Sur l'espace des continus péaniens.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

Introduction.

Soit U un espace, (ϱ), (ϱ')-deux métriques de U. Nous dirons [1]), qu'elles sont *équivalentes* si pour $x_i, y \in U$, $i = 1, 2 \dots$ la condition $\varrho(x_i, y) \to 0$ entraîne: $\varrho'(x_i, y) \to 0$ et inversement; nous dirons que la métrique (ϱ) est *plus restrictive* que (ϱ') si $\varrho(x_i, y) \to 0$ entraîne $\varrho'(x_i, y) \to 0$ sans que l'inverse ait nécessairement lieu.

Un espace U métrisé par une métrique (ϱ), sera désigné par $[U, (\varrho)]$. L'ensemble de toutes les métriques de U, équivalente à une métrique donnée (ϱ) sera désigné par $\mathfrak{M}(U, \varrho)$.

Si U est un continu péanien métrisé par (ϱ), nous désignerons par (ϱ_U) la *métrique péanienne* de U, la *distance péanienne* étant définie par: $\varrho_U(a, b) = \inf \delta(C)$, δ-désignant le diamètre d'un ensemble et C parcourant tous les sous-continus de U qui contiennent a et b [2]). On sait que (ϱ_U) est équivalente à (ϱ).

Désignons par 2^U, $\mathfrak{L}(U)$, $\mathfrak{P}(U)$ respectivement les espaces des sous ensembles fermés de U, des sous-continus de U, enfin des sous-continus péaniens de U [3]).

L'espace 2^U (donc aussi $\mathfrak{L}(U)$, $\mathfrak{P}(U)$) peut être métrisé par la *métrique de* M. Hausdorff, que je désignerais par (ϱ_1) et qui est définie par:

$$(1) \qquad \varrho_1(x, y) = \sup \left[\sup_{u \in X} \varrho(u, Y), \sup_{v \in Y} \varrho(v, X)\right] \qquad X, Y \in 2^U$$

[1]) Comp. Aronszajn: Fund. Math. XIX, p. 94–95.

[2]) Comp. Mazurkiewicz: Fund. Math. I, p. 168; Urysohn: Verh. Akad. Amsterdam (erste sectie) Deel XIII, N° 4, p. 38–39. (J'ai remplacé le terme distance relative par distance péanienne).

[3]) J'emploie les termes continu et continu péanien lato sensu, c. à d. inclusive ensembles composés d'un seul point.

Cette métrique s'est montrée trés utile pour l'étude de 2^U et $\mathfrak{L}(U)$. Cependant elle paraît *trop peu restrictive* pour l'étude de $\mathfrak{P}(U)$.

De plus, si U est un cube à plus de 2 dimensions, $\mathfrak{P}(U)$ est exactement de classe $F_{\sigma\delta}$ par rapport à $[2^U, (\varrho_1)]$ [4]). Il en résulte que *dans ce cas simple une métrique de $\mathfrak{P}(U)$ équivalente à (ϱ_1) n'est jamais complète.*

Le but de ce mémoire est de *définir pour $\mathfrak{P}(U)$ une nouvelle métrique plus restrictive que celle de Hausdorff; cette métrique est complète.*

§ 1. Prolongement d'une métrique.

Soit E un espace compact et métrique, (ϱ) sa métrique.

Soit $\tau(u, v, F, \varrho')$ une fonction de 4 variables, définie pour $u, v \in E$, $F \in 2^E$, $\varrho' \in \mathfrak{M}(F, \varrho)$. Nous dirons que $\tau(u, v, F, \varrho')$ est une *fonction déterminante d'un prolongement métrique dans E*, si elle satisfait aux conditions suivantes:

(α_1) *pour F, ϱ' fixes, $\tau(u, v, F, \varrho')$ est une distance entre u et v et la métrique déterminée par cette distance (métrique $(\tau(F, \varrho'))$) est équivalente à (ϱ).*

(α_2) $\tau(u, v, F, \varrho') = \varrho'(u, v)$ *pour* $u, v \in F$.

Nous dirons que $\tau(u, v, F, \varrho')$ est une fonction déterminante, *continue* d'un prolongement métrique dans E, si elle satisfait en outre aux conditions suivantes:

(α_3) *A tout $\eta > 0$ on peut faire correspondre un $\xi > 0$ tel que pour tout $F \in 2^E$ les conditions:*

$$(\varrho'), (\varrho'') \in \mathfrak{M}(F, \varrho); \quad \sup_{a, b \in F} |\varrho'(a, b) - \varrho''(a, b)| < \xi$$

entraînent:

$$\sup_{u, v \in E} |\tau(u, v, F, \varrho') - \tau(u, v, F, \varrho'')| < \eta.$$

(α_4) *Si la métrique (ϱ') est définie et équivalente à (ϱ) dans tout l'espace E, alors: $\varrho_1(F, F_1) \to 0$ entraîne:*

$$\sup_{u, v \in E} |\tau(u, v, F, \varrho') - \tau(u, v, F_1, \varrho')| \to 0.$$

[4]) Mazurkiewicz: Fund. Math. XVII, p. 273.

Théorème I. *Il existe une fonction déterminante continue d'un prolongement métrique dans E.*

Une fonction déterminante d'un prolongement métrique dans un espace métrique quelconque a été construite par M. Hausdorff[5]. Nous nous servirons de ses résultats, mais, comme nous supposons que *E est compact*, nous pouvons remplacer la fonction auxiliaire $\varphi(x, a)$ de M. Hausdorff par une fonction plus simple (due d'ailleurs aussi à M. Hausdorff[6]).

Soit: $F \epsilon 2^E$, $(\varrho') \epsilon \mathfrak{M}(F, \varrho)$; nous désignerons par a, b, p, q les points de F, par u, v — ceux de E, par x, y ceux de $E - F$. Désignons par $\omega(\eta)$ toute fonction non négative de la variable positive η, telle que $\eta \to 0$ entraîne: $\omega(\eta) \to 0$.

Posons:

$$\vartheta(u, v) = \inf [\varrho(u, v), \varrho(u, F) + \varrho(v, F)] \tag{2}$$

$$\lambda(b, a) = \varrho'(b, a) \tag{3}$$

$$\lambda(x, a) = \inf_p \left[\varrho'(p, a) + \frac{\varrho(x, p)}{\varrho(x, F)} - 1\right] \tag{4}$$

$$\tau(u, v, F, \varrho') = \sup [\sup_a |\lambda(u, a) - \lambda(v, a)|, \vartheta(u, v)]. \tag{5}$$

Pour démontrer que (5) est une fonction déterminante d'un prolongement métrique dans E, il suffit de démontrer que[7]:

(β_1) $\varrho(x, F) \to 0$, $\lambda(x, a) \to 0$ entraînent $\varrho(x, a) \to 0$

(β_2) $\varrho(x, b) \to 0$ entraîne: $\sup_a |\lambda(x, a) - \varrho'(b, a)| \to 0$; b-fixe

(β_2) $\varrho(x, y) \to 0$ entraîne: $\sup_a |\lambda(x, a) - \lambda(y, a)| \to 0$; x-fixe

(β_1) est une conséquence presque immédiate de la continuité de $\lambda(x, a)$.

Il existe un p' et un q (dépendant de x et de a), tels que

$$\lambda(x, a) = \varrho'(p', a) + \frac{\varrho(x, p')}{\varrho(x, F)} - 1 \tag{6}$$

$$\varrho(x, q) = \varrho(x, F). \tag{7}$$

[5] Fund. Math. XVI, p. 353–360.
[6] Hausdorff: Math. Zeitschr. 5 (1919), p. 296.
[7] Hausdorff, l. c. [6] p. 354–355.

Donc:

$$\varrho'(p', a) \leqq \lambda(x, a) \leqq \varrho'(q, a) \leqq \delta'(E) \tag{8}$$

$$\varrho(x, p') \leqq \varrho(x, F)\,[\lambda(x, a) + 1] \leqq \varrho(x, b)\,[\delta'(E) + 1] \tag{9}$$

$$\varrho(b, p') \leqq \varrho(x, b)\,[\delta'(E) + 1] \tag{10}$$

$$\varrho'(b, p') \leqq \omega[\varrho(x, b)] \tag{11}$$

$$\varrho(b, q) \leqq \varrho(b, x) + \varrho(x, q) = \varrho(b, x) + \varrho(x, F) \leqq 2\varrho(b, x) \tag{12}$$

$$\varrho'(b, q) \leqq \omega[\varrho(x, b)] \tag{13}$$

$$-\varrho'(b, p') \leqq \lambda(x, a) - \varrho'(b, a) \leqq \varrho'(b, q) \tag{14}$$

$$|\lambda(x, a) - \varrho'(b, a)| \leqq \omega[\varrho(x, b)] \tag{15}$$

$$\sup_a |\lambda(x, a) - \varrho'(b, a)| \leqq \omega[\varrho(x, b)] \tag{16}$$

ce qui démontre (β_2).

On a d'après une inégalité de M. Hausdorff[8]:

$$\varrho(p, x)\,\varrho(y, F) - \varrho(p, y)\,\varrho(x, F) \leqq 2\varrho(x, y)\,\varrho(p, y) \leqq 2\varrho(x, y)\,\delta(E) \tag{17}$$

$$|\lambda(x, a) - \lambda(y, a)| \leqq \frac{2\delta(E)\,\varrho(x, y)}{\varrho(x, F)\,\varrho(y, F)} \tag{18}$$

ce qui entraîne (β_3).

Démontrons maintenant la continuité de la fonction (5).

(α_3) est une conséquence de l'inégalité évidente:

$$|\tau(u, v, F, \varrho') - \tau(u, v, F, \varrho'')| \leqq 2 \sup_{a,b} |\varrho'(a, b) - \varrho''(a, b)|. \tag{19}$$

Pour démontrer (α_4) désignons par a_1, b_1, p_1, q_1 les points de F_1, par $\vartheta_1(u, x)$, $\lambda_1(u, a_1)$ ce que devient $\vartheta(u, v)$ resp. $\lambda(u, a)$, si l'on remplace F par F_1 et a par a_1. Soit:

$$\zeta^3 = \varrho_1(F, F_1) \tag{20}$$

et supposons que $\zeta < \frac{1}{2}$. On a d'abord l'inégalité évidente:

$$|\vartheta(u, v) - \vartheta_1(u, v)| \leqq 2\varrho_1(F, F_1). \tag{21}$$

Faisons correspondre à chaque a un a_1' tel que:

$$\varrho(a, a_1') \leqq \zeta^3 \tag{22}$$

et distinguons deux cas:

[8] l. c. [5] p. 359.

Premier cas: $\varrho(u, F) < \zeta > \varrho(u, F_1)$.

Soit p' le point déterminé par (6) si $u = x \in E - F$ et $p' = u$, si $u \in F$.

Dans le premier cas on aura d'après (8), (9):

$$\varrho(u, p') \leqq \zeta[\delta(E) + 1] \tag{23}$$

$$\lambda(u, a) \geqq \varrho'(p', a) \tag{24}$$

et ces inégalités subsistent encore pour $u \in F$. Soit q_1 un point tel que

$$\varrho(u, q_1) = \varrho(u, F_1). \tag{25}$$

On aura en se servant de (23), (24):

$$\lambda_1(u, a_1') \leqq \varrho'(q_1, a_1') \tag{26}$$

$$\begin{aligned} \lambda(u, a) - \lambda_1(u, a_1') &\geqq \varrho'(p', a) - \varrho'(q_1, a_1') \geqq \\ &\geqq -[\varrho'(u, p') + \varrho'(a, a_1') + \varrho'(u, q')] \geqq -\omega(\zeta) \end{aligned} \tag{27}$$

et par raison de symétrie:

$$|\lambda(u, a) - \lambda_1(u, a_1')| \leqq \omega(\zeta). \tag{28}$$

Deuxième cas: $\varrho(u, F) \geqq \frac{1}{2}\zeta \leqq \varrho(u, F_1)$.

Alors: $u \in (E - F)(E - F_1)$. Soit p_1' un point tel que:

$$\varrho(p', p_1') \leqq \zeta^2. \tag{29}$$

On aura (6) et:

$$\lambda_1(u, a_1') \leqq \varrho'(a_1', p_1') + \frac{\varrho(u, p_1')}{\varrho(u, F_1)} - 1 \tag{30}$$

donc

$$\begin{aligned} \lambda(u, a) - \lambda_1(u, a_1') &\geqq \varrho'(a, p') - \varrho'(a_1', p_1') + \\ &+ \varrho(u, p') \frac{\varrho(u, F_1) - \varrho(u, F)}{\varrho(u, F)\,\varrho(u, F_1)} + \frac{\varrho(u, p') - \varrho(u, p_1')}{\varrho(u, F_1)} \geqq \\ &\geqslant -[\varrho'(a, a_1') + \varrho'(p', p_1') + 4\delta(E) \cdot \zeta + 2\zeta^2] \geqq -\omega(\zeta) \end{aligned} \tag{31}$$

et par raison de symétrie:

$$|\lambda(u, a) - \lambda_1(u, a_1')| \leqq \omega(\zeta). \tag{32}$$

Donc pour tous les u, a on a (32) et par suite:

$$|\lambda(u, a) - \lambda(v, a)| \leqq |\lambda_1(u, a_1') - \lambda_1(v, a_1')| + \omega(\zeta) \tag{33}$$

$$\sup_a |\lambda(u, a) - \lambda(v, a)| \leqq \sup_{a_1} |\lambda_1(u, a_1) - \lambda_1(v, a_1)| + \omega(\zeta) \tag{34}$$

(21) et (34) entraînent:

$$\tau(u, v, F, \varrho') \leqq \tau(u, v, F_1, \varrho') + \omega(\zeta) \tag{35}$$

et par raison de symétrie:

$$|\tau(u, v, F, \varrho') - \tau(u, u, F_1, \varrho')| \leqq \omega(\zeta) = \omega(\varrho_1(F, F_1)) \tag{36}$$

ce qui démontre que la fonction (5) possède bien la propriété (α_4)

Le théorème I est ainsi démontré.

§ 2. Limite péanienne et la métrique ϱ_τ.

Soit E un espace péanien. Nous définirons dans $\mathfrak{P}(E)$ une nouvelle notion de limite, que nous appellons *limite péanienne* et une nouvelle métrique que nous désignerons par (ϱ_τ).

Définition I. *Soit: P_k, $P \in \mathfrak{P}(E)$, $k = 1, 2 \ldots$ Nous appellons P limite péanienne de la suite $\{P_k\}$ et nous écrirons:*

$$P = \text{lim. pean } P_k \tag{37}$$

si: (1) $P = \lim P_k$ (*c. à d.* $\varrho_1(P_k, P) \to 0$); (2) *les relations:*

$$a, b \in P; \quad a_k, b_k \in P_k; \quad a_k \to a; \quad b_k \to b \tag{38}$$

entraînent:

$$\varrho_{P_k}(a_k, b_k) \to \varrho_P(a, b). \tag{39}$$

Définition II. *Soit $\tau(u, v, F, \varrho')$ une fonction déterminante continue d'un prolongement métrique dans E. Nous désignons par (ϱ_τ) la métrique de $\mathfrak{P}(E)$ définie par:*

$$\varrho_\tau(P, Q) = \varrho_1(P, Q) + \sup_{u,v} |\tau(u, v, P, \varrho_Q) - \tau(u, v, Q, \varrho_Q)|; \; P, Q \in \mathfrak{P}(E). \tag{40}$$

La métrique (ϱ_τ) détermine dans $\mathfrak{P}(E)$ une notion de limite et nous allons démontrer que cette limite coïncide avec la limite péanienne c. à d.:

Théorème II. *$\varrho_\tau(P_k, P) \to 0$ entraîne: lim. pean. $P_k = P$ et inversement.*

Supposons d'abord que l'on a:

(41) $$\varrho_\tau(P_k, P) \to 0$$

il en résulte:

(42) $$\varrho_1(P_k, P) \to 0$$

et les relations (38) entraînent en vertu de (41) et de la continuité de la fonction $\tau(u, v, P, \varrho_P)$ par rapport à u, v:

(43) $$|\varrho_{P_k}(a_k, b_k) - \varrho_P(a, b)| = |\tau(a_k, b_k, P_k, \varrho_{P_k}) - \tau(a, b, P, \varrho_P)| \leqq$$
$$\leqq |\tau(a_k, b_k, P_k, \varrho_{P_k}) - \tau(a_k, b_k, P, \varrho_P)| + |\tau(a_k, b_k, P, \varrho_P) - \tau(a, b, P, \varrho_P)| \leqq$$
$$\leqq \varrho_\tau(P_k, P) + |\tau(a_k, b_k, P, \varrho_P) - \tau(a, b, P, \varrho_P)| \to 0$$

donc:

(44) $$\text{lim. pean. } P_k = P \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Supposons maintenant que l'on a (44). Soit $\eta > 0$. D'après § 1 (α_3) il existe un $\xi > 0$ tel que pour tout $F \in 2^E$ l'inégalité:

$$\sup_{a, b \in F} |\varrho'(a, b) - \varrho''(a, b)| < \xi$$

avec: (ϱ'), $(\varrho'') \in \mathfrak{M}(F, \varrho)$ — entraîne:

(45) $$\sup_{u, v \in E} |\tau(u, v, F, \varrho') - \tau(u, v, F, \varrho'')| < \eta.$$

Posons: $\sigma(u, v) = \tau(u, v, P, \varrho_P)$; comme pour $a, b \in P$, $\sigma(a, b) = \varrho_P(a, b)$, on a:

(46) $$\sigma(u, v) = \tau(u, v, P, \sigma)$$

(44) entraîne (42), donc d'après § 1 (α_4): $\sup\limits_{u, v \in E} |\tau(u, v, P_k, \sigma) - \sigma(u, v)| \to 0$ il existe par suite un entier k_1 tel que:

(47) $$\sup_{u, v \in E} |\tau(u, v, P_k, \sigma) - \sigma(u, v)| < \eta > \varrho_1(P_k, P) \quad \text{pour} \quad k \geqq k_1.$$

D'autre part, d'après (44) on démontre facilement qu'il existe un $\vartheta > 0$ et un entier k_2 tels que relations:

(48) $$k \geqq k_2, \quad a', b' \in P_k, \quad a, b \in P, \quad \varrho(a, a') < \vartheta > \varrho(b, b')$$

entraînent:

(49) $$|\varrho_{P_k}(a', b') - \varrho_P(a, b)| = |\varrho_{P_k}(a', b') - \sigma(a, b)| < \tfrac{1}{2}\xi$$

$\sigma(u, v)$ étant continue dans E, il existe un $\vartheta' > 0$ tel que les inégalités:

(50) $$\varrho(u, u') < \vartheta' > \varrho(v, v')$$

(51) $$|\sigma(u, v) - \sigma(u', v')| < \tfrac{1}{2}\xi.$$

Déterminons k_3 de manière que: $k \geqq k_3$ entraîne: $\varrho_1(P_k, P) < \inf(\vartheta, \vartheta')$

Supposons que:

(52) $$k \geqq \sup(k_1, k_2, k_3)$$

a', b' étant deux points arbitraires de P_k, nous pouvons leur faire correspondre deux points $a, b \in P$, tels que $\varrho(a, a') < \inf(\vartheta, \vartheta') > \varrho(b, b')$. On a alors (49) et d'après la signification de ϑ': $|\sigma(a, b) - \sigma(a', b')| < \frac{1}{2}\xi$, donc:

(53) $$|\varrho_{P_k}(a', b') - \sigma(a', b')| < \xi$$

donc d'après la signification de ξ:

(54) $$\sup_{u, v \in E} |\tau(u, v, P_k, \varrho_{P_k}) - \tau(u, v, P_k, \sigma)| < \eta$$

et d'autre part (47). Finalement (52) entraîne:

(55) $$\varrho_\tau(P_k, P) < 3\eta$$

η étant quelconque, on voit que (44) entraîne (41) c. q. f. d.

Comme conséquence immédiate de ce théorème, nous obtenons le:

Corollaire I. *Toutes les métriques (ϱ_τ), correspondantes aux différentes fonctions $\tau(u, v, F, \varrho')$ sont équivalentes entre elles.*

Supposons maintenant, que nous avons remplacé la métrique (ϱ) de E par une métrique équivalente $(\bar{\varrho})$. A cette nouvelle métrique correspondent des métriques $(\bar{\varrho}_\tau)$ de $\mathfrak{P}(E)$. Les notions de limite péanienne et de fonction déterminante continue d'un prolongement métrique dans E, ne change nas si l'on passe de (ϱ) à $(\bar{\varrho})$. Donc:

Corollaire II. *Si les métriques (ϱ), $(\bar{\varrho})$ de E sont équivalentes, alors toutes les métriques (ϱ_τ) et $(\bar{\varrho}_\tau)$ de $\mathfrak{P}(E)$ sont équivalentes entre elles.*

§ 3. Propriétés fondamentales de la métrique (ϱ_τ).

Théorème III. La métrique (ϱ_τ) *est complète.*

Soit $\{P_k\}$ une suite satisfaisante à la condition de Cauchy dans l'espace $[\mathfrak{P}(E), (\varrho_\tau)]$. Elle satisfait alors à fortiori à la condition de Cauchy dans l'espace $[\mathfrak{L}(E), (\varrho_1)]$, donc, cet espace étant compact, elle converge dans cet espace. Soit $Q = \lim P_k$; Q est un continu.

Posons $\sigma_k(u, v) = \tau(u, v, P_k, \varrho_{P_k})$. La suite des fonctions $\{\sigma_k(u,v)\}$ est uniformément convergente dans E. Désignons sa limite par $\sigma(u, v)$; alors $\sigma(u, v)$ est continue et, comme on a: $\sigma_k(u, u) = 0$, $k = 1, 2 \dots$, il en résulte:

(56) $$\sigma(u, u) = 0.$$

Considérons deux points arbitraires $a, b \in Q$, et deux suites $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, telles que: $a_k \to a$, $b_k \to b$, $a_k, b_k \in P_k$. A tout k nous pouvons faire correspondre un continu $C_k \subset P_k$, contenant a_k, b_k et satisfaisant à l'inégalité:

(57) $$\delta(C_k) = \varrho_{P_k}(a_k, b_k) = \sigma_k(a_k, b_k).$$

Nous pouvons extraire de $\{C_k\}$ une suite convergente (dans $[\mathfrak{L}(E), (\varrho_1)]$); désignons sa limite par C; C est un continu, $C \subset Q$, enfin $a, b \in C$; donc:

(58) $$\varrho_Q(a, b) \leqq \delta(C) \leqq \overline{\lim}\, \delta(C_k).$$

Comme $a_k \to a$, $b_k \to b$ et $\sigma_k(u,v) \to \sigma(u,v)$ uniformément, on aura:

(59) $$\delta(C_k) \to \sigma(a, b)$$

(60) $$\varrho_Q(a, b) \leqq \sigma(a, b).$$

D'après (56) et la continuité de $\sigma(u, v)$, on a pour b fixe et $a \to b$: $\sigma(a, b) \to 0$, donc d'après (60): $\varrho_Q(a, b) \to 0$. Il en résulte que *Q est un continu péanien.*

Soit $\eta > 0$. Il existe un continu $D \subset Q$, contenant a, b et tel que:

(61) $$\delta(D) = \varrho_Q(a, b).$$

D'après (56) nous pouvons déterminer un $\zeta > 0$ tel que $\varrho(u, v) < \zeta$ entraîne $\sigma(u, v) < \eta$. Soit $\{c^{(i)}\}$, $i = 1, 2, \dots n$ une suite de points, satisfaisant à:

(62) $$c^{(1)} = a, \quad c^{(n)} = b, \quad c^{(i)} \in D, \quad \varrho(c^{(i)}, c^{(i+1)}) < \zeta.$$

Comme $Q = \lim P_k$, nous pouvons déterminer n suites: $\{c_k^{(i)}\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2 \dots$ telles que:

(63) $$c_k^{(1)} = a_k, \quad c_k^{(n)} = b_k, \quad c_k^{(i)} \in P_k, \quad c_k^{(i)} \to c^{(i)}.$$

On a alors:

(64) $$\sigma_k(c_k^{(i)}, c^{(i+1)}) \to \sigma(c^{(i)}, c^{(i+1)}) < \eta$$

donc il existe un entier k_1, tel que $k \geqq k_1$ entraîne:

(65) $$\varrho(c_k^{(i)}, D) \leqq \varrho(c_k^{(i)}, c^{(i)}) < \eta$$

(66) $$\sigma_k(c_k^{(i)}, c_k^{(i+1)}) = \varrho_{P_k}(c_k^{(i)}, c_k^{(i+1)}) < \eta.$$

D'après (66) il existe pour $k \geqq k_1$, un continu $D_k^{(i)} \subset P_k$ contenant $c_k^{(i)}$, $c_{k+1}^{(i)}$ et tel que: $\delta(D_k^{(i)}) < \eta$. Posons $D_k = \sum_{i=1}^{n} D_k^{(i)}$, et soit M_k l'ensemble de points $c_k^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, n$. On aura d'après (65) et (61)

(67) $$\delta(D_k) \leqq \delta(M_k) + 2\eta \leqq \delta(D) + 4\eta < \varrho_Q(a, b) + 4\eta \qquad k \geqq k_1$$

D_k est un continu, $D_k \subset P_k$ et $a_k, b_k \in D_k$; donc:

(68) $$\varrho_{P_k}(a_k, b_k) < \varrho_Q(a, b) + 4\eta \qquad k \geqq k_1$$

(69) $$\sigma(a, b) = \lim \varrho_{P_k}(a_k, b_k) \leqq \varrho_Q(a, b) + 4\eta$$

η étant quelconque, il résulte de (60) et (69): $\varrho_Q(a, b) = \sigma(a, b) = \varrho_{P_k}(a_k, b_k)$ donc:

(70) $$Q = \lim.\ \text{pean.}\ P_k$$

et le théorème est démontré.

Théorème IV. L'espace $[\mathfrak{P}(E), (\varrho_\tau)]$ *est séparable.*

D'après le corollaire II, nous pouvons supposer que la métrique (ϱ) coïncide, avec la métrique péanienne de E. Soit $S = \{s_i\}$, $i = 1, 2 \dots$ un sous-ensemble dénombrable de E, dense dans E. A chaque couple de points: s_i, s_j, nous pouvons faire correspondre un *continu péanien* $S_{i,j} \subset E$, contenant s_i, s_j et tel que:

(71) $$\delta(S_{i,j}) < \varrho(s_i, s_j) + \frac{1}{i+j}.$$

Désignons par $\mathfrak{H}$ l'ensemble de tous les continus, qui sont sommes d'un nombre fini des $S_{i,j}$. Evidemment $\mathfrak{H}$ est un sous-ensemble dénombrable de $\mathfrak{P}(E)$. Nous montrerons que $\mathfrak{H}$ est dense dans $[\mathfrak{P}(E), (\varrho_\tau)]$.

Soit $P \in \mathfrak{P}(E)$, $\eta > 0$.

Déterminons $\xi < 0$ de manière que pour tout $F \in 2^E$ les relations:

$$(72) \qquad (\varrho'),\ (\varrho'') \in \mathfrak{M}(F, \varrho); \quad \sup_{a, b \in F} |\varrho'(a, b) - \varrho''(a, b)| < 4\xi$$

entraînent:

$$(73) \qquad \sup_{u, v \in E} |\tau(u, v, F, \varrho') - \tau(u, v, F, \varrho'')| < \eta.$$

Posons $\sigma(u, v) = \tau(u, v, P, \varrho_P)$ et déterminons $\vartheta > 0$ de manière que les relations:

$$(74) \qquad \varrho(u, u_1) < 12\vartheta > \varrho(v, v_1); \quad \varrho_1(F, P) < 5\vartheta$$

entraînent respectivement:

$$(75) \quad |\sigma(u, v) - \sigma(u_1, v_1)| < \zeta; \quad \sup_{u, v \in E} |\tau(u, v, F, \sigma) - \tau(u, v, P, \sigma)| < \eta$$

et que l'on ait: $10\vartheta < \inf(\zeta, 2\eta)$.

De la suite $\{s_i\}$, nous pouvons tirer une suite finie T, telle que $s_i \in T$ entraîne $i > \dfrac{1}{2\vartheta}$ et que l'on a: $\varrho_1(T, P) < \vartheta$. P étant continu, T est 2ϑ-connexe. Soit H l'ensemble-somme de tous les $S_{i,j}$ tels que: $s_i, s_j \in T$, $\varrho(s_i, s_j) < 3\vartheta$; ces $S_{i,j}$ satisfont à l'inégalité: $\delta(S_{i,j}) < 4\vartheta$. Evidemment $H \in \mathfrak{H}$ et:

$$(76) \qquad \varrho_1(H, T) < 4\vartheta; \quad \varrho_1(H, P) < 5\vartheta.$$

Soient a, b deux points arbitraires de H; d'après la définition de H, il existe deux points $a', b' \in T$ et deux arcs simples $L_1, L_2 \subset H$ aux extremités a, a' et b, b' respectivement assujétis à:

$$(77) \qquad \delta(L_1) < 4\vartheta > \delta(L_2).$$

Soient $a'', b'' \in P$ et tels que $\varrho(a', a'') < \vartheta > \varrho(b', b'')$. Il existe un continu $D \subset P$, contenant a'', b'' et satisfaisant à:

$$(78) \qquad D = \varrho_P(a'', b'') = \sigma(a'', b'').$$

Considérons sur D une suite de points: $\{c''_r\}$, $r = 1, 2 \dots n$, telle que:

$$(79) \qquad c''_1 = a'', \quad c''_n = b'', \quad \varrho(c''_r, c''_{r+1}) < \vartheta$$

et faisons correspondre à chaque c''_r un c'_r tel que:

$$(80) \qquad c'_r \in T; \quad c'_1 = a', \quad c'_n = b'; \quad \varrho(c'_r, c''_r) < \vartheta.$$

Alors $\varrho(c'_r, c'_{r+1}) < 3\vartheta$, donc H contient un arc simple M_r contenant c'_r, c'_{r+1} de diamètre $\delta(M_r) < 4\vartheta$. Posons $D_1 = L_1 + L_2 + \sum_{r=1}^{n} M_r$. Alors $D_1 \subset H$; $a, b \in D_1$, D_1 est un continu, enfin

$$(81) \qquad \delta(D_1) < \delta(D) + 10\vartheta < \sigma(a'', b'') + \zeta.$$

D'autre part: $\varrho(a, a'') < 5\vartheta > \varrho(b, b'')$ donc:

$$(82) \qquad |\sigma(a, b) - \sigma(a'', b'')| < \zeta$$

$$(83) \qquad \varrho_H(a, b) \leqq \delta(D_1) < \sigma(a, b) + 2\zeta.$$

Il existe un continu $G \subset H$ contenant a, b et tel que:

$$(84) \qquad \delta(G) = \varrho_H(a, b).$$

Considérons sur G une suite de points $\{g_i\}$, $i = 1, 2, \dots m$, telle que:

$$(85) \qquad g_1 = a, \quad g_m = b, \quad \varrho(g_i, g_{i+1}) < \vartheta.$$

A chaque g_i nous pouvons faire correspondre, d'après (76) un $g''_i \in P$, de manière que: $g''_1 = a''$, $g''_m = b''$, $\varrho(g_i, g''_i) < 5\vartheta$. Alors $\varrho(g''_i, g''_{i+1}) < 11\vartheta$, donc:

$$(86) \qquad \sigma(g''_i, g''_{i+1}) = \varrho_P(g''_i, g''_{i+1}) < \zeta$$

P contient un continu N_i contenant g''_i, g''_{i+1} et de diamètre $\delta(N_i) = \sigma(g''_i, g''_{i+1}) < \zeta$. Soit $N = \sum_{i=1}^{m} N_i$ c'est un continu contenant a'', b''. On a pour $x \in N$, l'inégalité $\varrho(x, G) < \zeta + 5\vartheta$ donc d'après (84):

$$(87) \quad \delta(N) < \delta(G) + 2\zeta + 10\vartheta < \delta(G) + 3\zeta < \varrho_H(a, b) + 3\zeta$$

c. à d., en tenant compte de $\sigma(a'', b'') < \delta(N)$ et de (82):

$$(88) \qquad \sigma(a, b) < \varrho_H(a, b) + 4\zeta$$

(83) et (88) entraînent:

$$(89) \qquad \sup_{a, b \in H} |\sigma(a, b) - \varrho_H(a, b)| < 4\zeta$$

donc d'après la signification de ζ:

$$(90) \qquad \sup_{u, v \in E} |\tau(u, v, H, \sigma) - \tau(u, v, H, \varrho_H)| < \eta.$$

D'autre part, comme (74) entraîne (75), on a:

$$(91)\qquad \sup_{u,v\in E} |\tau(u,v,H,\sigma) - \tau(u,v,P,\sigma)| < \eta$$

donc:

$$(92)\quad \varrho_\tau(H,P) = \varrho_1(H,P) + \sup_{u,v\in E} |\tau(u,v,H,\varrho_H) - \tau(u,v,P,\sigma)| <$$
$$< 5\vartheta + \sup_{u,v\in E} |\tau(u,v,H,\varrho_H) - \tau(u,v,H,\sigma)| +$$
$$+ \sup_{u,v\in E} |\tau(u,v,H,\sigma) - \tau(u,v,P,\sigma)| < 3\eta$$

η étant quelconque, le théorème est démontré.

Les continus de $\mathfrak{H}$ sont de dimension 1, donc

Corollaire III. *L'ensemble des sous-continus péaniens de E de dimension 1 (c. à d. des courbes péaniennes) est dense dans $[\mathfrak{P}(E), (\varrho_\tau)]$;* cet ensemble est d'ailleurs un G_δ.

§ 4. La métrique (ϱ_τ) et la théorie des petites transformations.

Nous étudions dans ce § certaines rélations de la métrique (ϱ_τ), à la théorie des petites transformations.

Etant donnés deux entiers non négatifs m, n, $m \leqq n$, nous désignons par $\mathfrak{P}_m^n(\mathfrak{P})$ l'ensemble des $P \in \mathfrak{P}(E)$, qui satisfont à l'inégalité $m \leqslant \dim P \leqslant n$. En particulier, $\mathfrak{P}_1(E)$ désigne l'ensemble des sous-continus péaniens de E au sens strict, c. à d. ne se réduisant pas à un point. $\mathfrak{P}_1^1(E)$ désigne l'ensemble des courbes péaniennes [9]) contenues dans E.

Nous introduisons une nouvelle métrique (ϱ_μ) de $\mathfrak{P}_1(E)$, liée à la théorie des petites transformations.

Soient P, $Q \in \mathfrak{P}_1(E)$. Il existe des fonctions $\varphi(u)$, définies et continues pour $u \in P$ et transformant P en Q, c. à d. telles que $\varphi(P) = Q$. Désignons l'ensemble de ces fonctions par $\Phi(P, Q)$ et posons:

$$(93)\qquad \mu(P,Q) = \inf_{\varphi} [\sup_{u\in P} \varrho(u, \varphi(u))] \qquad \varphi \in \Phi(P,Q)$$

$$(94)\qquad \varrho_\mu(P,Q) = \sup[\mu(P,Q), \mu(Q,P)].$$

On vérifie aisément que $\varrho_\mu(P,Q)$ possède les propriétés caractéristiques de la distance, donc (94) détermine dans $\mathfrak{P}_1(E)$ une métrique (ϱ_μ).

[9]) courbe = continu de dimension 1.

Théorème V. *La métrique (ϱ_μ) est plus restrictive que (ϱ_τ).*

Lemme: *Les relations: P, $P_k \in \mathfrak{P}_1(E)$, $\mu(P, P_k) \to 0$ entraînent $\varrho_\tau(P, P_k) \to 0$.*

On a: $\varrho_1(P,Q) \leqq \mu(P,Q)$, donc $\mu(P,P_k)$ entraîne: $\varrho_1(P,P_k) \to 0$. Il en résulte, par un raisonnement facile, que pour:

$$(95)\qquad a, b \in P, \quad a_k, b_k \in P_k, \quad a_k \to a, \quad b_k \to b$$

on a l'inégalité:

$$(96)\qquad \varrho_P(a,b) \leqq \underline{\lim}\, \varrho_{P_k}(a_k, b_k).$$

D'autre part, d'après la supposition, il existe une suite de fonctions: $\{\psi_k(u)\}$, telle que:

$$(97)\qquad \psi_k \in \Phi(P, P_k); \quad \zeta_k = \sup_{u\in P} \varrho(u, \psi_k(u)) \to 0.$$

Soient: $a'_k \in \psi_k^{-1}(a_k)$, $b'_k \in \psi_k^{-1}(b_k)$; alors $a'_k, b'_k \in P$ et:

$$(98)\quad \varrho(a, a'_k) \leqq \varrho(a, a_k) + \zeta_k \to 0; \quad \varrho(b, b'_k) \leqq \varrho(b, b_k) + \zeta_k \to 0$$

donc: $\varrho_P(a'_k, b'_k) \to \varrho_P(a,b)$. Il existe un continu $G_k \subset P$, tel que $a'_k, b'_k \in G_k$ et $\delta(G_k) = \varrho_P(a'_k, b'_k)$. L'ensemble $L_k = \psi_k(G_k)$ est un continu contenant a_k, b_k contenu dans P_k et satisfaisant à l'inégalité:

$$(98)\qquad \delta(L_k) \leqq \delta(G_k) + 2\zeta_k = \varrho_P(a'_k, b'_k)$$

donc, d'après (97):

$$(99)\qquad \overline{\lim}\, \varrho_{P_k}(a_k, b_k) \leqq \varrho_P(a,b)$$

(96) et (99) montrent que $\varrho_{P_k}(a_k, b_k) \to \varrho_{P_k}(a,b)$. Donc $P = \mathrm{lim.\,pean}\, P_k$, ce qui démontre le lemme, en vertu du théorème II.

A fortiori $\varrho_\mu(P, P_k) \to 0$ entraîne $\varrho_\tau(P, P_k) \to 0$. Le théorème V est ainsi démontré. L'inverse, n'a pas toujours lieu. En effet, soit $\dim P = 2$. D'après le corrollaire III, nous pouvons déterminer une suite $\{P_k\}$ telle que $\varrho_\tau(P, P_k) \to 0$ et $\dim P_k = 1$. Or on ne peut pas avoir $\varrho_\mu(P, P_k) \to 0$, car la relation $\mu(P, P_k) \to 0$ entraîne d'après le théorème fondamental de M. Alexandroff sur les petites transformations [10]): $\dim P_k \geqq 2$ pour k suffisamment grand.

[10]) Alexandroff, Annals of Math. Soc. Vol. 30, p. 13—20.

Théorème VI. *Dans l'espace* $\mathfrak{P}_1^1(E)$ *c. à d. dans l'espace des courbes péaniennes du continu péanien* E *les métriques* (ϱ_τ) *et* (ϱ_μ) *sont équivalentes.*

Lemme. *Les relations:* $P \in \mathfrak{P}_1^1(E)$, $Q \in \mathfrak{P}(E)$, $P \subset Q$, $\varrho_1(P, Q) < \eta$ *entraînent:*

(100) $$\mu(P, Q) < 12\,\eta.$$

Il existe un complexe topologique de dimension 1, $P_1 \subset P$, tel que [11]:

(101) $$\mu(P, P_1) < \eta.$$

On a: $\varrho_1(P, P_1) \leqq \mu(P, P_1)$, donc d'après (101):

(102) $$\varrho_1(P_1, Q) < 2\,\eta.$$

D'après le théorème de M. Sierpiński, il existe une décomposition:

(103) $$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i$$

telle que: 1) Q_i est un continu péanien, 2) $\delta(Q_i) < \eta$. Désignons par R_j la somme de tous les Q_i, satisfaisant à la condition: $\varrho(Q_i, Q_j) < 4\eta$. On aura: $\delta(R_j) < 11\,\eta$. On voit facilement, en se servant de (102), que l'on peut faire correspondre à chaque i, $(i = 1, 2 \dots n)$ un arc simple L_i aux extrémités a_i, b_i assujetti aux conditions suivantes: 1) $L_i \subset P_1$, 2) L_i est composé exclusivement de points ordinaires de P_1, 3) $L_i \subset R_i$, 4) $L_i L_j = 0$ pour $i \neq j$. Soit $g_i(u)$ une fonction définie et continue pour $u \in L_i$, assujettie aux conditions: $g_i(a_i) = a_i$, $g_i(b_i) = b_i$, $g_i(L_i) = R_i$. Alors:

(104) $$\varrho(u, g_i(u)) < \delta(R_i) < 11\,\eta.$$

Posons pour $u \in L_i$ $i = 1, 2 \dots n$: $g(u) = g_i(u)$ et pour $u \in P_1 - \sum_{i=1}^{\infty} L_i$: $g(u) = u$.

La fonction $g(u)$ est continue sur P_1 et l'on a:

(105) $$g(P_1) = \sum_{i=1}^{n} R_i + \overline{\left(P_1 - \sum_{i=1}^{n} L_i\right)} = Q,$$

[11]) Mazurkiewicz, Fund. Math. 20, p. 281.

(106) $$\varrho(u, g(u)) < 11\,\eta$$

donc:

(107) $$\mu(P_1, Q) < 11\,\eta.$$

De (101), (107) résulte (100) et le lemme est démontré.

Passons à la démonstration du théorème VI. Soit:

(108) $$P_0 = \lim \operatorname{pean} P_k \quad P_k \in \mathfrak{P}_1^1(E) \qquad k = 1, 2 \dots$$

posons: $\sigma_k(u, v) = \tau(u, v, P_k, \varrho_{P_k})$; la suite $\{\sigma_k(u, v)\}$ est uniformément convergente vers $\sigma_0(u, v)$, donc les fonctions $\sigma_k(u, v)$, $k = 0, 1 \dots$ sont également continues. Il en résulte que, pour tout $\eta < 0$, il existe un $\zeta > 0$ tel que:

(109) $$\varrho(u, v) < \zeta, \quad u, v \in P_k$$

entraîne pour $k = 0, 1, 2 \dots$:

(110) $$\varrho_{P_k}(u, v) < \eta.$$

D'après (108): $\varrho_1(P_0, P_k) \to 0$, donc nous pouvons déterminer un entier k_0 tel que:

(111) $$k \geqq k_0$$

entraîne:

(112) $$\varrho_1(P_0, P_k) < \tfrac{1}{3}\zeta.$$

Supposons que l'on a (111). D'après le théorème cité [11]) il existe une η transformation de P_0, en un complexe topologique $Q_0 \subset P_0$. Nous pouvons décomposer Q_0 en une somme d'un nombre fini d'arc simples $\{L_i\}$, $i = 1, 2 \dots m$, de diamètre $\delta(L_i) < \frac{1}{3}\zeta$ et tels que $L_i L_j$ pour $i \neq j$ est vide ou se réduit à une extrémité de L_i et de L_j. Soient a_i, b_i les extrémités de L_i. D'après (112) nous pouvons déterminer deux points différents a_i', $b_i' \in P_k$, tels que $\varrho(a_i, a_i') < \frac{1}{3}\zeta > \varrho(b_i, b_i')$. Alors $\varrho(a_i', b_i') < \zeta$, donc d'après la signification de ζ: $\varrho_{P_k}(a_i', b_i') < \eta$. Il existe pour suite un continu péanien $L_i' \subset P_k$, tel que: $a_i', b_i' \in L_i'$, $\delta(L_i') < \eta$. On a $\dim L_i' = 1$.

Posons $\sum_{i=1}^{m} L_i' = Q_k'$, alors $\dim Q_k' = 1$ et $Q_k' \subset P_k$. Soit $h(u)$ une fonction continue sur L_i, telle que: $h_i(L_i) = L_i'$; $h_i(a_i) = a_i'$; $h_i(b_i) = b_i'$. On aura pour $u \in L_i$ (en tenant compte de ce que $\zeta < \eta$):

(113) $$\varrho(u, h_i(u)) \leqq \varrho(u, a_i) + \varrho(a_i, a_i') + \varrho(a_i', h_i(u)) < \tfrac{2}{3}\zeta + \eta < 2\,\eta.$$

Posons $h(u) = h_i(u)$ pour $u \in L_i$, $i = 1, 2 \ldots m$. $h(u)$ est continue sur Q_0 et:

$$h(Q_0) = Q'_k \tag{114}$$

$$\varrho(u, h(u)) < 2\eta \tag{115}$$

donc:

$$\mu(P_0, Q_0) < \eta \tag{116}$$

$$\mu(Q_0, Q'_k) < 2\eta \tag{117}$$

ces inégalités et (112) entraînent $\varrho_1(Q'_k, P_k) < \frac{10}{3}\eta$, donc d'après le lemme:

$$\mu(Q'_k, P_k) < 40\eta \tag{118}$$

$$\mu(P_0, P_k) < 43\eta. \tag{119}$$

Mais en permutant P_0, P_k, on obtient:

$$\mu(P_k, P_0) < 43\eta. \tag{120}$$

Donc (111) entraîne (119) et (120), c. à d. $\varrho_\mu(P_0, P_k) < 43\eta$. On voit que (108) entraîne $\varrho_\mu(P_k, P_0) \to 0$, ce qui, d'après le théorème V suffit pour démontrer le théorème VI.

Warszawa, 2/X 1934.

Sur la décomposition des continus péaniens plans.

Par

Karol Borsuk (Warszawa).

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant:

Théorème. *Tout continu péanien plan qui ne coupe le plan euclidien R_2 qu'en un nombre fini de régions est une somme de deux continus péaniens dont aucun ne coupe le plan.*

Les continus péaniens plans qui ne coupent pas le R_2 étant identiques avec les continus péaniens plans unicohérents [1]), notre théorème se laisse formuler aussi de la manière suivante:

Tout continu péanien plan qui ne coupe R_2 qu'en un nombre fini de régions est une somme de deux continus péaniens unicohérents.

En tenant compte du théorème de M. S. Straszewicz [2]) concernant le nombre des régions définis dans R_2 par une somme de deux continus, on en conclut:

Un continu péanien plan coupe le plan euclidien en n régions (où n est un nombre naturel) lorsqu'il se laisse décomposer en deux continus péaniens unicohérents dont la partie commune se compose de n composantes.

Il résulte, en particulier, de cette dernière proposition, dont la démonstration n'utilise que les méthodes de la „Théorie des Ensembles", que le nombre des régions définis dans R_2 par un continu péanien arbitraire est un invariant intrinsèque de ce continu — fait bien connu, mais qui n'a été démontré jusqu'à présent que par les méthodes de la „Topologie Combinatoire".

[1]) C. Kuratowski, Fund. Math. 8 (1926), p. 140

[2]) S. Straszewicz, Fund. Math. 7 (1925), p. 168.