass *ein genaueres Studium jener Abbildungen* (u. a. in gruppentheoretischer Richtung [23])) zur Klärung des Verhältnisses zwischen dem Begriff der *Homologie* und dem Begriff der *Homotopie* führen wird, woraus sich die Möglichkeit ergeben würde, mengentheoretische Methoden auch in jenen Gebieten anzuwenden, die heute ausschliesslich von kombinatorischen Methoden beherrscht werden. Man bedenke u. a., dass man eine auf einer abgeschlossenen n-dimensionalen Menge eines Raumes R definierte wesentliche [24]) stetige Abbildung auf S_n gewissermassen als ein mengentheoretisches Analogon des kombinatorischen Begriffes des *n-dimensionalen Zyklus* betrachten kann, wobei jene Abbildungen, die sich nicht auf den ganzen Raum fortsetzen lassen, den „berandenden" Zyklen entsprechen! [25]).

[23]) Es sei diesbezüglich auf eine demnächst in Compositio Math. erscheinende Arbeit von H Freudenthal hingewiesen.

[24]) Eine Abbildung eines Raumes auf die S_n heisst *wesentlich*, wenn es nicht möglich ist durch stetige Abänderung der Abbildung einen Punkt der S_n von der Bildmenge zu befreien.

[25]) Die Tatsache, dass es (nach einem bekannten Ergebnis von H. Hopf) wesentliche Abbildungen der S_3 auf die S_2 gibt, steht damit in keinem Widerspruch, denn bei einer solchen Abbildung werden (wie leicht zu sehen) sämtliche zweidimensionale Teilmengen der S_3 *unwesentlich* abgebildet. Bei der Untersuchung des Verbandes zwischen den Homologie- und Homotopiebegriff muss man eben nicht nur die Abbildungen des vollen Raumes auf die S_n sondern auch die Abbildung in der abgeschlossenen Teilmengen betrachten und die letzteren Abbildungen auf ihre Fortsetzbarkeit in den vollen Raum prüfen.

Deux théorèmes sur l'homologie dans les espaces compacts.

Par

Samuel Eilenberg (Varsovie).

Les groupes de Betti [1]) des complexes géométriques jouissent, en vertu de leur définition, de la propriété suivante: étant donnée une somme de deux complexes géométriques $K = K_1 + K_2$ où K_2 est de dimension $\leqslant n$, 1⁰ les groupes de Betti de dimension $> n$ de K_1 coïncident avec ceux de K, 2⁰ les groupes de Betti de dimension n de K_1 sont des sous-groupes de groupes correspondants de K.

Je montre dans cette Note que ces théorèmes restent valables pour des espaces métriques compacts arbitraires.

Un simplexe n-dimensionnel $\Delta = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ sera dit *dégénéré*, lorsque ses sommets $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ne sont pas tous différents entre eux. Un complexe n-dimensionnel dont tous les simplexes n-dimensionnels sont dégénérés sera appelé *complexe n-dimensionnel dégénéré*. Un complexe n-dimensionnel sera nommé *propre*, lorsqu'il ne contient aucun simplexe n-dimensionnel dégénéré. On a les propositions suivantes:

(1) *La frontière $\dot{K}$ d'un complexe n-dimensionnel dégénéré K est un cycle $(n-1)$-dimensionnel dégénéré.*

[1]) Les notions de la théorie de l'homologie employées dans cette Note sont à entendre dans le sens de M. P. Alexandroff, *Einfachste Grundbegriffe der Topologie*, Berlin (1932) et *Dimensionstheorie*, Math. Ann. 106 (1932), p. 161. Voir aussi du même auteur *Sur la notion de dimension des ensembles fermés*, J. Math. pures appl. IX, 11 (1932), p. 283. La définition des groupes de Betti d'un espace métrique compact se trouve chez L. Vietoris, *Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen*, Math. Ann. 97 (1927), p. 454.

Il suffit évidemment de montrer que la frontière $\dot{\Delta}$ du simplexe $\Delta=[a_0, a_1, \dots, a_n]$ où $a_0=a_1$ est un complexe $(n-1)$-dimensionnel dégénéré. Or, on a

$$\dot{\Delta}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k[a_0,\dots,a_{k-1},a_{k+1},\dots,a_n]=[a_0,a_1,\dots,a_n]-[a_1,a_2,\dots,a_n]+$$
$$+\sum_{k=2}^{n}(-1)^k[a_0,\dots,a_{k-1},a_{k+1},\dots,a_n]=\sum_{k=2}^{n}(-1)^k[a_0,\dots,a_{k-1},a_{k+1},\dots,a_n],$$

ce qui prouve que $\dot{\Delta}$ est un complexe dégénéré.

(2) *La frontière $\dot{K}$ d'un complexe n-dimensionnel propre K est un cycle $(n-1)$-dimensionnel propre.*

(3) *z^n étant un ε-cycle dégénéré dans A, on a $z^n \underset{\varepsilon}{\simeq} 0$ dans A* [2]).

Lemme. *Prémisses:* 1° *E^* est un sous-ensemble fermé d'un espace métrique compact E tel que $\dim(E-E^*)\leqslant n$,* 2° *$\{K_l\}$ est une suite indéfiniment petite de complexes $(n+1)$-dimensionnels* [3]) *dans E.*

Thèse: Il existe deux suites indéfiniment petites $\{{}_1K_l\}$ et $\{{}_2K_l\}$ de complexes $(n+1)$-dimensionnels dans E telles que:

(i) *$\{{}_1K_l+{}_2K_l\}$ est une translation indéfiniment petite de $\{K_l\}$* [4]).

(ii) *${}_1K_l$ est un complexe propre dans E^*.*

(iii) *${}_2K_l$ est un complexe dégénéré.*

Démonstration. Désignons d'une façon générale par X_r la sphère généralisée de rayon r autour de X.

Considérons un $\varepsilon>0$ arbitraire. Le lemme sera demontré, lorsqu'on aura établi l'existence d'un $\eta>0$ tel que chaque η-complexe $(n+1)$-dimensionnel K dans E admette une 4ε-translation en un complexe $K''={}_1K+{}_2K$ satisfaisant à (ii) et (iii).

Or, l'ensemble $E-E^*$ étant au plus n-dimensionnel, il existe une suite finie $F_1, F_2, \dots, F_p$ d'ensembles fermés non vides, telle que $F_1+F_2+\dots+F_p=E$, que l'on ait $\delta(F_l)<\varepsilon$ [5]) pour tout $1\leqslant i\leqslant p$ et enfin que $(E-E^*)\cdot F_{i_1}\cdot F_{i_2}\cdot\ldots\cdot F_{i_{n+2}}=0$ pour tout système de $n+2$ indices différents $0\leqslant i_j\leqslant p$ [6]). Choisissons dans chaque F_l un point arbitraire a_l et faisons correspondre à tout $x\in E$ un point $x'=a_l$ tel que $x\in F_l$. Cette opération définit une ε-translation de chaque complexe K dans E en un complexe K'.

L'ensemble $E-E^*_\varepsilon$ étant compact, il existe un η tel que $\varepsilon\geqslant\eta>0$ et que pour tout système de $n+2$ indices différents $i_1, i_2, \dots, i_{n+2}$ les relations $x_j\in(E-E^*_\varepsilon)\cdot F_{i_j}$ entraînent la relation $\delta(x_1, x_2, \dots, x_{n+2})>\eta$. Il en résulte que pour tout η-simplexe $(n+1)$-dimensionnel Δ dans $E-E^*_\varepsilon$ le simplexe Δ' est dégénéré.

Soit K un η-complexe $(n+1)$-dimensionnel arbitraire dans E. Nous venons de montrer que chaque simplexe de K' qui est l'image d'un simplexe $(n+1)$-dimensionnel dans $E-E^*_\varepsilon$ est dégénéré. Il en résulte que chaque simplexe de K' dont au moins un sommet se trouve dans l'ensemble $E-E^*_{\varepsilon+\eta+\varepsilon}\subset E-E^*_{3\varepsilon}$ est dégénéré. Faisons correspondre maintenant à chaque point $x\in E^*_{3\varepsilon}$ un point $y\in E^*$ tel que $\varrho(x,y)<3\varepsilon$. Cette 3ε-translation, qui est une identité sur l'ensemble $E-E^*_{3\varepsilon}$, transforme le complexe K' en un complexe K'' dont tous les simplexes propres sont des simplexes dans E^*. Pour achever la démonstration, il reste de désigner par ${}_1K$ le complexe qui est somme de tous les simplexes propres de K'' est de poser ${}_2K=K''-{}_1K$.

Théorème 1. *Soit $Z=\{z_l\}$ un vrai cycle n-dimensionnel donné dans un sous-ensemble fermé E^* d'un espace métrique compact E tel que $\dim(E-E^*)\leqslant n$. Si $Z\simeq 0$ dans E, on a alors $Z\simeq 0$ dans E^*.*

Démonstration. Il existe dans E, en vertu de l'hypothèse, une suite indéfiniment petite de complexes $(n+1)$-dimensionnels $\{K_l\}$ telle que $\dot{K}_l=z_l$. En vertu du lemme, il existe alors deux suites indéfiniment petites $\{{}_1K_l\}$ et $\{{}_2K_l\}$ des complexes $(n+1)$-dimensionnels dans E satisfaisant à (i), (ii) et (iii). Posons ${}_1z_l={}_1\dot{K}_l$, ${}_2z_l={}_2\dot{K}_l$, ${}_1Z=\{{}_1z_l\}$ et ${}_2Z=\{{}_2z_l\}$. Le vrai cycle ${}_1Z+{}_2Z$ de E est une translation indéfiniment petite du vrai cycle Z de E^*. Il existe donc une translation du vrai cycle ${}_1Z+{}_2Z$ indéfiniment petite et qui le transforme en un vrai cycle ${}_1Z^*+{}_2Z^*$ dans E^* de façon

[2]) L. Vietoris, *Zum höheren Zusammenhang der kompakten Räume*, Math. Ann. 101 (1929), p. 224.

[3]) c. à d. qu'il existe une suite $\{\varepsilon_l\}$ convergeant vers 0 et telle que K_l est un ε_l-complexe mod m_l $(m_l\geqslant 0)$.

[4]) c. à d. qu'il existe une suite $\{\delta_l\}$ convergeant vers 0 et telle que le complexe ${}_1K_l+{}_2K_l$ est une δ_l-translation de K_l.

[5]) $\delta(X)$ désigne, comme d'habitude, le diamètre de X.

[6]) Voir p. ex. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografje Matematyczne 3, Warszawa—Lwów 1933, p. 130.

que ${}_1Z^*$ et ${}_2Z^*$ soient des translations indéfiniment petites de ${}_1Z$ et de ${}_2Z$ respectivement. On a

(iv) $$Z \simeq {}_1Z^* + {}_2Z^* \quad dans \quad E^*.$$

Il résulte de (ii) que ${}_1Z \simeq 0$ dans E^* et par conséquent que

(v) $${}_1Z^* \simeq 0 \quad dans \quad E^*.$$

D'après (iii) et (1) le vrai cycle ${}_2Z$ est dégénéré; il en est donc de même de ${}_2Z^*$. Il en résulte en vertu de (3) que

(vi) $${}_2Z^* \simeq 0 \quad dans \quad E^*.$$

Or, les relations (iv), (v) et (vi) donnent $Z \simeq 0$ dans E^*, c. q. f. d.

Théorème 2. *Soit $Z = \{z_i\}$ un vrai cycle $(n+1)$-dimensionnel, donné dans un espace métrique compact E, et E^* un sous-ensemble fermé de cet espace tel que* $\dim(E - E^*) \leqslant n$. *Il existe alors un vrai cycle $(n+1)$-dimensionnel Z^* dans E^* tel que $Z \simeq Z^*$ dans E.*

Démonstration. Il existe, en vertu du lemme, deux suites indéfiniment petites de complexes $(n+1)$-dimensionnels $\{{}_1K_i\}$ et $\{{}_2K_i\}$ satisfaisant à (i), (ii) et (iii), lorsqu'on y pose $K_i = z_i$. Or, K_i étant un cycle, on a ${}_1\dot{K}_i + {}_2\dot{K}_i = 0$, mais en vertu de (ii) et de (2) ${}_1\dot{K}_i$ est un cycle n-dimensionnel propre et en vertu de (iii) et de (1) ${}_2\dot{K}_i$ est un cycle n-dimensionnel dégénéré; il en résulte que l'on a ${}_1\dot{K}_i = {}_2\dot{K}_i = 0$; ${}_1K_i$ et ${}_2K_i$ sont donc des cycles $(n+1)$-dimensionnels. Posons $Z^* = \{{}_1K_i\}$. D'après (i) on a $Z - Z^* \simeq \{{}_2K_i\}$ dans E et (iii) et (3) entraînent que $\{{}_2K_i\} \simeq 0$ dans E, ce qui donne $Z \simeq Z^*$ dans E.

Le théorème se trouve donc démontré, puisque, en vertu de (ii) Z^* est un vrai cycle dans E^*.

Corollaires. *Etant donné un sous-ensemble fermé E^* d'un espace métrique compact E tel que* $\dim(E - E^*) \leqslant n$,

1) *si E est acyclique en dimension n* [7]*, E^* l'est aussi* [8]*,*

2) *pour que E soit acyclique en dimension $r > n$, il faut et il suffit que E^* le soit,*

3) *les groupes n-dimensionnels de Betti de l'ensemble E^* sont des sous-groupes de groupes correspondants de E,*

4) *les groupes de dimension $> n$ de Betti des ensembles E et E^* sont identiques.*

Il est à remarquer que les raisonnements qui précèdent permettent, malgré leur caractère élémentaire, d'obtenir certains résultats particuliers, relevant de la théorie des dimensions de M. P. Alexandroff. En effet, l'existence dans E d'une suite indéfiniment petite de complexes $(n+1)$-dimensionnels dont les frontières forment un vrai cycle essentiel, entraîne, selon le lemme et en vertu des propositions (1) et (3), l'existence d'une suite pareille dans E^*. On en tire aussitôt l'implication

$$\Delta_m(E) > n \quad \text{entraîne} \quad \Delta_m(E^*) > n,$$

qui est un cas particulier du connu „Summensatz" de la théorie des dimensions de M. P. Alexandroff.

[7]) Un espace métrique compact E est dit *acyclique en dimension n*, lorsque chaque vrai cycle n-dimensionnel dans E y est homologue à 0.

[8]) Dans ma note: *Sur le plongement des espaces dans les continus acycliques*, ce volume, p. 65, j'ai demontré (th. 2) que *chaque espace métrique compact E se laisse plonger, pour tout $n > 0$, dans un continu E_1 localement connexe, acyclique en toute dimension $r < n$ et tel que* $\dim(E_1 - E) = n$.

Le corollaire 1) complète ce résultat, en montrant que la dimension de l'ensemble $E_1 - E$ ne peut pas être abaissée.