Posons $h(u) = h_i(u)$ pour $u \varepsilon L_i$, $i = 1, 2 \ldots m$. $h(u)$ est continue sur Q_0 et:

$$h(Q_0) = Q'_k \tag{114}$$

$$\varrho(u, h(u)) < 2\eta \tag{115}$$

donc:

$$\mu(P_0, Q_0) < \eta \tag{116}$$

$$\mu(Q_0, Q'_k) < 2\eta \tag{117}$$

ces inégalités et (112) entraînent $\varrho_1(Q'_k, P_k) < \frac{10}{3}\eta$, donc d'après le lemme:

$$\mu(Q'_k, P_k) < 40\eta \tag{118}$$

$$\mu(P_0, P_k) < 43\eta. \tag{119}$$

Mais en permutant P_0, P_k, on obtient:

$$\mu(P_k, P_0) < 43\eta. \tag{120}$$

Donc (111) entraîne (119) et (120), c. à d. $\varrho_\mu(P_0, P_k) < 43\eta$. On voit que (108) entraîne $\varrho_\mu(P_k, P_0) \to 0$, ce qui, d'après le théorème V suffit pour démontrer le théorème VI.

Warszawa, 2/X 1934.

Sur la décomposition des continus péaniens plans.

Par

Karol Borsuk (Warszawa).

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant:

Théorème. *Tout continu péanien plan qui ne coupe le plan euclidien R_2 qu'en un nombre fini de régions est une somme de deux continus péaniens dont aucun ne coupe le plan.*

Les continus péaniens plans qui ne coupent pas le R_2 étant identiques avec les continus péaniens plans unicohérents [1]), notre théorème se laisse formuler aussi de la manière suivante:

Tout continu péanien plan qui ne coupe R_2 qu'en un nombre fini de régions est une somme de deux continus péaniens unicohérents.

En tenant compte du théorème de M. S. Straszewicz [2]) concernant le nombre des régions définis dans R_2 par une somme de deux continus, on en conclut:

Un continu péanien plan coupe le plan euclidien en n régions (où n est un nombre naturel) lorsqu'il se laisse décomposer en deux continus péaniens unicohérents dont la partie commune se compose de n composantes.

Il résulte, en particulier, de cette dernière proposition, dont la démonstration n'utilise que les méthodes de la „Théorie des Ensembles", que le nombre des régions définis dans R_2 par un continu péanien arbitraire est un invariant intrinsèque de ce continu — fait bien connu, mais qui n'a été démontré jusqu'à présent que par les méthodes de la „Topologie Combinatoire".

[1]) C. Kuratowski, Fund. Math. 8 (1926), p. 140

[2]) S. Straszewicz, Fund. Math. 7 (1925), p. 168.

Nous commençons par la démonstration d'un lemme bien général:

Lemme. *Soit Π une propriété telle que:*

1° Tous les arcs simples jouissent de la propriété Π,

2° Si les ensembles compacts en soi A et B n'ont qu'un seul point commun et jouissent de la propriété Π, leur somme en jouit également.

Soient, en outre, $A_1, A_2, \dots A_k$ des sous-ensembles d'un espace „arcwise connected" [3]) *E, compacts en soi, disjoints deux-à-deux et jouissant de la propriété Π.*

Dans ces hypothèses, il existe un ensemble A jouissant de la propriété Π et satisfaisant à l'inclusion $A_1+A_2+\dots A_k\subset A\subset E$.

Démonstration. Notre lemme étant évidemment vrai dans le cas $k=1$, il en reste qu'à le prouver dans le cas $k=k_0+1\geqslant 2$ en admettant qu'il est vrai dans le cas $k\leqslant k_0$. Il résulte de nos hypothèses qu'il existe un arc simple $L\subset E$ dont les extrémités p et q appartiennent à deux ensembles différents A_i et A_j et dont l'intérieur est placé en dehors de la somme $\sum\limits_{i=1}^{k} A_i$. Admettons, par raison de symétrie, que c'est le cas $p\in A_{k_0}$ et $q\in A_{k_0+1}$ qui se présente. L'ensemble $A_{k_0}+L$, étant une somme de deux ensembles compacts en soi qui ont un seul point p commun et qui jouissent de la propriété Π, en jouit également. Pour la même raison, l'ensemble $A'_{k_0}=A_{k_0}+L+A_{k_0+1}$ jouit de la propriété Π. Notre lemme étant par hypothèse vrai dans le cas $k=k_0$, on conclut qu'il existe un ensemble A jouissant de la propriété Π et satisfaisant à l'inclusion $E\supset A\supset A_1+A_2+\dots A_{k_0-1}+A'_{k_0}\supset A_1+\dots A_{k_0}+A_{k_0+1}$,

c. q. f. d.

Remarquons enfin que parmi les maintes propriétés qui remplissent les prémisses de notre lemme se trouve aussi la propriété „être un continu péanien unicohérent" [4]).

Démonstration du théorème. Soit A un continu péanien plan qui coupe R_2 en un nombre fini de régions. Désignons ces régions par $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots \Gamma_n$ et admettons, pour fixer les idées, qu'il existe une droite D coupant à la fois toutes ces régions. On peut, bien entendu, parvenir toujours à cette situation en soumettant R_2 à une transformation homéomorphe en lui-même. Soit maintenant ε

[3]) Au sens de M. S. T. Whyburn.

[4]) Cf. Fund. Math. 17 (1931), p. 160 et Fund. Math. 18 (1932), p. 208.

un nombre positif si petit qu'il existe dans chacune des régions Γ_i un point de distance $>\varepsilon$ de D. Envisageons une décomposition de A en un nombre fini de continus péaniens de diamètre $<\varepsilon$ [5]) et désignons par M l'ensemble-somme de tous ceux parmi eux qui contiennent des points de D. Les composantes de M sont, bien entendu, des continus péaniens et leur nombre est fini. Il résulte, en outre, de la définition du nombre ε qu'aucun de ces continus ne coupe R_2 entre aucun couple de points de l'ensemble R_2-A. Par conséquent, toutes les régions-composantes bornées des complémentaires de ces continus sont contenues dans A. En ajoutant alors aux continus qui sont les composantes de M les régions bornées définies par eux-mêmes, on parvient à un système fini $P_1, P_2, \dots P_n$ de sous-continus péaniens de A qui ne coupent pas R_2, sont disjoints deux à deux et dont la somme constitue un entourage de l'ensemble $A\cdot D$ dans A. Il existe alors un nombre positif η tel que la distance entre chacun des points de l'ensemble $A-\sum\limits_{i=1}^{n} P_i$ et la droite D est plus grande que η.

Décomposons maintenant A en un nombre fini de continus péaniens à diamètre $<\eta$ [5]). L'ensemble-somme de tous ceux parmi ces continus qui contiennent les points de $A-\sum\limits_{i=1}^{n} P_i$ se compose d'un nombre fini de composantes, dont chacune est un continu péanien ne contenant aucun point de la droite D et, par conséquent, ne coupant pas R_2 entre aucun couple de points de R_2. En appliquant un raisonnement entièrement analogue au précédent, on peut remplacer ces continus par un système fini $Q_1, Q_2, \dots Q_m$ de continus péaniens disjoints deux à deux qui ne coupent pas R_2 et satisfont à l'inclusion:

$$A-\sum_{i=1}^{n} P_i\subset \sum_{j=1}^{m} Q_j\subset A. \tag{1}$$

Chaque continu péanien ne coupant pas R_2 étant unicohérent, il résulte de notre lemme l'existence de deux continus péaniens unicohérents B et C tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} P_i\subset B\subset A$ et $\sum\limits_{j=1}^{m} Q_j\subset C\subset A$, ce qui entraîne, en vertu de (1), l'égalité $A=B+C$, c. q. f. d.

[5]) En vertu du théorème dû à M. W. Sierpiński (Fund. Math. 1 (1920), p. 44) d'après lequel chaque continu péanien est décomposable en une somme finie de continus péaniens si petits qu'on le veut.

En tenant compte du fait que les continus péaniens plans coupant R_2 en un nombre fini des régions coïncident avec les continus plans localement conctractiles [6]) et les continus plans ne coupant pas R_2 avec les rétractes absolus [7]), on peut formuler notre théorème comme il suit:

Tout continu plan localement contractile est une somme de deux rétractes absolus.

Le théorème analogue pour les continus péaniens plans [8]) arbitraires ainsi que pour les continus localement conctractiles non plans [9]) serait en défaut.

[6]) Le continu P est dit localement contractile lorsque tout entourage U de chacun de ses points p contient un entourage de p qui se laisse contracter dans U c. à d. un entourage U_0 pour lequel il existe une fonction $f(x, t)$ continue par rapport aux deux variables $x \in U_0$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$ à la fois et telle que $f(x, 0) = x$, $f(x, t) \in U$ et $f(x, 1) = const.$ quels que soient $x \in U_0$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$. En ce qui concerne la caractérisation des continus péaniens plans qui coupent R_2 en un nombre fini des régions par la contractilité locale, voir Fund. Math. 19 (1932), p. 240.

[7]) L'ensemble A est dit rétracte absolu, lorsqu'il existe pour tout espace métrique séparable $E \supset A$ une fonction continue f transformant E en A de manière que $f(x) = x$ pour tout $x \in A$.

[8]) Cf. Fund. Math. 22 (1934), p. 287.

[9]) Cf. la note de M. S. Mazurkiewicz et moi, C. R. 199 (1934), p. 110.

Über exponierte Punkte abgeschlossener Punktmengen.

Von

Stefan Straszewicz (Warszawa).

Zu den Grundbegriffen der Minkowski'schen Theorie der konvexen Körper gehört der Begriff des *extremen Punktes* einer konvexen Menge. In der nachfolgenden Mitteilung wird der engere Begriff des *exponierten Punktes* eingeführt, der in den Anwendungen ähnliche Dienste leistet und den Vorteil bietet, direkt für beliebige abgeschlossene Punktmengen definiert zu sein.

1. Im Folgenden wird mit M eine abgeschlossene und beschränkte Punktmenge im n-dimensionalen euklidischen Raume R_n bezeichnet. Eine $(n-1)$-dimensionale Ebene des R_n wird kurz „Ebene" genannt. Eine Ebene E heisst *Stützebene* von M, falls 1) $EM \neq 0$ und 2) M ganz in einem der von E bestimmten abgeschlossenen Halbräume des R_n liegt. Die Menge M hat dieselben Stützebenen, wie ihre konvexe Hülle $H(M)$.

Definition. Ein Punkt a der Menge M heisst *exponierter Punkt von M*, falls es eine Stützebene von M gibt, die mit M nur den Punkt a gemeinsam hat.

2. Die Verteilung der exponierten Punkte in M wird durch folgenden Satz charakterisiert:

Jeder offene Halbraum, welcher Punkte von M enthält, enthält auch exponierte Punkte von M.

Beweis. Zu jedem Raumpunkte p gehört eine kleinste n-dimensionale Kugel vom Mittelpunkte p, welche die Menge M enthält.