Über Abbildungen topologischer Räume auf die n-dimensionale Sphäre.

Von

W. Hurewicz (Amsterdam).

Den Gegenstand dieser Note bildet das folgende wichtige Theorem, das in einer etwas anderen Formulierung von P. Alexandroff [1]) bewiesen wurde und in den Untersuchungen dieses Autors eine höchst bedeutende Rolle spielt:

Theorem I. *Ein kompakter metrischer Raum R hat dann und nur dann eine Dimension $\leq n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, wenn, unter A eine beliebige in R abgeschlossene Menge verstanden, jede stetige Abbildung* [2]) *von A auf die n-dimensionale Sphäre S_n* [3]) *sich zu einer stetigen Abbildung des ganzen Raumes R auf S_n erweitern lässt* [4]) [5]).

[1]) Vgl. Math. Ann. 106, p. 170, ff.

[2]) In dieser Arbeit werden nur *eindeutige* Abbildungen betrachtet.

[3]) D. h. die Oberfläche der $(n+1)$-dimensionalen Kugel. Der Ausdruck „Abbildungen auf S_n" soll so aufgefasst werden, dass alle Punkte von S_n als Bildpunkte auftreten. Die Sätze und Beweise bleiben allerdings richtig, auch, wenn man Teilmengen von S_n als Bildmengen zulässt, derartige Abbildungen bieten aber für uns kein Interesse (vgl. unten Fussnote [8])).

[4]) D. h. es soll eine stetige Abbildung von R auf S_n geben, die in den Punkten von A mit der gegebenen Abbildung übereinstimmt.

[5]) In der Alexandroffschen Formulierung (vgl. a. a. O.) wird von den stetigen Abbildungen des Raumes R auf die $(n+1)$-*dimensionale Vollkugel* K_{n+1} ausgegangen. Ist f eine derartige Abbildung, und bedeutet R' die Menge aller Punkte von R, die auf *Randpunkte* von K abgebildet sind, so nennt Alexandroff die Abbildung f *wesentlich*, falls es nicht möglich ist, die Abbildung derart stetig abzuändern, dass schliesslich ein innerer Punkt von K nicht mehr als Bildpunkt auftritt, wobei *im Verlauf der Abänderung die Bilder der Punkte von R' festbleiben sollen*. Alexandroff formuliert sein Theorem folgendermassen: *R hat dann und nur dann eine Dimension $\leq n$, wenn es keine wesentliche Abbildung von R auf K_{n+1} gibt.* Um die Aequivalenz dieses Theorems mit dem im Text angeführten zu erkennen, bemerken wir vor allem, dass stetige Modifikationen der Abbildungen in der Definition der wesentlichen Abbildung nur *scheinbar* eine Rolle spielen, denn je zwei *beliebige* stetige Abbildungen f und φ von R auf K_{n+1} (bzw. Teilmengen von K_{n+1}) können ineinander durch stetige Abänderung überführt werden, unter Festhaltung der Bilder jener Punkte, in denen die beiden Abbildungen übereinstimmen (man braucht ja nur die Bildpunkte von $f(x)$ nach $\varphi(x)$ auf den geradlinigen Verbindungsstrecken laufen zu lassen). Die Definition der wesentlichen Abbildung kann man daher einfacher so formulieren: f heisst wesentlich, wenn es keine stetige Abbildung φ von R auf einen Teil von K_{n+1} gibt, die auf R' mit f übereinstimmt und einen inneren Punkt von K_{n+1} freilässt. Statt „einen inneren Punkt freilässt" kann man auch sagen: „alle Punkte von R in Randpunkte von K überführt", denn man kann ja nachträglich die Bildpunkte $\varphi(x)$ vom freigelassenen Punkt aus auf den Rand von K projizieren. Wenn man jetzt noch berücksichtigt, dass jede stetige Abbildung einer abgeschlossenen Menge $M \subset R$ auf S_n sich stets zu einer stetigen Abbildung des ganzen R *auf* K_{n+1} (bzw. eine Teilmenge von K_{n+1}) erweitern lässt (vgl. unten Fussnote [9])), so liegt die Aequivalenz der beiden Formulierungen an der Hand.

Nachstehend bringen wir einen einfachen Beweis des angeführten Theorems, der auf ganz anderen Methoden beruht, als derjenige von Alexandroff und zugleich Möglichkeiten zu gewissen Verallgemeinerungen bietet. Ausser den einfachsten Tatsachen der Dimensionslehre [6]) werden wir dabei nur den bekannten Satz [7]) benützen, dass jede auf einer abgeschlossenen Teilmenge A eines metrischen Raumes R definierte stetige reelle Funktion sich stetig auf den ganzen Raum R fortsetzen lässt, woraus unmittelbar folgt, dass eine stetige Abbildung von A auf eine Teilmenge des Euklidischen n-dimensionalen Raumes E_n (n beliebig), bzw. eine Teilmenge der n-dimensionalen Vollkugel K_n sich immer zu einer ste-

Die Frage, ob eine gegebene stetige Abbildung einer Teilmenge eines Raumes A auf einen anderen Raum B sich zu einer stetigen Abbildung des ganzes Raumes A auf B erweitern lässt, spielt bei vielen topologischen Untersuchungen eine wichtige Rolle. Auf eine solche Fragestellung lässt sich beispielsweise die Frage zurückführen, ob zwei gegebene Abbildungen eines Raumes M auf einen Raum B zur selben *Klasse* gehören, d. h. sich stetig ineinander überführen lassen. (Man nehme für A das Cartesische Produkt aus M und der Strecke!).

[6]) Eigentlich benützen wir nur die (bei Brouwer gerade zu als Definition der Dimensionszahl dienende) Tatsache, dass in einem separablen n-dimensionalen Raum je zwei abgeschlossene punktfremde Mengen sich stets durch eine höchstens $(n-1)$-dimensionale Menge trennen lassen.

[7]) Vgl. etwa Kuratowski, *Topologie* I (1933), p. 211.

tigen Abbildung des ganzen R auf einen Teil von E_n [8]), bzw. von K_n [9]) erweitern lässt.

Wir zeigen zuerst, dass jeder höchstens n-dimensionale Raum der im Theorem I formulierten Bedingung genügt und beweisen sogar die schärfere Behauptung:

II. *Ist R ein separabler* (nicht notwendig kompakter) *Raum, A — eine in R abgeschlossene Menge, und gilt* $\dim(R-A)=n$, *so kann für $m \geqq n$ jede stetige Abbildung von A auf S_m zu einer stetigen Abbildung von R auf S_m erweitert werden* [10]).

Für $n=-1$ ist die Behauptung trivial, denn in diesem Fall ist $R-A$ leer, also $R=A$. Sei nun $n \geqq 0$, und die Behauptung sei für kleinere Zahlen bereits als richtig erwiesen. Liegt dann (unter der Voraussetzung $\dim(R-A)=n \leqq m$) eine stetige Abbildung φ der abgeschlossenen Menge $A \subset R$ auf S_m vor, so zerlegen wir S_m in zwei Hemisphären H_1 und H_2, die eine $(m-1)$-dimensionale Sphäre S_{m-1} zum Durchschnitt haben (unter S_{-1} ist die leere Menge zu verstehen) und bezeichnen mit A_1 bzw. A_2 die Urbildmengen von H_1 bzw. H_2. A_1 und A_2 sind natürlich abgeschlossene Mengen. Aus den bekannten Sätzen der Dimensionstheorie folgt leicht, dass es in R abgeschlossene Mengen R_1, R_2 gibt mit den Eigenschaften:

$$(') \quad R=R_1+R_2,\ R_1 \supset A_1,\ R_2 \supset A_2,\ \dim(R_1 R_2 - A_1 A_2) \leqq n-1 \text{ [11])}.$$

[8]) Eine Folgerung daraus ist, dass eine stetige Abbildung einer abgeschlossenen Menge $A \subset R$ auf eine echte Teilmenge der Sphäre S_n sich immer zu einer stetigen Abbildung von R auf einen Teil von S_n erweitern lässt.

[9]) Die gegebene Abbildung von A erweitert man zuerst zu einer Abbildung auf eine Teilmenge des E_n und projiziert dann die ausserhalb von K gelegenen Bildpunkte vom Mittelpunkt aus auf den Rand von K.

[10]) Insbesondere folgt aus dies m Satz, dass die erste Hälfte des Theorems I für allgemeine separable (nicht nur für kompakte) Räume richtig bleibt.

[11]) Man zeigt dies etwa folgendermassen: Zuerst bestimme man zwei offene Mengen G_1 und G_2, so das $G_1 \supset A_1 - A_1 A_2$, $G_2 \supset A_2 - A_1 A_2$, $\overline{G}_1 \overline{G}_2 \subset A_1 A_2$ (man definiere z. B. G_1 als die Menge aller Punkte von R, deren Abstand von A_1 kleiner ist als die Hälfte des Abstandes von A_2, und analog G_2). Die Mengen $\overline{G}_1 - A_1$ und $\overline{G}_2 - A_2$ sind punktfremd und abgeschlossen in der höchstens n-dimensionalen Menge $R-A$. Folglich lassen sich $G_1 - A_1$ und $G_2 - A_2$ in $R-A$ durch eine höchstens $(n-1)$-dimensionale Menge trennen (vgl. Anmerkung [6])), m. a. W. gibt es zwei in $R-A$ abgeschlossene Mengen B_1 und B_2 mit den Eigenschaften: $R-A=B_1+B_2$, $B_1 G_2 = B_2 G_1 = 0$, $\dim(B_1 B_2) \leqq n-1$. Setzt man nun $R_1 = B_1 + A_1$, $R_2 = B_2 + A_2$, so sind R_1 und R_2, wie man leicht zeigt, abgeschlossen in R und genügen den Relationen $(')$.

Die Abbildung φ führt (falls $m>0$) die Menge $A_1 A_2$ in S_{m-1} über [12]). Mit Rücksicht auf die letzte Relation in $(')$ und wegen der Induktionsannahme gibt es daher eine stetige Abbildung von $R_1 R_2$ auf S_{m-1}, die auf $A_1 A_2$ mit φ übereinstimmt, anders ausgedrückt, φ lässt sich zu einer stetigen Abbildung Φ von $A+R_1 R_2$ auf S_m erweitern, derart, dass die Bilder aller Punkte von $R_1 R_2$ in S_{m-1} fallen. Bei dieser Abbildung Φ geht die Menge $A_1 + R_1 R_2$ in die Hemisphäre H_1, also topologisch betrachtet, in eine m-dimensionale Kugel über, und nach der Bemerkung, welche dem Beweis vorausgeschickt wurde, existiert eine stetige Abbildung Ψ_1 von R auf H_1, die auf der Menge $A_1 + R_1 R_2$ mit Φ übereinstimmt, und ebenso existiert eine stetige Abbildung Ψ_2 von R auf H_2, die in den Punkten von $A_2 + R_1 R_2$ mit Φ übereinstimmt. Setzt man jetzt $\Psi(x)=\Psi_1(x)$ für $x \in R_1$ und $\Psi(x)=\Psi_2(x)$ für $x \in R_2$, so ist die Abbildung Ψ überall auf R eindeutig definiert und stetig, ferner hat man in allen Punkten von $A=A_1+A_2$ $\Psi(x)=\varphi(x)$. Damit ist der Satz II und somit der erste Teil des Theorems I bewiesen.

Beim Beweis des zweiten Teiles spielt eine wichtige Rolle der Begriff des *Cartesischen Produktes* $A \times B$ [12]) der metrischen Räume A, B [13]). Darunter versteht man bekanntlich die Gesamtheit aller Punktepaare (a, b) (wo $a \in A$, $b \in B$) (wobei die Metrik in üblicher Weise durch quadratische Wurzel aus der Quadratsumme erklärt ist). Setzen wir insbesondere den Raum A als *vollständig*, den Raum B als separabel voraus. Ist dann M eine im Produktraum $A \times B$ offene und dichte Menge, so gilt die Behauptung: *Der Raum A enthält eine in ihm dichte Menge N mit der Eigenschaft, dass es zu jedem Punkt a von N eine in B dichte Menge von Punkten y gibt, so dass alle Punkte (a, y) zu M gehören* [14]). Zum Beweis [15]) betrachten wir in M eine „Basis" [16]) aus abzählbar-vielen offenen Mengen $G_1, G_2 \dots G_i \dots$

[12]) Das Zeichen „$\times$" wird im Folgenden ausschliesslich zur Bezeichnung der Cartesischen Produkte verwendet (wohl zu unterscheiden von der Bezeichnung $A \cdot B$, womit der *Durchschnitt* der Mengen A und B gemeint ist)

[13]) Der Ausdruck „Cartesisches Produkt" stammt von Kuratowski, vgl. a. a. O., p. 7.

[14]) Vgl. C. Kuratowski, a. a. O., p. 138, wo sich eine noch allgemeinere Behauptung findet.

[15]) Vgl vorige Zitate.

[16]) Unter einer Basis versteht man ein System offener Mengen mit der Eigenschaft, dass jeder Punkt des Raumes in beliebig kleinen Mengen des Systems enthalten ist.

und bezeichnen mit C_m $(m = 1, 2\ldots)$ die Menge aller Punkte $a \epsilon A$, zu denen es wenigstens einen Punkt $b \epsilon G_m$ gibt, so dass $(a, b) \epsilon M$ gilt. Aus den Annahmen über M folgt, dass jedes einzelne C_m eine in A offene und dichte Menge ist. Dann ist aber mit Rücksicht auf die Vollständigkeit von A laut einem bekannten Satz der *Durchschnitt* sämtlicher C_i dicht in A, und andererseits ist es klar, dass alle Punkte dieses Durchschnittes der oben genannten Bedingung genügen.

Sei jetzt R ein kompakter Raum. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{F}_n(R)$ $(n = 0, 1, 2\ldots)$ die *Menge aller stetigen Abbildungen von R auf Teilmengen des n-dimensionalen Cartesischen Zahlenraumes E_n* (E_0 besteht definitionsgemäss aus einem einzelnen Punkt), anders ausgedrückt sind also die Elemente von $\mathfrak{F}_n(R)$ Systeme aus je n auf R definierten reellen stetigen Funktionen. Diese Menge $\mathfrak{F}_n(R)$ fassen wir in bekannter Weise als einen *metrischen Raum* auf [17]. $\mathfrak{F}_n(R)$ ist, wie man leicht bestätigt, ein *vollständiger* [18] und *separabler* [19] Raum. Sei ferner $\mathfrak{G}_n(R)$ die Menge aller Abbildungen $\varphi \epsilon \mathfrak{F}_n(R)$, für die der Punkt O, in E_n mit den Koordinaten $(0, 0\ldots 0)$ (oder irgend ein anderer fester Punkt des E_n) als Bildpunkt *nicht auftritt*. Wir beweisen jetzt den folgenden Satz, der, wie sich bald zeigen wird, mit der zweiten Hälfte des Theorems I gleichbedeutend ist:

III. *Liegt $\mathfrak{G}_n(R)$ dicht in $\mathfrak{F}_n(R)$, so ist dim $R \leqq n - 1$* $(n = 0, 1, 2\ldots)$ [20].

Für nicht leeres R (d. h. für dim $R \geqq 0$) ist wegen $\mathfrak{G}_0(R) = 0$ die Voraussetzung von III für $n = 0$ nicht erfüllt, demnach ist III für $n = 0$ in trivialer Weise richtig. Wir wollen III für ein beliebiges $n > 0$ unter der Annahme, seine Gültigkeit stehe für kleinere Zahlen bereits fest. Den Raum $\mathfrak{F}_n(R)$ können wir offenbar als das Cartesische Produkt $\mathfrak{F}_1(R) \times \mathfrak{F}_{n-1}(R)$ auffassen, und da die Menge $\mathfrak{G}_n(R)$ ersichtlicherweise *offen* ist, lässt sich, falls $\mathfrak{G}_n(R)$ in $\mathfrak{F}_n(R)$ dicht liegt, der oben zitierte Satz anwenden. In $\mathfrak{F}_1(R)$ existiert

[17]) Vgl. etwa meine Arbeit in den Sitzungsber. d. Preuss. Ak. d. Wiss. 24 (1933), p. 756.

[18]) Vgl. vorige Zitate.

[19]) Vgl. K. Borsuk, Fund. Math. 17 (1931), p. 165.

[20]) Auch die umgekehrte Behauptung ist richtig, vgl. unten Anmerkung [22]). Man kann das Theorem II' auch so formulieren: Es gilt dim $R \leqq n$, falls sich jedes auf R definierte stetige Feld von n-dimensionalen Vektoren sich durch beliebig kleine Abänderung in ein nirgends singuläres Feld verwandeln lässt.

demnach eine überall dichte Menge von Funktionen f von der folgenden Beschaffenheit: α) Diejenigen Abbildungen $\varphi \epsilon \mathfrak{F}_{n-1}(R)$, die, mit f kombiniert, ein Element (f, φ) von $\mathfrak{G}_n(R)$ ergeben, bilden eine in $\mathfrak{F}_{n-1}(R)$ dichte Menge.

Bezeichnet man für $f \epsilon \mathfrak{F}_1(R)$ mit $E(f)$ die Menge der Punkte $x \epsilon R$ mit $f(x) = 0$, so ist für $\varphi \epsilon \mathfrak{F}_{n-1}(R)$ die Beziehung $(f, \varphi) \epsilon \mathfrak{G}_n(R)$ damit gleichbedeutend, dass kein Punkt von $E(f)$ durch φ in den Punkt $(0, 0\ldots 0)$ des E_{n-1} abgebildet wird. Daher kann man, falls $E(f)$ nicht leer, die Eigenschaft α) auch so formulieren: α') $\mathfrak{G}_{n-1}[E(f)]$ liegt dicht in $\mathfrak{F}_{n-1}[E(f)]$. (Man hat dabei zu berücksichtigen, dass für ein abgeschlossenes $A \subset R$, insbesondre also für $A = E(f)$, jede Abbildung aus $\mathfrak{F}_{n-1}(A)$ sich zu einer Abbildung aus $\mathfrak{F}_{n-1}(R)$ fortsetzen lässt).

Aus α') folgt aber nach der Induktionsannahme dim $E(f) \leqq n-2$. Alles zusammenfassend, sehen wir also: *Die Funktionen $f \epsilon \mathfrak{F}_1(R)$, für die die Menge $E(f)$ der Nullwerte höchstens $(n-2)$-dimensional ausfällt, liegen in $\mathfrak{F}_1(R)$ dicht.* Daraus ergibt sich sofort dim $R \leqq$ $\leqq n - 1$: Sind nämlich A, B abgeschlossene Teilmengen von R ohne gemeinsame Punkte, so kann man offenbar auf R reelle stetige Funktionen definieren, die auf A lauter positive, auf B lauter negative Werte annehmen [21]). Aus dem eben bewiesenen folgt, dass es unter diesen Funktionen auch solche geben muss, für die dim $E(f) \leqq n - 2$. Dann ist $E(f)$ eine A und B, trennende höchstens $(n-2)$-dimensionale Menge. Ein Raum aber, in dem jedes Paar punktfremder abgeschlossener Mengen sich durch eine höchstens $(n-2)$-dimensionale Menge trennen lässt, ist definitionsgemäss höchstens $(n-1)$-dimensional [6]). Somit ist der Satz III bewiesen.

Um jetzt den Beweis des Theorems I zu Ende zu führen, brauchen wir bloss zu zeigen, dass, *wenn die Bedingung des Theorems I erfüllt ist, die Abbildungsmenge $\mathfrak{G}_{n+1}(R)$ in $\mathfrak{F}_{n+1}(R)$ dicht liegt* [22]). Sei nämlich eine Abbildung $\varphi \epsilon \mathfrak{F}_{n+1}(R)$ und eine Zahl $\delta > 0$ beliebig gegeben. Bezeichnen wir mit K die Kugel in E_{n+1} mit dem Ursprungspunkt O des Koordinatensystems als Mittelpunkt und mit dem Durchmesser δ. Sei ferner S die Oberfläche von K, K^* und S^* die Urbildmengen von K bzw. von S bei der Abbildung φ. Nach

[21]) Man setze etwa $f(x) = d(x, B) - d(x, A)$, unter $d(x, A)$ bzw. $d(x, B)$ die Abstände des Punktes x von A bzw. von B verstanden.

[22]) Damit wird mit Rücksicht auf die erste Hälfte des Theorems I zugleich die Umkehrung von III bewiesen.

Voraussetzung gibt es eine stetige Abbildung ψ von R auf S, die in S^* mit φ zusammenfällt. Definiert man jetzt auf R eine neue Abbildung θ, indem man $\theta(x) = \psi(x)$ für $x \in K^*$ und sonst $\theta(x) = \varphi(x)$ setzt, so ist die Abbildung θ stetig und lässt die Kugel K von den Bildpunkten frei, folglich ist $\theta \in \mathfrak{G}_{n+1}(R)$, und, da andererseits für jedes $x \in R$ der Abstand zwischen den Punkten $\varphi(x)$ und $\theta(x)$ (wie aus der Definition von θ sofort hervorgeht) kleiner ist als die willkürlich vorgeschriebene Zahl δ, ist damit bewiesen, dass $\mathfrak{G}_{n+1}(R)$ in $\mathfrak{F}_{n+1}(R)$ dicht liegt.

Anschliessend an die vorstehenden Überlegungen sei an die grosse Rolle erinnert, welche die Abbildungen auf die n-dimensionale Sphären in der topologischen Forschung der letzten Jahre spielen (vor allem in den Untersuchungen von Hopf und Borsuk) Es scheint mir die Hoffnung berechtigt, dass *ein genaueres Studium jener Abbildungen* (u. a. in gruppentheoretischer Richtung [23])) zur Klärung des Verhältnisses zwischen dem Begriff der *Homologie* und dem Begriff der *Homotopie* führen wird, woraus sich die Möglichkeit ergeben würde, mengentheoretische Methoden auch in jenen Gebieten anzuwenden, die heute ausschliesslich von kombinatorischen Methoden beherrscht werden. Man bedenke u. a., dass man eine auf einer abgeschlossenen n-dimensionalen Menge eines Raumes R definierte wesentliche [24]) stetige Abbildung auf S_n gewissermassen als ein mengentheoretisches Analogon des kombinatorischen Begriffes des *n-dimensionalen Zyklus* betrachten kann, wobei jene Abbildungen, die sich nicht auf den ganzen Raum fortsetzen lassen, den „berandenden" Zyklen entsprechen! [25]).

[23]) Es sei diesbezüglich auf eine demnächst in Compositio Math. erscheinende Arbeit von H Freudenthal hingewiesen.

[24]) Eine Abbildung eines Raumes auf die S_n heisst *wesentlich*, wenn es nicht möglich ist durch stetige Abänderung der Abbildung einen Punkt der S_n von der Bildmenge zu befreien.

[25]) Die Tatsache, dass es (nach einem bekannten Ergebnis von H. Hopf) wesentliche Abbildungen der S_3 auf die S_2 gibt, steht damit in keinem Widerspruch, denn bei einer solchen Abbildung werden (wie leicht zu sehen) sämtliche zweidimensionale Teilmengen der S_3 *unwesentlich* abgebildet. Bei der Untersuchung des Verbandes zwischen den Homologie- und Homotopiebegriff muss man eben nicht nur die Abbildungen des vollen Raumes auf die S_n sondern auch die Abbildungin der abgeschlossenen Teilmengen betrachten und die letzteren Abbildungen auf ihre Fortsetzbarkeit in den vollen Raum prüfen.

Deux théorèmes sur l'homologie dans les espaces compacts.

Par

Samuel Eilenberg (Varsovie).

Les groupes de Betti [1]) des complexes géométriques jouissent, en vertu de leur définition, de la propriété suivante: étant donnée une somme de deux complexes géométriques $K = K_1 + K_2$ où K_2 est de dimension $\leqslant n$, 1° les groupes de Betti de dimension $> n$ de K_1 coïncident avec ceux de K, 2° les groupes de Betti de dimension n de K_1 sont des sous-groupes de groupes correspondants de K.

Je montre dans cette Note que ces théorèmes restent valables pour des espaces métriques compacts arbitraires.

Un simplexe n-dimensionnel $\Delta = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ sera dit *dégénéré*, lorsque ses sommets $a_0, a_1, \dots, a_n$ ne sont pas tous différents entre eux. Un complexe n-dimensionnel dont tous les simplexes n-dimensionnels sont dégénérés sera appelé *complexe n-dimensionnel dégénéré*. Un complexe n-dimensionnel sera nommé *propre*, lorsqu'il ne contient aucun simplexe n-dimensionnel dégénéré. On a les propositions suivantes:

(1) *La frontière $\dot{K}$ d'un complexe n-dimensionnel dégénéré K est un cycle $(n-1)$-dimensionnel dégénéré.*

[1]) Les notions de la théorie de l'homologie employées dans cette Note sont à entendre dans le sens de M. P. Alexandroff, *Einfachste Grundbegriffe der Topologie*, Berlin (1932) et *Dimensionstheorie*, Math. Ann. 106 (1932), p. 161. Voir aussi du même auteur *Sur la notion de dimension des ensembles fermés*, J. Math. pures appl. IX, 11 (1932), p. 283. La définition des groupes de Betti d'un espace métrique compact se trouve chez L. Vietoris, *Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen*, Math. Ann. 97 (1927), p. 454.