Integration in abstrakten Räumen.

Von

J. Ridder (Groningen).

Die Newtonsche Auffassung der Integration als Umkehrung der Differentiation hat, bekanntlich, ihre bisher weitestgehende Verallgemeinerung in den Integraldefinitionen von Denjoy und von Perron-Bauer gefunden. Daneben haben Untersuchungen von Fréchet[1]) und neuerdings von Kolmogoroff[2]) gezeigt, daß die Leibnizsche Auffassung des Integrals einen weitgehenden Verallgemeinerungsprozeß in anderer Richtung zuläßt; die Leibnizsche Integralauffassung läßt sich, unter geringer Abänderung ihrer Eigenschaften, übertragen in ganz allgemeinen abstrakten Räumen. Die Arbeiten der eben zitierten Autoren nehmen die von Cauchy herrührende, analytische Definition des (bestimmten) Integrals zum Ausgangspunkt[3]). Es ist unsere Absicht in den folgenden Seiten zu zeigen daß der von Lebesgue in seiner ersten Arbeit[4]) über den nach ihm benannten Integralbegriff eingenommene, geometrische Ausganspunkt auch in abstrakten Räumen anwendbar ist und zu zwei Integralbegriffen führt, die zwar weniger allgemein als die Kolmogoroffschen sind, dennoch die wichtigsten Integralbegriffe (wie diejenigen von Riemann und Riemann-Stieltjes, bzw. von Lebesgue und Lebesgue-Stieltjes) als Spezialfälle umfassen. Ihre Eigenschaften stimmen in noch höherem Maße mit denjenigen der Riemanschen bzw. Lebesgueschen Integrale überein als dies bei den Kolmogoroffschen Integralen der

[1]) Siehe M. Frechet, Bull. Soc. Math. de France **43** (1915), S. 248—265.

[2]) Siehe A. Kolmogoroff, Math. Ann. **103** (1930), S. 654—696.

[3]) Das tut auch S. Saks in seiner Monographie: *Théorie de l'intégrale*, (Warszawa 1933), S. 247—263.

[4]) Siehe H. Lebesgue, Ann. di Mat. (3) **7** (1902), S. 331 ff.

Fall ist. Außerdem wird es möglich sein Produkträume und in diesen Maßzahlen derartig einzuführen, daß es in ihnen Doppelintegrale gibt, auf die sich der bekannte Fubinische Satz in sinngemäßer Weise erweitern läßt.

I. Einführung des Maßes in abstrakten Räumen.

§ 1. Im willkürlichen Raume R sei K eine Klasse von Mengen dieses Raumes, welche folgende Eigenschaften hat:

1⁰ es gibt eine (echte oder unechte) Teilklasse K_1 von K derart daß eine Menge P zu K gehört, wenn für jede Menge $A \epsilon K_1$ die Differenzmenge $A - A \cdot P$ zu K gehört; umgekehrt gilt für $P \epsilon K$ und $A \epsilon K_1$ immer $A - A \cdot P \epsilon K$;

2⁰ für $P \epsilon K$ und $Q \epsilon K$ ist auch $P + Q \epsilon K$;

3⁰ für $A \epsilon K_1$ und $B \epsilon K_1$ ist auch $A + B \epsilon K_1$.

Aus der Bedingung 1⁰ folgt, daß die leere Menge und der Raum R immer zu K gehören werden.

Satz I. *Aus $P \epsilon K$ und $Q \epsilon K$ folgt $P \cdot Q \epsilon K$*; jede Klasse K ist ein Ring[5]).

Beweis. Für jede Menge $A \epsilon K_1$ ist

$$A - A \cdot (P \cdot Q) = (A - A \cdot P) + (A - A \cdot Q).$$

Aus 1⁰ folgt:

$$A - A \cdot P \epsilon K \quad \text{und} \quad A - A \cdot Q \epsilon K;$$

also nach 2⁰ auch:

$$A - A \cdot (P \cdot Q) \epsilon K.$$

Da A eine willkürliche Menge aus K_1 ist, wird nach 1⁰ auch $P \cdot Q$ zu K gehören.

Satz II. *Aus $P \epsilon K$ und $Q \epsilon K$ folgt $P - P \cdot Q \epsilon K$*; jede Klasse K ist ein Körper[6]).

[5]) Ein Mengensystem heißt ein Ring, wenn Summe und Durchschnitt von zwei Mengen des Systems wieder dem System angehören. Siehe F. Hausdorff, Mengenlehre (Zweite Aufl., 1927), S. 77.

[6]) Ein Mengensystem heißt ein Körper, wenn Summe, Durchschnitt und Differenz von zwei seiner Mengen wieder dem System angehören. Siehe Hausdorff, l. c. [5]), S. 78.

Beweis. Für jede Menge $A \in K_1$ ist

$$A \cdot (P - P \cdot Q) = A - \{(A - A \cdot P) + A \cdot (P \cdot P)\}.$$

Aus 1° und Satz I folgt:

$$A - A \cdot P \in K \quad \text{und} \quad A \cdot (P \cdot Q) \in K;$$

nach 2° wird auch:

$$A - A \cdot (P - P \cdot Q) = (A - A \cdot P) + A \cdot (P \cdot Q) \in K$$

sein. Da A willkürlich in K_1 gewählt ist, gehört nach 1° auch $P - P \cdot Q$ zu K [7]).

Man sieht nun leicht, daß jede Klasse K sich betrachten läßt als *Körper in R, welcher den ganzen Raum als Element enthält.* Umgekehrt ist jeder Körper, welcher R enthält, eine Klasse K; als Teilklasse K_1 kann man immer K selbst nehmen oder auch die aus dem Raume R als einzelnes Element existierende Klasse.

Definition. Jede zum Körper K gehörende Menge nennen wir *meßbar* (K).

§ 2. $f(P)$ sei eine Mengenfunktion, definiert für alle und nur für alle diejenigen Mengen $P \in K$, zu welchen es eine Menge $A \in K_1$ gibt mit $P \subseteq A$ [8]). Sie soll *beschränkt additiv* heißen, wenn:

1° für je zwei einander fremde Menge P, Q, für die f definiert ist, gilt:

$$f(P) + f(Q) = f(P + Q); \quad \text{und}$$

2° für jede Menge $A \in K_1$ die obere Schranke aller $|f(P)|$-Werte, mit $P \subseteq A$ und $P \in K$, endlich ist.

Ist f definiert für die Menge P, so sie *die positive Variation* $G(P)$ die (endliche) obere Schranke aller $f(E)$-Werte mit $E \subseteq P$ und $E \in K$; *die negative Variation* $g(P)$ sei die (endliche) untere Schranke aller dieser $f(E)$-Werte. Dann läßt sich zeigen:

Satz III. *Auch $G(P)$ und $g(P)$ sind beschränkt additive Mengenfunktionen und es ist*

$$G(P) + g(P) = f(P).$$

[7]) Man bemerkt, daß die Bedingung 3° nicht notwendig ist für die Beweise der Sätze I und II.

[8]) Für die leere Menge wird f gleich Null sein, wie aus der Bedingung 1° folgt.

Beweis. Die Bedingung 2° wird von beiden Variationen erfüllt; beweisen wir noch 1°. Wenn P und Q zwei einander fremde Mengen sind, für die f definiert, so wird es bei willkürlich positivem ε eine Teilmenge E von $P + Q$ geben mit

$$f(E) \geqq G(P + Q) - \varepsilon.$$

Somit ist

$$G(P + Q) - \varepsilon \leqq f(E \cdot P) + f(E \cdot Q) \leqq G(P) + G(Q),$$

oder, da ε willkürlich klein gewählt werden darf,

$$G(P + Q) \leqq G(P) + G(Q). \tag{1}$$

Umgekehrt existieren Mengen $P_1 \subseteq P$ und $Q_1 \subseteq Q$ mit

$$f(P_1) \geqq G(P) - \varepsilon \quad \text{und} \quad f(Q_1) \geqq G(Q) - \varepsilon;$$

daraus folgt leicht:

$$G(P) + G(Q) \leqq G(P + Q), \tag{2}$$

und aus (1) und (2):

$$G(P) + G(Q) = G(P + Q).$$

Wählt man eine Folge von Teilmengen E_k von P mit $f(E_k) \to G(P)$, so wird gleichzeitig gelten $f(P - E_k) \to g(P)$; das folgt aus

$$f(E_k) + f(P - E_k) = f(P). \tag{3}$$

Für $k \to \infty$ liefert (3) die Beziehung:

$$G(P) + g(P) = f(P).$$

Wir bemerken noch, daß $G(P)$ nicht-negativ, $g(P)$ nicht-positiv sein wird. Die ebenfalls beschränkt additive *Totalvariation* $T(P)$ sei definiert durch:

$$T(P) = G(P) + |g(P)|.$$

Satz IV. *Die Klasse K_2 derjenigen Mengen von K, für die f, G, g und T definiert sind, ist ein Körper.*

§ 3. **Definition.** Wenn es zu einer Menge P eine P einschliessende Menge $E \in K_2$ gibt, so definieren wir *die äußere T-Funktion* $T_a(P)$ gleich der unteren Schranke aller $T(E)$-Werte mit $E \supseteq P$ und $E \in K_2$.

Satz V. *Die Klasse K_3 der Mengen, für die T_a definiert ist, ist wieder ein Körper.*

Wie im Falle des äußeren Jordanschen Maßes im n-dimensionalen Euklidischen Raum läßt sich zeigen:

Satz VI. *Für je zwei Mengen P und Q des Körpers K_3 wird*

$$T_a(P+Q) \leqq T_a(P)+T_a(Q)$$

sein.

Satz VII. *Für die zu K_2 gehörenden Mengen von K_3 fällt $T_a(P)$ mit $T(P)$ zusammen.* Dies folgt aus der Körpereigenschaft von K_2 und der Additivität von $T(P)$ für die Mengen von K_2.

Satz VIII. *Wenn P und Q zu K_2 gehören, wird*

$$T_a(P)=T_a(P-P\cdot Q)+T_a(P\cdot Q) \quad \textit{und}$$
$$T_a(P)+T_a(Q)=T_a(P+Q)+T_a(P\cdot Q)$$

sein.

B e w e i s. Nach den Sätzen IV, V und VII haben T_a und T gleiche Werte auf $P+Q$ und ebenso auf $P\cdot Q$. Da außerdem $T(P)$ beschränkt additiv ist für die Mengen von K_2, wird

$$T_a(P)=T(P-P\cdot Q)+T(P\cdot Q)=T_a(P-P\cdot Q)+T_a(P\cdot Q)$$

und

$$T_a(P)+T_a(Q)=T(P-P\cdot Q)+T(P\cdot Q)+T(Q)=$$
$$=T(P+Q)+T(P\cdot Q)=T_a(P+Q)+T_a(P\cdot Q)$$

sein.

Satz IX. *Wenn P zu K_3, E zu K_2 gehört und $E\supseteqq P$ ist, so wird die Differenz $T_a(E)-T_a(E-P)$ bei fest gehaltener Menge P den gleichen Wert haben für alle E, die den Bedingungen genügen.*

B e w e i s. Für $E_1\supseteqq P$, $E_2\supseteqq P$ und $E_1, E_2 \in K_2$ gilt auch $E_3 = E_1\cdot E_2\supseteqq P$ und, nach Satz IV, $E_3 \in K_2$. Nach Satz VI ist

(4) $$T_a(E_1-P)\leqq T_a(E_1-E_3)+T_a(E_3-P).$$

Es sei E' eine zu K_2 gehörende und E_1-P umfassende Menge. Dann wird $E_3\cdot E'\supseteqq E_3-P$ sein; auch hat man $E_1-E_3\subseteqq E_1-P\subseteqq E'$ oder $E_1-E_3\subseteqq E'-E'\cdot E_3$. Somit gilt nach Satz VIII:

$$T_a(E')=T_a(E'-E'\cdot E_3)+T_a(E'\cdot E_3)\geqq T_a(E_1-E_3)+T_a(E_3-P).$$

Aus der Definition der äußeren T-Funktion und Satz VII folgt dadurch:

(5) $$T_a(E_1-P)\geqq T_a(E_1-E_3)+T_a(E_3-P).$$

(4) und (5) liefern:

$$T_a(E_1-P)=T_a(E_1-E_3)+T_a(E_3-P),$$

oder nach Satz VIII,

$$T_a(E_1)-T_a(E_1-P)=T_a(E_3)-T_a(E_3-P).$$

Da man hierin offenbar E_1 durch E_2 ersetzen kann, wird schließlich

$$T_a(E_1)-T_a(E_1-P)=T_a(E_2)-T_a(E_2-P)$$

sein.

§ 4. **Definition.** Für jede Menge $P\in K_3$ sei *die innere T-Funktion* $T_i(P)$ gleich der Differenz $T_a(E)-T_a(E-P)$, wobei $E\supseteqq P$ und $E\in K_2$. Aus Satz IX folgt, daß der Wert dieser Differenz nicht abhängt von der Wahl von E in K_2 [9]).

Satz X. *Es ist immer:* $T_a(P)\geqq T_i(P)$.

B e w e i s. Wenn $E\supseteqq P$ und $E\in K_2$ gilt, ist nach Satz VI:

$$T_a(E)\leqq T_a(E-P)+T_a(P).$$

Daraus folgt der Satz unmittelbar.

Definition. Eine Menge P des Körpers K_3 sei *f-meßbar,* wobei $f(P)$ eine gemäß § 2 beschränkt additive Funktion ist für die Mengen des Körpers K_2, wenn $T_a(P)$ und $T_i(P)$ denselben Wert haben; hierbei ist $T(P)$ die in § 2 definierte Totalvariation von $f(P)$ und haben T_a, T_i die in § 3 bzw. in diesem § angegebene Bedeutung.

Satz XI. *Jede zu K_3 gehörende, f-meßbare Menge P ist auch T-meßbar, G-meßbar und g-meßbar, wobei $T(P)$ die Totalvariation, $G(P)$ die positive- und $g(P)$ die negative Variation von $f(P)$ darstellt.*

[9]) Auch läßt sich unschwer zeigen, daß $T_i(P)$ immer gleich der oberen Schranke aller $T_a(E)$-Werte ist mit $E\subseteqq P$ und $E\in K_2$.

Beweis. Die T-Meßbarkeit ist evident. Nach Satz X wird, da $G(P)$ ihre eigene Totalvariation, $h(P) \equiv |g(P)|$ die Totalvariation von $g(P)$ ist,

$$T_a(P) = G_a(P) + h_a(P) \geqq G_i(P) + h_i(P) = T_i(P),$$

$$G_a(P) \geqq G_i(P) \quad \text{und} \quad h_a(P) \geqq h_i(P)$$

sein. Aus $T_a(P) = T_i(P)$ folgt somit auch:

$$G_a(P) = G_i(P) \quad \text{und} \quad h_a(P) = h_i(P),$$

d. h. die G-Meßbarkeit und die g-Meßbarkeit von P.

Definition. Für jede f-meßbare Menge P des Körpers K_3 sei *das f-Maß* $m_f(P)$ gleich der Differenz von $G_a(P) = G_i(P)$ und $h_a(P) = h_i(P)$:

$$m_f(P) = G_a(P) - h_a(P).$$

Somit wird dann

$$m_G(P) = G_a(P) \quad \text{und} \quad m_g(P) = -h_a(P)$$

sein, sodaß man hat:

$$m_f(P) = m_G(P) + m_g(P).$$

Weiter ist

$$m_T(P) = m_G(P) - m_g(P).$$

Satz XII. *Jede zum Körper K_3 gehörende Menge P ist f-meßbar, T-meßbar, G-meßbar und g-meßbar, und es ist*

$$m_f(P) = f(P), \quad m_T(P) = T(P), \quad m_G(P) = G(P) \quad \text{und} \quad m_g(P) = g(P).$$

Beweis. Aus der Definition (§ 3) folgt, daß für jede Menge P von K_3

$$T_a(P) = T(P)$$

ist. Die erste Definition dieses § liefert:

$$T_i(P) = T_a(P) - T_a(P - P) = T_a(P).$$

Somit ist

$$T(P) = T_a(P) = T_i(P) = m_T(P).$$

Hieraus folgt, daß P f-meßbar und, nach Satz XI, auch G- und g-meßbar ist und daneben, wenn wieder $h(P) \equiv |g(P)|$ ist,

$$G(P) = m_G(P) \quad \text{und} \quad -h(P) = m_g(P).$$

Dadurch wird

$$m_f(P) = m_G(P) + m_g(P) = G(P) - h(P) = f(P)$$

sein.

Satz XIII. *Die Klasse der zum Körper K_3 gehörenden f-meßbaren Mengen ist ein Körper K_4.*

Lemma 1. *Für $P \in K_3$ und $Q \in K_3$ ist*

$$T_a(P + Q) + T_a(P \cdot Q) \leqq T_a(P) + T_a(Q).$$

Beweis. Bei willkürlich positivem η gibt es zum Körper K_2 gehörende Mengen M_1, M_2 mit $M_1 \supseteq P$ und $M_2 \supseteq Q$ so daß

$$T(M_1) \leqq T_a(P) + \eta \quad \text{und} \quad T(M_2) \leqq T_a(Q) + \eta$$

ist. Dadurch hat man, unter Zuhilfenahme von Satz VIII,

$$T_a(P + Q) + T_a(P \cdot Q) \leqq T(M_1 + M_2) + T(M_1 \cdot M_2) = \\ = T_a(M_1) + T_a(M_2) < T_a(P) + T_a(Q) + 2\eta,$$

und, da η willkürlich ist,

$$T_a(P + Q) + T_a(P \cdot Q) \leqq T_a(P) + T_a(Q).$$

Lemma 2. *Für $P \in K_3$ und $Q \in K_3$ ist*

$$T_i(P + Q) + T_i(P \cdot Q) \geqq T_i(P) + T_i(Q).$$

Beweis. Es gibt eine zu K_2 gehörende, $P + Q$ enthaltende Menge M. Mit Hilfe des vorigen Lemmas folgt dadurch:

$$T_i(P + Q) + T_i(P \cdot Q) = 2\,T(M) - T_a[M - (P + Q)] - T_a(M - P \cdot Q) \\ \geqq 2\,T(M) - T_a(M - P) - T_a(M - Q) = \\ = T_i(P) + T_i(Q).$$

Beweis des Satzes XIII. Es seien P und Q zwei f-meßbare Mengen in K_3. Dann wird nach Lemma 1 und 2:

$$T_i(P) + T_i(Q) \leqq T_i(P + Q) + T_i(P \cdot Q) \leqq \\ \leqq T_a(P + Q) + T_a(P \cdot Q) \leqq T_a(P) + T_a(Q)$$

sein. Wegen der f-Meßbarkeit von P und Q wird, da immer $T_i \leqq T_a$ ist (Satz X),

$$T_i(P + Q) = T_a(P + Q) \quad \text{und} \quad T_i(P \cdot Q) = T_a(P \cdot Q)$$

sein müssen. $P + Q$ und $P \cdot Q$ sind somit f-meßbar [10]).

[10]) Außerdem folgt unter Anwendung von Satz XI:

$$m_f(P) + m_f(Q) = m_f(P + Q) + m_f(P \cdot Q).$$

Auch die Differenz zweier f-meßbarer Mengen $P \supseteqq Q$ ist f-meßbar. Denn für $M \epsilon K_2$ und $M \supseteqq P$ wird

$$M - (P - Q) = (M - P) + Q$$

sein; die beiden Mengen $M - P$ und Q sind f-meßbar, somit auch $M - (P - Q)$ und die Komplementärmenge $P - Q$ [11]).

§ 5. Wir ändern die Definition der f-meßbaren Mengen in folgender Weise ab.

Definition. Eine Menge P des Raumes R sei *f-meßbar*, wenn für jede zu K_2 gehörende Menge M die Produktmenge $M \cdot P$ im Sinne von § 4 meßbar ist, d. h. daß

$$T_a(M \cdot P) = T_i(M \cdot P) \tag{6}$$

ist [12]).

Satz XIV. *Die Klasse K_5 der nach dieser Definition f-meßbaren Mengen umfaßt aus dem Körper K_3 alle und nur alle diejenigen Mengen, welche zum Körper K_4 gehören.*

Beweis. M und P mögen beide zum Körper K_4 gehören; dann wird auch $M \cdot P$ zu K_4 gehören. Nach der Definition von § 4 folgt daraus jedoch (6). Somit gehört P auch zu K_5.

Wenn, umgekehrt, P zu K_5 und zu K_3 gehört, so gibt es eine Menge $M \epsilon K_2$ mit $M \supseteqq P$. Aus (6) folgt dann:

$$T_a(P) = T_i(P).$$

Mithin gehört P auch zu K_4.

Definition. Für jede (im verallgemeinerten Sinne) f-meßbare Menge P, welche zu K_4 gehört, mögen f-, T-, G- und g-Maß denselben Wert haben wie in § 4; gehört die f-meßbare Menge nicht zu K_4, so sei

$$m_G(P) = \text{obere Schranke aller } m_G(E \cdot P)\text{-Werte mit } E \epsilon K_2,$$

$$m_g(P) = \text{untere Schranke aller } m_g(E \cdot P)\text{-Werte mit } E \epsilon K_2,$$

[11]) Nach Fußn. [10]) ist $m_f(P - Q) = m_f(P) - m_f(Q)$.

[12]) Wir bemerken, daß für jede (im verallgemeinerten Sinne) f-meßbaren Menge P bei willkürlich aus K_3 gewählter Menge E gilt: $T_a(E . P) = T_a(E) - T_a(E - E . P)$.

$$m_f(P) = m_G(P) + m_g(P)$$

und

$$m_T(P) = m_G(P) - m_g(P),$$

wobei zu beachten ist, daß $m_f(P)$ als unbestimmt betrachtet werden soll, wenn $m_G(P)$ und $m_g(P)$ beide unendlich sind.

Satz XV. *Die Klasse K_5 ist ein Körper, ihre Mengen sind auch T-, G- und g-meßbar (gemäß der ersten Definition dieses §) und für je zwei einander fremde Mengen P, Q von K_5 wird immer*

$$m_T(P) + m_T(Q) = m_T(P + Q) \tag{7}$$

sein; es ist

$$m_f(P) + m_f(Q) = m_f(P + Q), \tag{8}$$

wenn bekannt ist daß eines der beiden Glieder einen endlichen oder bestimmt unendlichen Wert hat.

Beweis. Für $P \epsilon K_5$, $Q \epsilon K_5$ und $M \epsilon K_2$ sind $M \cdot P$ und $M \cdot Q$ immer f-meßbar im Sinne von § 4; dies gilt somit nach Satz XIII auch für $M \cdot (P + Q)$. Dadurch ist $P + Q$ f-meßbar im verallgemeinerten Sinne. In ähnlicher Weise läßt sich zeigen, daß man hat $P \cdot Q \epsilon K_5$ und im Falle $P \supset Q$, $P - Q \epsilon K_5$. K_5 ist somit ein Körper.

Da die Menge $M \cdot P$ mit $P \epsilon K_5$, $M \epsilon K_2$ nach Satz XI T-, G- und g-meßbar ist im Sinne von § 4, so ist P dies auch im Sinne der verallgemeinerten Definition.

Schließlich folgen (7) und (8) mit P und $Q \epsilon K_5$ und $P \cdot Q$ leer auf Grund der letzten Definition aus

$$m_G(M \cdot P) + m_G(M \cdot Q) = m_G[M \cdot (P + Q)]$$

und

$$m_g(M \cdot P) + m_g(M \cdot Q) = m_g[M \cdot (P + Q)],$$

wobei $M \epsilon K_2$, übrigens willkürlich.

Satz XVI. *K ist ein Teilkörper von K_5; die Mengen, meßbar (K), bilden eine Teilklasse der f-meßbaren Mengen* [13]).

[13]) Die Rolle der Borelschen Mengen in der Theorie der „ensembles normaux" im n-dimensionalen Euklidischen Raum wird hier teilweise von den Mengen des Körpers K_3, teilweise von den Mengen von K übernommen. Man vergleiche z. B. de la Vallée Poussin, Intégrales de Lebesgue, etc., Deuxième Ed. (1934), Chap. 6.

Beweis. Für $P \epsilon K$ und eine willkürliche Menge $M \epsilon K_2$ hat man, nach Satz I, $M \cdot P \epsilon K$ und, da es nach § 2 eine Menge $M_1 \epsilon K_1$ gibt mit $M_1 \supseteqq M$, also auch $M_1 \supseteqq M \cdot P$, hat man ebenfalls $M \cdot P \epsilon K_2$. Nach Satz XII wird $M \cdot P \epsilon K_4$ sein und dadurch ist P f-meßbar im verallgemeinerten Sinn (siehe die erste Definition dieses §), gehört mithin zu K_5.

Satz XVII. *Wie auch die für die Mengen der Körpers K_2 beschränkt additive Mengenfunktion $f(P)$ gewählt sei, immer wird der zugehörige Körper K_5 die Mengen von K_2 und den ganzen Raum R umfassen* [13]).

Dies folgt unmittelbar aus dem vorigen Satze, denn die Mengen von K_2 und R sind in K enthalten [14]).

§ 6. Beispiele. 1. Zum Körper K wähle man den kleinsten Körper, welcher: 1° den n-dimensionalen Euklidischen Raum R_n und diejenigen seiner Teilmengen umfaßt, deren Durchschnitte mit den offenen Intervallen $I(a_1 < x_1 < b_1; \ldots; a_n < x_n < b_n)$ in R_n immer als Summe von endlich vielen offenen Intervallen aufgebaut werden können; für den: 2° die Klasse K_1 alle und nur alle aus endlich vielen offenen Intervallen aufgebauten Mengen umfaßt. Die Funktion $f(P)$ sei für die Mengen (P) von K_2 in analoger Weise aus dem elementargeometrischen Maße der Intervalle hergeleitet wie das Borelsche Maß für die B-meßbaren Mengen. Man sieht leicht ein, daß K_4 mit der Klasse der nach Jordan meßbaren Mengen zusammenfällt, während der Körper K_5 eine Erweiterung bildet der Jordanschen. Mengenklasse.

2. K und K_1 seien im linearen Eukl. Raum gewählt wie im Beispiel 1. $\alpha(x)$ sei in jedem Intervall (a, b) von beschränkter Variation. Für das offene Intervall $P \equiv (a, b)$ soll $f(P) \equiv \alpha(b-0) - - \alpha(a+0)$ sein, wobei $\alpha(b-0) \equiv \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} \alpha(x)$ und $\alpha(a+0) \equiv \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \alpha(x)$. Es läßt sich hiernach $f(P)$ definieren für die Mengen von K_2 in gleicher Weise wie unter 1. Die Klasse K_5 der in dieser Weise erhaltenen $\alpha(x)$-meßbaren Mengen ist eine Erweiterung der Klasse der Mengen, welche ein Jordansches Maß „in bezug auf $\alpha(x)$" haben.

[14]) Die vorhergehende Maßtheorie fordert für ihre Durchführung, daß auf einem (bestimmten Bedingungen genügenden) Teilkörper K_2 von K eine beschränkt additive Mengenfunktion gegeben ist; wir bemerken, daß unter Umständen die Integrationstheorie von Kolmogoroff, l. c. [2]), S. 682, 683 es erlaubt, ausgehend von einer für die Mengen von K_2 nicht-additiven Mengenfunktion $\varphi(P)$, eine für diese Mengen (im Sinne von § 2) beschränkt additive Funktion $f(P)$ zu finden.

3. Wie 2, aber im n-dim. Eukl. Raum $(n \geqq 2)$ $\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sei in jedem Intervall von R_n von beschränkter Variation [15]) (nach der Definition von Lebesgue).

§ 7. In einer wichtigen Arbeit von S. Banach: *Sur le problème de la mesure*, Fund. Math. 4 (1923) findet man auf den Seiten 9—27 Betrachtungen über Integrationsverfahren anwendbar auf alle beschränkten Funktionen, definiert für die Punkte eines Kreises mit Radius $\frac{1}{2\pi}$ in der (Euklidischen) xy-Ebene. Völlig gleichartige Betrachtungen können dazu dienen folgendes zu zeigen:

I. Es sei Ω die Klasse derjenigen Funktionen $\{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$ des n-dimens. Eukl. Raumes, welche die Eigenschaften haben: α) die Menge der Werte einer jeden Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist beschränkt; β) es ist immer $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1+k_1, x_2+k_2, \ldots, x_n+k_n)$ wie auch der Punkt $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und wie auch die ganzen Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_n$ gewählt seien. Dann läßt sich ein Integrationsverfahren angeben, anwendbar auf alle Funktionen in Ω und mit den Eigenschaften: 1° für je zwei reelle Zahlen c_1, c_2 und für je zwei Funktionen f_1, f_2 aus Ω ist:

$$\int_K c_1 f_1 + c_2 f_2 = c_1 \int_K f_1 + c_2 \int_K f_2;$$

hierbei deutet K die Punktmenge mit $0 \leqq x_1 < 1$; $0 \leqq x_2 < 1; \ldots;$ $0 \leqq x_n < 1$ an; 2° wenn immer $f \geqq 0$ ist, so wird

$$\int_K f \geqq 0$$

sein; 3° für $f(x) \equiv 1$ ist das Integral über K gleich 1; 4° wenn das Lebesguesche Integral $\int_K (L) f$ existiert, das man

$$\int_K f = \int_K (L) f.$$

[15]) Siehe H. Lebesgue, Ann. Ec. Norm. (3) 27 (1910), p. 410 e. s. Man vergleiche auch J. Ridder, Prace mat.-fiz. 41 (1933), S. 19 u. 20.

II. Es gibt für die Funktionen von Ω ein zweites Integrationsverfahren, daß die Eigenschaften 1°, 2° und 3° (unter I) hat und außerdem die Eigenschaften: 4° wenn das Riemannsche Integral $\int\limits_K (R) f$ existiert, ist

$$\int\limits_K f = \int\limits_K (R) f;$$

5° es gibt eine nach Lebesgue integrierbare Funktion f in Ω (die charakteristische Funktion einer L-meßbaren Menge) mit

$$\int\limits_K f \neq \int\limits_K (L) f.$$

Aus I und II folgt bei Betrachtung der charakteristischen Funktionen $\{f_E(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ aller Mengen $\{E\}$ in R_n, *daß es eine Maßzahl*

$$\mu(E) \equiv \int\limits_K f_E \text{ [alle Integrationen entweder nach I oder nach II;}$$

$$K \equiv \text{Punktmenge mit } 0 \leqq x_1 < 1;\ 0 \leqq x_2 < 1; \dots;\ 0 \leqq x_n < 1]$$

gibt für j e d e *Menge* E *von* R_n *mit den Eigenschaften*:

1° *fur je zwei einander fremde Mengen* E_1, E_2 *ist*

$$\mu(E_1) + \mu(E_2) = \mu(E_1 + E_2);$$

2° *es ist immer*

$$\mu(E) \geqq 0;$$

3° $$\mu(K) = 1;$$

4° *für jede Menge* M, *welche nur einen einzelnen Punkt enthält, ist*

$$\mu(M) = 0\ ^{16}).$$

Es ist jedoch nicht möglich, daß für j e d e Summe von abzählbar vielen, einander fremden Mengen $\{E_k\}$:

$$\mu\Big(\sum_{(k)} E_k\Big) = \sum_{(k)} \mu(E_k)$$

[16]) Man vergleiche hiermit auch die Konstruktion von beschränkt additiven Mengenfunktionen in Arbeiten von S. U l a m [Fund. Math. 14 (1929), S. 231—233] und A. T a r s k i [Fund. Math. 15 (1930), S. 42—50].

wäre. Dies würde einem Satze von B a n a c h und K u r a t o w s k i[17]) (bewiesen unter Annahme der Kontinuumhypothese) widersprechen, nach dem es in einem Raume R von der Mächtigkeit des Kontinuums nie eine nicht-identisch verschwindende, total-additive Mengenfunktion geben kann, definiert für a l l e Mengen in R und gleich Null für alle nur einen einzelnen Punkt enthaltenden Mengen. Daraus folgt der

Satz XVIII. *Für die Mengen eines Körpers* K_5 (siehe die Definition in § 5) *wird es* n i c h t *immer möglich sein, daß das zugehörige* f*-Maß total-additiv ist.*

Denn die Teilmengen eines R_n bilden einen Körper K_5, während jede wie oben definierte Mengenfunktion $\mu(E)$ als zugehöriges f-Maß zu betrachten ist.

§ 8. Die vorhergehende Theorie des b e s c h r ä n k t-additiven Maßes im Körper K_5 läßt sich in leicht ersichtlicher Weise abändern in eine Theorie eines t o t a l-additiven Maßes in einem σ-Körper [18]). Wir werden im folgenden kurz die Änderungen in den Definitionen und Sätzen angeben, welche hierbei notwendig sind.

In Raume R genüge K den gleichen Bedingungen wie in § 1; nur soll unter 2° auch die Summe von abzählbar vielen Mengen zugelassen werden.

Dann wird K ein σ-Körper sein, welcher R enthält.

Die in § 2 eingeführte Mengenfunktion soll total-additiv sein, d. h. unter 1° soll die Additivität für abzählbar viele Mengen gefordert werden, für die und für deren Summe f definiert ist [19]).

$G(P)$, $g(P)$, $T(P)$ werden nun auch total-additiv sein. Die Definition von $T_a(E)$ behält den gleichen Wortlaut. K_2 *und* K_3 *sind „in bezug auf* K_1 *beschränkte“ σ-Körper;* damit meinen wir daß sie Körper sind mit der Eigenschaft, daß die Summe von je abzählbar vielen zu einem solchen Körper gehörenden Mengen auch zum Körper gehört, wenn es eine Menge $A \in K_1$ gibt, welche die Summe als Teilmenge enthält.

[17]) Siehe S. B a n a c h u. K. K u r a t o w s k i, Fund. Math. 14 (1929), S. 127—131.

[18]) Jeder Körper, welcher auch die Summe von abzählbar unendlich vielen seiner Mengen als Element enthält, heißt σ-Körper. Siehe H a u s d o r f f, l. c. [5]), S. 83.

[19]) Bekanntlich folgt nun die Bedingung 2° aus 1°; jene kann somit fortgelassen werden.

Satz VI'. *Für abzählbar viele Mengen $\{P_k\}$, welche ebenso wie ihre Summe zum σ-Körper K_3 gehören, wird immer*

$$T_a(P_1+P_2+\dots)\leqq\sum_{(k)}T_a(P_k)$$

sein.

Der Wortlaut der Sätze VII—X bleibt ungeändert; ebenso die der Definitionen der f-Meßbarkeit und des f-Maßes und der Sätze XI und XII.

Auch K_4 (in Satz XIII) *wird nun ein in bezug auf K_1 beschränkter σ-Körper sein.* Schließlich bleiben die Definitionen in § 5 und die Sätze XIV, XVI und XVII [20]) gleich lauten, während Satz XV sich ändert in:

Satz XV'. *K_5 ist ein σ-Körper, ihre Mengen sind auch T-, G- und g-meßbar* (im Sinne der verallgemeinerten Definition) *und für jede Folge von einander fremden, zu K_5 gehörenden Mengen $\{P_k\}$ wird immer*

$$m_T\Big[\sum_{(k)}P_k\Big]=\sum_{(k)}m_T(P_k)$$

sein; es ist außerdem

$$m_f\Big[\sum_{(k)}P_k\Big]=\sum_{(k)}m_f(P_k),$$

wenn nur das linke Glied einen endlichen oder bestimmt unendlichen Wert hat [21]).

§ 9. Beispiele 1. K sei der σ-Körper der Borelschen Mengen des n-dim. Eukl. Raumes R_n, K_1 die Klasse der offenen Mengen in R_n mit endlichem Borel-Maß; $f(P)$ sei für die Mengen (P) von K_1 gleich ihrem Borel-Maße. Dann wird K_5 der σ-Körper der nach Lebesgue meßbaren Mengen in R_n sein.

2. K sei gewählt wie im Beispiel 1. $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sei in jedem Intervall von R_n von beschränkter Variation [15]). Dann soll K_1 die

[20]) Nur mit „total-additiv“ statt „beschränkt additiv“.

[21]) Die in Fußn. [14]) enthaltene Bemerkung über die Herstellung beschränkt additiver Mengenfunktionen gilt auch für die Herstellung total additiver Mengenfunktionen, wenn man nur statt der Integrationstheorie von Kolmogoroff, l. c. [2]), S. 682, 683 die von diesem Autor l. c. S. 661—671 behandelte Theorie benutzt.

Klasse der offenen Mengen sein, deren Borelsches Maß „in bezug auf die Totalvariation von $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$“ endlich ist. K_5 wir der σ-Körper der „in bezug auf $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$“ nach Lebesgue meßbaren Mengen in R_n sein.

II. Beschränkt- und total-additives Maß in Produkträumen.

§ 10. Es seien $R^{(1)}$ und $R^{(2)}$ zwei abstrakte Räume. Ausgehend von Körpern $K_2^{(1)}$ in $R^{(1)}$ und $K_2^{(2)}$ in $R^{(2)}$ und von für die Mengen dieser Körper definierten, beschränkt additiven Mengenfunktionen $f^{(1)}(P)$ bzw. $f^{(2)}(P)$ [vgl. § 2; die Klassen $K_1^{(1)}$ und $K_1^{(2)}$ sollen dabei mit $K_2^{(1)}$ bzw. $K_2^{(2)}$ zusammenfallend gedacht werden], kann man, wie im Kapitel I, $K_2^{(1)}$ und $K_2^{(2)}$ erweitern zu Körpern $K_4^{(1)}$ bzw. $K_4^{(2)}$, zu welchen beschränkt additive Maßfunktionen gehören, für die Satz XII gilt [22]). Schließlich sind $K_4^{(1)}$ und $K_4^{(2)}$ zu erweitern zu Körpern $K_5^{(1)}$ bzw. $K_5^{(2)}$ und für die in diese Körper erweiterten Maßfunktionen gilt sodann Satz XV [22]); $K_5^{(1)}$ enthält $R^{(1)}$, $K_5^{(2)}$ den Raum $R^{(2)}$ als Element.

Wir bilden den *Produktraum* $R^{(1)}\times R^{(2)}$, d. h. den Raum aller Punktepaare $(x^{(1)}, x^{(2)})$ mit $x^{(1)}\epsilon R^{(1)}$ und $x^{(2)}\epsilon R^{(2)}$. *Elementare Mengen* in $R^{(1)}\times R^{(2)}$ seien alle Mengen, welche sich schreiben lassen als $A\times B$ mit $A\subseteq R^{(1)}$ und $B\subseteq R^{(2)}$.

Definition. Der Körper $\mathfrak{K}_2$ in $R^{(1)}\times R^{(2)}$ sei der kleinste, die Klasse $K_2^{(1)}\times K_2^{(2)}$ enthaltende Körper; hierbei wird $K_2^{(1)}\times K_2^{(2)}$ gebildet von denjenigen elementaren Mengen von $R^{(1)}\times R^{(2)}$, welche sich schreiben lassen $A\times B$ mit $A\,\epsilon\,K_2^{(1)}$ und $B\,\epsilon\,K_2^{(2)}$.

Satz XIX. *Wenn A_1, B_1 zu $K_2^{(1)}$ und A_2, B_2 zu $K_2^{(2)}$ gehören, wird die Differenz*

$$A_1\times A_2-(A_1\times A_2)\cdot(B_1\times B_2)$$

Summe von zwei einander fremden, zu $\mathfrak{K}_2$ gehörenden, elementaren Mengen sein.

Beweis. Denn es ist

$$\begin{aligned}A_1\times A_2-(A_1\times A_2)\cdot(B_1\times B_2)&=A_1\times A_2-(A_1\cdot B_1)\times(A_2\cdot B_2)=\\&=(A_1-A_1\cdot B_1)\times A_2+(A_1\cdot B_1)\times(A_2-A_2\cdot B_2).\end{aligned}$$

[22]) Wir bemerken, daß es zur Durchführung der hier angegebenen Erweiterungen nicht notwendig ist die Existenz von Klassen $K^{(1)}$, $K^{(2)}$ anzunehmen, welche in der in § 1 angegebenen Weise mit $K_2^{(1)}$ bzw. $K_2^{(2)}$ zusammenhängen.

Dies läßt sich leicht verallgemeinern zu:

Satz XIX^a. *Wenn $A_1, B_{1,1}, B_{1,2}, \ldots, B_{1,n}$ zu $K_2^{(1)}$ und $A_2, B_{2,1}, \ldots, B_{2,n}$ zu $K_2^{(2)}$ gehören, wird die Differenz*

$$A_1 \times A_2 - (A_1 \times A_2) \cdot \sum_{j=1}^{n} B_{1,j} \times B_{2,j}$$

Summe von höchstens 2^n, einander fremden, nicht leeren und zu $\mathfrak{K}_2$ gehörenden, elementaren Mengen sein.

Satz XX. *Die Summe von endlich vielen, nicht immer einander fremden Mengem aus $K_2^{(1)} \times K_2^{(2)}$ ist Summe von endlich vielen, einander fremden Mengen von $K_2^{(1)} \times K_2^{(2)}$.*

Beweis. Betrachten wir zwei nicht einander fremde Mengen $A_1 \times A_2$ und $B_1 \times B_2$ mit $A_1, A_2 \in K_2^{(1)}$ und $A_2, B_2 \in K_2^{(2)}$. Dann ist

$$A_1 \times A_2 + B_1 \times B_2 = A_1 \times A_2 + \{B_1 \times B_2 - (A_1 \times A_2) \cdot (B_1 \times B_2)\},$$

also nach Satz XIX Summe von drei zu $K_2^{(1)} \times K_2^{(2)}$ gehörenden und einander fremden Mengen.

Bei drei Mengen aus $K_2^{(1)} \times K_2^{(2)}$ läßt sich schreiben:

$$\begin{aligned} A_1 \times A_2 + B_1 \times B_2 + C_1 \times C_2 = A_1 \times A_2 + \\ + \{B_1 \times B_2 - (A_1 \times A_2) \cdot (B_1 \times B_2)\} + \\ + \{C_1 \times C_2 - (C_1 \times C_2) \cdot (A_1 \times A_2 + B_1 \times B_2)\}; \end{aligned}$$

ihre Summe ist somit auch zu betrachten als Summe von höchstens $1 + 2 + 2^2 = 7$ nicht leeren, einander fremden Mengen aus $K_2^{(1)} \times K_2^{(2)}$.

Der Beweis bei mehr als drei, jedoch endlich vielen Summanden ist hiernach evident.

Aus den Sätzen XIX^a und XX folgt der

Satz XXI. Jede *zum Körper $\mathfrak{K}_2$ gehörende Menge in $R^{(1)} \times R^{(2)}$ ist Summe von endlich vielen, einander fremden, zur Klasse $K_2^{(1)} \times K_2^{(2)}$ gehörenden Mengen.*

Definition. Wenn eine zu $\mathfrak{K}_2$ gehörende Menge P sich schreiben läßt:

$$A_1 \times B_1 + A_2 \times B_2 + \ldots + A_n \times B_n \tag{9}$$

mit $A_j \in K_2^{(1)}$, $B_j \in K_2^{(2)}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ und $(A_i \times B_i) \cdot (A_j \times B_j)$ leer $(i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j)$, so sei

$$\mathfrak{F}(P) = \sum_{j=1}^{n} f^{(1)}(A_j) \times f^{(2)}(B_j). \tag{10}$$

Man sieht unschwer ein, daß der Wert von $\mathfrak{F}(P)$ immer derselbe bleibt wie auch die Zerlegung (9) von P unter den angegebenen Bedingungen gewählt sei; *$\mathfrak{F}(P)$ ist eine für die Mengen von $\mathfrak{K}_2$ beschränkt additive Funktion* (im Sinne von § 2).

Es ist nun möglich zu $\mathfrak{F}(P)$ gehörende positive und negative Variationen, $\mathfrak{G}(P)$ bzw. $\mathfrak{g}(P)$, und eine Totalvariation $\mathfrak{T}(P)$ einzuführen mit den in § 2 behandelten Eigenschaften. Wie in §§ 3, 4 führt die Totalvariation zur äußeren und zur inneren $\mathfrak{T}$-Funktion, $\mathfrak{T}_a(P)$ bzw. $\mathfrak{T}_i(P)$, und die Mengen, für die diese beiden Funktionen deniert sind, bilden einen $\mathfrak{K}_2$ umfassenden Körper $\mathfrak{K}_3$ in $R^{(1)} \times R^{(2)}$. Schließlich bilden die $\mathfrak{F}$-meßbaren Mengen einen Körper $\mathfrak{K}_4$ mit $\mathfrak{K}_2 \subseteq \mathfrak{K}_4 \subseteq \mathfrak{K}_3$ (man vergleiche § 4).

Satz XXII. *Jede elementare Menge $A_1 \times A_2$ mit $A_1 \in K_4^{(1)}$ und $A_2 \in K_4^{(2)}$ gehört zum Körper $\mathfrak{K}_4$.*

Beweis. Zu A_1 gibt es bei willkürlich positivem η eine Menge $E_1 \in K_2^{(1)}$ mit $A_1 \subseteq E_1$ und

$$T^{(1)}(E_1) < m_{T^{(1)}}(A_1) + \eta, \tag{11}$$

und weiter eine Menge $E_1' \in K_2^{(1)}$ mit $A_1 \supseteq E_1'$ und

$$T^{(1)}(E_1) > m_{T^{(1)}}(A_1) - \eta \text{ }^{9}). \tag{12}$$

Ebenso gibt es zu A_2 Mengen $E_2, E_2' \in K_2^{(2)}$ mit $A_2 \subseteq E_2$, $A_2 \supseteq E_2'$ und

$$T^{(2)}(E_2) < m_{T^{(2)}}(A_2) + \eta, \quad T^{(2)}(E_2') > m_{T^{(2)}}(A_2) - \eta \text{ }^{9}). \tag{13}$$

Man hat somit:

$$E_1' \times E_2' \subseteq A_1 \times A_2 \subseteq E_1 \times E_2; \quad E_1' \times E_2' \text{ und } E_1 \times E_2 \in \mathfrak{K}_2 \tag{14}$$

und es ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}(E_1 \times E_2 - E_1' \times E_2') = \mathfrak{T}\{(E_1 - E_1') \times E_2\} + \\ + \mathfrak{T}(E_1' \times (E_2 - E_2')\} = \mathfrak{G}\{(E_1 - E_1') \times E_2\} + |\mathfrak{g}\{(E_1 - E_1') \times E_2\}| \\ + \mathfrak{G}\{E \ \times (E_2 - E_2')\} + |\mathfrak{g}\{E_1' \times (E_2 - E_2')\}|. \end{aligned} \tag{15}$$

Weiter ist z. B.

$\mathfrak{G}\{(E_1 - E_1') \times E_2\} =$ obere Schranke aller $\mathfrak{F}(P)$-Werte
mit $P \subseteq (E_1 - E_1') \times E_2$ und $P \in \mathfrak{K}_2$.

Bei der in der letzten Definition gegebenen Deutung von $\{A_j\}$, $\{B_j\}$ wird, wegen der Additivität von $T^{(1)}$ und $T^{(2)}$,

$$\mathfrak{F}(P) \leqq \sum_{j=1}^{n} T^{(1)}(A_j) \times T^{(2)}(B_j) \leqq T^{(1)}(E_1 - E_1') \times T^{(2)}(E_2),$$

somit auch

(16) $\mathfrak{G}\{(E_1 - E_1') \times E_2\} \leqq T^{(1)}(E_1 - E_1') \times T^{(2)}(E_2)$

sein. Aus (15), (16) und drei weiteren, an (16) analogen Ungleichungen, folgt:

$$\mathfrak{T}(E_1 \times E_2 - E_1' \times E_2') \leqq 2\, T^{(1)}(E_1 - E_1') \times T^{(2)}(E_2) + \\ + 2\, T^{(1)}(E_1') \times T^{(2)}(E_2 - E_2').$$

Mit Hilfe von (11), (12) und (13) liefert dies schließlich:

$$\mathfrak{T}(E_1 \times E_2 - E_1' \times E_2') \leqq 4\eta \cdot [T^{(2)}(E_2) + T^{(1)}(E_1')] < \\ < 4\eta \cdot [m_{T^{(2)}}(A_2) + m_{T^{(1)}}(A_1) + \eta].$$

Daraus und aus (14) folgt, daß $A_1 \times A_2$ $\mathfrak{F}$-meßbar ist.

Korollar. *Der kleinste Körper über $K_4^{(1)} \times K_4^{(2)}$ ist ein (echter oder unechter) Teilkörper von $\mathfrak{K}_4$.*

Nebenbei sei bemerkt, daß die in den Fußnoten [10]) und [11]) gegeben Gleichheiten auch für daß $\mathfrak{F}$-Maß gelten.

§ 11. Wir erweitern den Körper $\mathfrak{K}_4$ der $\mathfrak{F}$-meßbaren Mengen in folgender Weise.

Definition. Eine Menge P des Raumes $R^{(1)} \times R^{(2)}$ sei *$\mathfrak{F}$-meßbar*, wenn für jede zu $\mathfrak{K}_2$ gehörende Menge M die Produktmenge $M \cdot P$ im Sinne von § 10 meßbar ist, d. h. daß

$$\mathfrak{T}_a(M \cdot P) = \mathfrak{T}_i(M \cdot P)$$

ist.

Die Eigenschaften der Klassen K_5, K_4, K_2, welche in § 5 behandelt sind, lassen sich in sinngemäßer Weise auf $\mathfrak{K}_5$, $\mathfrak{K}_4$, $\mathfrak{K}_2$ übertragen.

Satz XXIII. *$\mathfrak{K}_5$ enthält alle Mengen $A_1 \times A_2$ mit $A_1 \in K_5^{(1)}$ und $A_2 \in K_5^{(2)}$, somit auch alle Mengen des kleinsten Körpers über $K_5^{(1)} \times K_5^{(2)}$.*

Beweis. Mit $E_1 \in K_2^{(1)}$, $E_2 \in K_2^{(2)}$ wird

$$(E_1 \times E_2) \cdot (A_1 \times A_2) = (E_1 \cdot A_1) \times (E_2 \cdot A_2)$$

zu $\mathfrak{K}_4$ gehören. Denn nach der ersten Definition von § 5 gehört $E_1 \cdot A_1$ zu $K_4^{(1)}$ und $E_2 \cdot A_2$ zu $K_4^{(2)}$; es läßt sich somit Satz XXII anwenden. Da jede zum Körper $\mathfrak{K}_2$ gehörende Menge Summe von endlich vielen, einander fremden Menge von $K_2^{(1)} \times K_2^{(2)}$ ist (Satz XXI), wird nach der Definition dieses § $A_1 \times A_2$ zu $\mathfrak{K}_5$ gehören.

§ 12. Beispiele. Im m-dimens. Eukl. Raume $R_m^{(1)}$ sei $K_2^{(1)}$ der kleinste Körper, welcher alle offenen Intervalle dieses Raumes enthält; $K_2^{(2)}$ sei der kleinste, die offenen Intervalle enthaltende Körper in $R_n^{(2)}$. Zu jeder Punktfunktion $\alpha^{(1)}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, welche von beschränkter Variation [15]) ist in jedem Intervall von $R_m^{(1)}$, gehört eine (beschränkt) additive Mengenfunktion $f^{(1)}(P)$, welche für jedes offene Intervall $I_m[a_1 < x_1 < b_1; \ldots; a_m < x_m < b_m]$ gegeben wird durch die Summe

$$\alpha^{(1)}(b - 0, b_2 - 0, \ldots, b_n - 0) - \sum \alpha^{(1)}(a_1 + 0, b_2 - 0, \ldots, b_n - 0) + \\ + \sum \alpha^{(1)}(a_1 + 0, a_2 + 0, b_3 - 0, \ldots, b_n - 0) \ldots + \\ + (-1)^n \alpha^{(1)}(a_1 + 0, \ldots, a_n + 0);$$

dabei ist jede der Summen über alle möglichen Anordnungen der jeweiligen Anzahl Koordinaten a_i zu erstrecken und deutet z. B. $\alpha^{(1)}(a_1 + 0, b_2 - 0, \ldots, b_n - 0)$ den Grenzwert

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1; x_2 \to b_2, \ldots, x_n \to b_n; \\ x_1 > a_1; x_2 < b_2, \ldots, x_n < b_n}} \alpha^{(1)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

an. Die Werte von $f^{(1)}(P)$ für die übrigen Mengen aus $K_2^{(1)}$ werden in konstruktiver Weise aus ihren Werten für die offenen Intervalle hergeleitet. In gleicher Weise führt eine Punktfunktion $\alpha^{(2)}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, in jedem Intervall von $R_n^{(2)}$ von beschränkter Variation, zu einer für die Mengen des Körpers $K_2^{(2)}$ definierten, (beschränkt) additiven Mengenfunktion $f^{(2)}(P)$.

Die Betrachtungen von §§ 10 und 11 führen nun zu Mengenkörpern $K_5^{(1)}$ in $R_m^{(1)}$, $K_5^{(2)}$ in $R_n^{(2)}$, welche die in diesen Räumen in bezug auf $\alpha^{(1)}$ bzw. $\alpha^{(2)}$ nach Jordan meßbaren Mengen umfassen, und weiter zu einem Mengenkörper $\mathfrak{K}_1$ im Produktraume $R_m^{(1)} \times R_n^{(2)}$, welcher alle in bezug auf $\alpha^{(1)} \times \alpha^{(2)}$ nach Jordan meßbaren Mengen umfaßt (man vergl. § 6, Beispiel 3). — Spezialfall: $\alpha^{(1)} \equiv x_1 . x_2 \ldots x_m$ und $\alpha^{(2)} \equiv y_1 . y_2 \ldots y_n$.

§ 13. Im Raume $R^{(1)}$ sei die Mengenklasse $K_2^{(1)}$ ein „in bezug auf sich selbst beschränkter" σ-Körper und im Raum $R^{(2)}$ sei auch $K_2^{(2)}$ ein „in bezug auf sich beschränkter" σ-Körper [23]). $f^{(1)}(P)$ und $f^{(2)}(P)$ sollen für die Mengen von $K_2^{(1)}$ bzw. $K_2^{(2)}$ definierte, total-additive Mengenfunktionen sein (siehe § 8), $T^{(1)}$, $G^{(1)}$, $g^{(1)}$ bzw. $T^{(2)}$, $G^{(2)}$, $g^{(2)}$ die zugehörigen totalen, positiven und negativen Variationen. Dann kann man, wie in § 8 angegeben, $K_2^{(1)}$ und $K_2^{(2)}$ erweitern zu in bezug auf $K_2^{(1)}$ bzw. $K_2^{(2)}$ beschränkten σ-Körpern $K_4^{(1)}$ bzw. $K_4^{(2)}$; $f^{(1)}(P)$ und $f^{(2)}(P)$ und die zugehörigen Variationen führen dabei zu total-additiven Maßfunktionen $m_{f^{(1)}}(P)$, $m_{f^{(2)}}(P)$; $m_{T^{(1)}}(P)$, $m_{T^{(2)}}(P)$; $m_{G^{(1)}}(P)$, $m_{G^{(2)}}(P)$; $m_{g^{(1)}}(P)$, $m_{g^{(2)}}(P)$ für die Mengen dieser beschränkten σ-Körper [24]). Schließlich führt eine letzte Erweiterung zu (allgemeinen) σ-Körpern $K_5^{(1)}$ und $K_5^{(2)}$ und für die in diese σ-Körper erweiterten Maßfunktionen gilt Satz XV′; $K_5^{(1)}$ enthält wieder $R^{(1)}$, $K_5^{(2)}$ den Raum $R^{(2)}$ als Element.

Definition. $\mathfrak{K}_2$ sei der kleinste, die Klasse $K_2^{(1)} \times K_2^{(2)}$ enthaltende und in bezug auf $K_2^{(1)} \times K_2^{(2)}$ beschränkte σ-Körper in $R^{(1)} \times R^{(2)}$ [25]).

Definition. Wenn man hat $A \in K_2^{(1)}$, $B \in K_2^{(2)}$, so sei

$$\mathfrak{F}(A \times B) = f^{(1)}(A) \times f^{(2)}(B).$$

Die Funktion $\mathfrak{F}(P)$ ist in analoger Weise, ausgehend von ihren Werten für die (elementaren) Mengen von $K_2^{(1)} \times K_2^{(2)}$, zu erweitern *zu einer für die Mengen der Körpers $\mathfrak{K}_2$ definierten, total-additiven Mengenfunktion* wie das elementargeometrische Maß der Intervalle

[23]) Siehe in § 8 die Definition von „in bezug auf eine Mengenklasse beschränkten" σ-Körpern.

[24]) Hier gilt eine gleichartige Bemerkung wie in Fußn. [23]) enthalten ist.

[25]) Es läßt sich zeigen, daß $\mathfrak{K}_2$ aus denjenigen Mengen des kleinsten σ-Körpers über $K_2^{(1)} \times K_2^{(2)}$ aufgebaut ist, zu welchen es eine Menge aus $K_2^{(1)} \times K_2^{(2)}$ gibt, die die betrachtete Menge enthält.

eines Euklid. Raumes sich erweitern läßt zu dem Borelschen Maß für die nach Borel meßbaren Mengen von endlichem äußeren Maße [26]).

[26]) Wenn $h(x)$ eine für die Punkte einer zu $K_2^{(1)}$ gehörenden Menge P definierte Funktion ist, so wird sie auf P meß*bar* $(K_2^{(1)})$ heißen, wenn für jedes reelle a die Teilmenge $M[f > a]$ von P zu $K_2^{(1)}$ gehört. Die Funktionen, meßbar $(K_2^{(1)})$, haben im Raume $R^{(1)}$ die gleichen Eigenschaften wie die nach Borel meßbaren Funktionen im Euklidischen Raum. So hat man u. a.: Jede Funktion $h(x)$, meßbar $(K_2^{(1)})$, nicht-negativ und endlich, ist auf ihrer Existenzmenge Grenzwert einer monotonen und gleichmäßig konvergenten Folge von Funktionen $\{h_j(x)\}$, meßbar $(K_2^{(1)})$, nicht-negativ und höchstens abzählbar unendlich viele Werte annehmend.

Definition. Nimmt die Funktion $h(x)$, meßbar $(K_2^{(1)})$, nicht-negativ und beschränkt, auf ihrer Existenzmenge P nur abzählbar viele Werte $\{u_k\}$ an, so sei

$$\int_P h(x) \, . \, d f^{(1)}(P) = \sum_{(k)} u_k \, . \, f^{(1)} \{M(h = u_k\}.$$

Hat $h(x)$ mehr als abzählbar unendlich viele verschiedene Werte, so kann man dennoch immer eine monotone, gleichmäßig gegen $h(x)$ konvergierende Folge von Funktionen $\{h_j(x)\}$, meßbar $(K_2^{(1)})$, nicht-negativ und sämtlich abzählbar unendlich viele Werte $\{u_k\}$ annehmend, finden und die Summen

$$S_j \equiv \sum_{(k)} u_k \, . \, f^{(1)} \{M(h_j = u_k\}$$

bilden. Wie auch die Folge gemäß den obigen Bedingungen gewählt wird, immer wird $\lim\limits_{j \to \infty} S_j$ existieren und denselben Wert haben; es sei nun:

$$\int_P h(x) \, d f^{(1)}(P) = \lim_{j \to \infty} S_j.$$

Dieses Integral besitzt u. a. die folgenden Eigenschaften: 1° wenn $h_1(x)$ und $h_2(x)$ auf der zu $K_2^{(1)}$ gehörenden Menge P den gleichen Bedingungen genügen wie $h(x)$, so ist

$$\int_P [h_1(x) + h_2(x)] \, . \, d f^{(1)}(P) = \int_P h_1(x) \, d f^{(1)}(P) + \int_P h_2(x) \, . \, d f^{(2)}(P);$$

2° wenn die Funktionen $\{h_j(x)\}$ auf der zu $K_2^{(1)}$ gehörenden Menge P den gleichen Bedingungen genügen wie $h(x)$ und wenn sie monoton nicht-abnehmend konvergieren gegen die beschränkte Funktion $g(x)$, so wird

$$\int_P g(x) \, d f^{(1)}(P) \text{ existieren und } = \lim_{j \to \infty} \int_P h_j(x) \, d f^{(1)}(P)$$

sein. (Man vergleiche Saks, l. c. [3]), S. 254).

Unter Anwendung dieser beiden Eigenschaften läßt sich folgendes zeigen: Wenn mit x und ξ Punkte von $R^{(1)}$, mit y und mit η Punkte von $R^{(2)}$ gemeint sind, so sei für jede in $R^{(1)} \times R^{(2)}$ liegende Menge M mit M_ξ die in $R^{(2)}$ liegende Menge derjenigen Punkte (y) angegeben, für die (ξ, y) zu M gehört; in gleicher Weise seien die zu $R^{(1)}$ gehörenden Durchschnittsmengen $\{M_\eta\}$ mit $\eta \in R^{(2)}$ definiert. *Dann wird für jede zu $\mathfrak{K}_2$ gehörende Menge M von $R^{(1)} \times R^{(2)}$ und jeden willkürlich in $R^{(1)}$ gewählten Punkt ξ M_ξ zu $K_2^{(2)}$ gehören; wenn $M \subseteqq P \times Q$, wobei*

Zu $\mathfrak{F}(P)$ gehören positive und negative Variationen, $\mathfrak{G}(P)$ bzw. $\mathfrak{g}(P)$, und eine Totalvariation $\mathfrak{T}(P)$, welche total-additiv sind für die Mengen von $\mathfrak{K}_2$. Mit Hilfe der äußeren und inneren $\mathfrak{T}$-Funktionen, $\mathfrak{T}_a(P)$ bzw. $\mathfrak{T}_i(P)$, erhält man *den in bezug auf* $K_2^{(1)} \times K_2^{(2)}$ *beschränkten* σ*-Körper* $\mathfrak{K}_4$ *der* $\mathfrak{F}$*-meßbaren Mengen; das* $\mathfrak{F}$*-Maß ist total-additiv.*

Satz XXII'. *Jede elementare Menge* $A_1 \times A_2$ *mit* $A_1 \in K_4^{(1)}$ *und* $A_2 \in K_4^{(2)}$ *gehört zu* $\mathfrak{K}_4$.

Korollar. *Der kleinste in bezug auf* $K_2^{(1)} \times K_2^{(2)}$ *beschränkte* σ*-Körper über* $K_4^{(1)} \times K_4^{(2)}$ *ist ein (echter oder unechter) Teil von* $\mathfrak{K}_4$.

§ 14. Die Klasse $\mathfrak{K}_4$ der $\mathfrak{F}$-meßbaren Mengen läßt sich erweitern.

Definition. Eine Menge P in $R^{(1)} \times R^{(2)}$ sei $\mathfrak{F}$*-meßbar*, wenn für jede zu $\mathfrak{K}_2$ gehorende Menge M die Produktmenge $M \cdot P$ im Sinne von § 13 $\mathfrak{F}$-meßbar ist.

Die im verallgemeinerten Sinne $\mathfrak{F}$*-meßbaren Mengen bilden einen (allgemeinen)* σ*-Körper* $\mathfrak{K}_5$.

Satz XXIII'. $\mathfrak{K}_5$ *enthält alle Mengen* $A_1 \times A_2$ *mit* $A_1 \in K_5^{(1)}$ *und* $A_2 \in K_5^{(2)}$*, somit auch alle Mengen des kleinsten* σ*-Körpers über* $K_5^{(1)} \times K_5^{(2)}$.

§ 15. Beispiele. Die in § 12 betrachteten Funktionen, $\alpha^{(1)}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ in $R_m^{(1)}$ und $\alpha^{(2)}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ in $R_n^{(2)}$, führen hier im Raume $R_m^{(1)} \times R_n^{(2)}$, zu dem σ-Körper $\mathfrak{K}_5$ der in bezug auf $\alpha^{(1)} \times \alpha^{(2)}$ nach Lebesgue meßbaren Mengen, wenn $K_2^{(1)}$ und $K_2^{(2)}$ diejenigen (und nur diejenigen) Borelschen Mengen von $R_m^{(1)}$ bzw. $R_n^{(2)}$ umfassen, deren Borelsches Maß in bezug auf die Totalvariation von $\alpha^{(1)}$ bzw. die Totalvariation von $\alpha^{(2)}$ endlich ist.

Im Spezialfall: $\alpha^{(1)} \equiv x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_m$; $\alpha^{(2)} \equiv y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n$ führen sie zu den in $R_m^{(1)} \times R_n^{(2)}$ im gewöhnlichen Sinne L-meßbaren Mengen.

$P \in K_2^{(1)}$ *und* $Q \in K_2^{(2)}$, *so werden* $G^{(2)}(M)$ *und* $|g^{(2)}(M_x)|$ *auf* P *meßbar* $(K_2^{(1)})$ *sein. Und es wird*

$$\mathfrak{F}(M) = \int_P G^{(2)}(M_x)\, d f^{(1)}(P) - \int_P |g^{(2)}(M_x)|\, d f^{(1)}(P)$$

sein. Hieraus folgt sofort *die eindeutige Bestimmtheit der Funktion* $\mathfrak{F}(M)$ *für die Mengen von* $\mathfrak{K}_2$.

III. Definition der „Riemann"- und der „Lebesgue"-Integrale.

§ 16. $R^{(1)}$ sei der Raum der reellen Zahlen, $R^{(2)}$ ein abstrakter Raum, in welchem wir Mengenklassen $[K^{(2)}, K_1^{(2)}]$, $K_2^{(2)}, \ldots, K_5^{(2)}$ von der in Kapitel I, §§ 1—7 besprochenen Art nebst beschränkt additiven Mengenfunktionen $f^{(2)}(P)$, $G^{(2)}(P)$, $g^{(2)}(P)$, $T^{(2)}(P)$ und dazu gehörigen Maßfunktionen $m_{f^{(2)}}(P)$, u. s. w. betrachten wollen (vgl. § 10). In $R^{(1)}$ betrachten wir als $K^{(1)}$ den kleinsten Körper, welcher $R^{(1)}$ und diejenigen seiner Teilmengen umfaßt, deren Durchschnitte mit den offenen Intervallen $I(a < x < b)$ in $R^{(1)}$ immer als Summe von endlich vielen offenen Intervallen aufgefaßt werden können und für die $K_1^{(1)}$ die Teilklasse von $K^{(1)}$ ist, deren jede Menge aus endlich vielen offenen Intervallen aufgebaut ist (siehe § 1). $K^{(1)}$ enthält einen Körper $K_2^{(1)}$ von der in § 2 angegebenen Art. Definiert man schließlich die Funktion $f^{(1)}(P)$ für die Mengen (P) von $K_2^{(1)}$, ausgehend von dem elementargeometrischen Maß der offenen Intervalle, so läßt sich $K_2^{(1)}$ sukzessiv erweitern zu Körpern $K_4^{(1)}$ und $K_5^{(1)}$ und für die Mengen dieser Körper erhält man dabei eine (nicht-negative) Maßfunktion $m_{f^{(1)}}(P)$ mit den in §§ 3, 4, 5 behandelten Eigenschaften.

Wie im Kapitel II behandelt, gilt es im Produktraume $R^{(1)} \times R^{(2)}$ aus den K-Klassen hervorgehende Körper $\mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_5$ und dazu gehörende Mengenfunktionen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{T}$ und Maßfunktionen $m_{\mathfrak{F}}$, u. s. w.

Satz XXIV. *Wenn eine zu dem* (in diesem § eingeführten) *Körper* $\mathfrak{K}_2$ *gehörende Menge* P *sich schreiben läßt:*

$$A_1 \times B_1 + A_2 \times B_2 + \ldots + A_n \times B_n$$

mit $A_j \in K_2^{(1)}$, $B_j \in K_2^{(2)}$ $(j = 1, \ldots, n)$ *und* $(A_i \times B_i) \cdot (A_j \times B_j)$ *leer* $(i, j = 1, \ldots, n;\ i \neq j)$, *so wird*

$$\mathfrak{G}(P) = \sum_{j=1}^{n} f^{(1)}(A_j) \times G^{(2)}(B_j); \quad \mathfrak{g}(P) = \sum_{j=1}^{n} f^{(1)}(A_j) \times g^{(2)}(B_j)$$

und

$$\mathfrak{T}(P) = \sum_{j=1}^{n} f^{(1)}(A_j) \times T^{(2)}(B_j)$$

sein.

Beweis. Es ist für jedes j:

(17) $\mathfrak{G}(A_j \times B_j) \leqq G^{(1)}(A_j) \times G^{(2)}(B_j) = f^{(1)}(A_j) \times G^{(2)}(B_j)$ [27].

Zu willkürlich positivem η gibt es eine Menge $P_j \subseteq B_j$ und $\epsilon K_2^{(2)}$ mit $f^{(2)}(P_j) > G^{(2)}(B_j) - \eta$. Es ist somit:

(18) $\mathfrak{G}(A_j \times B_j) \geqq \mathfrak{F}(A_j \times P_j) = f^{(1)}(A_j) \times f^{(2)}(P_j) > f^{(1)}(A_j) \times$
$\times [G^{(2)}(B_j) - \eta]$.

Aus (17) und (18) folgt:

$$\mathfrak{G}(A_j \times B_j) = f^{(1)}(A_j) \times G^{(2)}(B_j).$$

Der übrige Teil der Beweises ist hiernach evident.

Satz XXV. *Wenn es zu der im Raume $R^{(2)}$ liegenden Menge $M^{(2)}$ eine Menge $N^{(2)}$ gibt mit $M^{(2)} \subseteq N^{(2)}$ und $N^{(2)} \epsilon K_2^{(2)}$, so wird für die in $R^{(1)} \times R^{(2)}$ liegende Menge $M^{(1)}[0 \leqq x^{(1)} \leqq h] \times M^{(2)}$ das äußere $\mathfrak{T}$-Maß gleich $h \cdot T_a^{(2)}(M^{(2)})$ sein.*

Beweis. Zu willkürlich positivem η gibt es eine Menge $P^{(2)} \supseteq M^{(2)}$ mit $P^{(2)} \epsilon K_2^{(2)}$ und mit

$$T^{(2)}(P^{(2)}) < T_a^{(2)}(M^{(2)}) + \eta.$$

Da man hat $M^{(1)} \times P^{(2)} \epsilon \mathfrak{K}_2$, wird nach dem vorigen Satze

$$\mathfrak{T}_a(M^{(1)} \times M^{(2)}) \leqq \mathfrak{T}(M^{(1)} \times P^{(2)}) < h \cdot [T_a^{(2)}(M^{(2)}) + \eta]$$

oder, da η willkürlich ist,

(19) $$\mathfrak{T}_a(M^{(1)} \times M^{(2)}) \leqq h \cdot T_a^{(2)}(M^{(2)})$$

sein.

Es sei $E = A_1 \times B_1 + \ldots + A_n \times B_n$ mit $A_j \epsilon K_2^{(1)}$, $B_j \epsilon K_2^{(2)}$ und $(A_i \times B_i) \cdot (A_j \times B_j)$ leer $(i \neq j)$ eine übrigens willkürlich gewählte Überdeckungsmenge von $M^{(1)} \times M^{(2)}$. Jeder Punkt $\xi^{(2)}$ von $M^{(2)}$ gehört dann zu endlich vielen B_j, somit auch zur Produktmenge $\Pi(\xi^{(2)})$ dieser B_j. Die Punkte $(x^{(1)}, \xi^{(2)})$ mit $0 \leqq x^{(1)} \leqq h$ gehören somit zu endlich vielen, einander fremden, elementaren Mengen, deren jede Produktmenge ist eines A_j mit $\Pi(\xi^{(2)})$ und somit Teil einer der Mengen $(A_j \times B_j)$. Da man bei Änderung der Wahl von $\xi^{(2)}$ immer nur endlich viele, voneinander verschiedene Mengen Π

[27]) Man vergleiche Formel (16) und ihre Herleitung.

erhalten kann, sieht man in dieser Weise, daß es endlich viele, einander fremde, elementare Mengen gibt, welche Produkt sind aus einem A_j und einer Menge Π und welche sämtlich zur Überdeckungsmenge E gehören. Aber daraus folgt daß

(20) $$\mathfrak{T}(E) \geqq h \cdot \sum_{(\Pi)} T^{(2)}(\Pi) \geqq h \cdot T_a^{(2)}(M^{(2)})$$

ist. Aus (19) und (20) folgt die Behauptung.

Folgerung. *Das innere $\mathfrak{T}$-Maß von $M^{(1)} \times M^{(2)}$ wird gleich $h \cdot T_i^{(2)}(M^{(2)})$ sein.*

Denn aus den Sätzen XXIV und XXV folgt, wenn man $M^{(2)}$ in einer zu $K_2^{(2)}$ gehörenden Menge $E^{(2)}$ einschließt, daß:

$$\mathfrak{T}_i(M^{(1)} \times M^{(2)}) = \mathfrak{T}(M^{(1)} \times E^{(2)}) - \mathfrak{T}_a[M^{(1)} \times (E^{(2)} - M^{(2)})] =$$
$$= h \cdot T^{(2)}(E^{(2)}) - h \cdot T_a^{(2)}(E^{(2)} - M^{(2)}) = h \cdot T_i^{(2)}(M^{(2)}).$$

§ 17. **Definition.** Eine nicht-negative Funktion $u(x^{(2)})$ sei definiert für die Punkte $(x^{(2)})$ einer in $R^{(2)}$ liegenden, $f^{(2)}$-meßbaren Menge $M^{(2)}$ (von endlichem oder unendlichem $T^{(2)}$-Maße). Existiert ein endliches $\mathfrak{T}$-Maß für die in $R^{(1)} \times R^{(2)}$ liegende Menge

$$E[0 \leqq x^{(1)} \leqq u(x^{(2)});\ x^{(2)} \epsilon M^{(2)}],$$

so soll $u(x^{(2)})$ über $M^{(2)}$ $T^{(2)}$-integrierbar heißen und der Wert *des $T^{(2)}$-Integrals über $M^{(2)}$*, $\int_{M^{(2)}} u(x^{(2)})\, d\, T^{(2)}(B^{(2)})$, sei dann gleich diesem $\mathfrak{T}$-Maße [28]).

Ist $u(x^{(2)})$ beschränkt auf $M^{(2)}$ und $M^{(2)} \epsilon K_4^{(2)}$, so soll das Integral ein *eigentliches* Integral heißen; sonst ein *uneigentliches* [29]).

Definition. Für eine in den Punkten einer Menge $M^{(2)} \epsilon K_4^{(2)}$ definierte, nicht-negative, beschränkte Funktion $u(x^{(2)})$ sei *das obere $T^{(2)}$-Integral* über $M^{(2)}$, $\overline{\int_{M^{(2)}}} u(x^{(2)})\, d\, T^{(2)}(B^{(2)})$, gleich dem äußeren $\mathfrak{T}^{(2)}$-Maße der Menge $E[0 \leqq x^{(1)} \leqq u(x^{(2)});\ x^{(2)} \epsilon M^{(2)}]$. Das innere $\mathfrak{T}^{(2)}$-Maß dieser Menge definiere *das untere $T^{(2)}$-Integral*, $\underline{\int_{M^{(2)}}} u(x^{(2)})\, d\, T^{(2)}(B^{(2)})$.

[28]) Man siehe die Definitionen in § 5.
[29]) Wir behandeln nur eigentliche Integrale. Es wäre nicht schwer eine Theorie der uneigentlichen Integrale hinzuzufügen.

Satz XXVI. *Existiert für die nicht-negative Funktion $u(x^{(2)})$ das eigentliche (oder uneigentliche) Integral: $\int\limits_{M^{(2)}} u(x^{(2)})\,dT^{(2)}(B^{(2)})$ [mit $M^{(2)}$ $f^{(2)}$-meßbar], so existieren ebenfalls*

$$\int\limits_{M^{(2)}} u(x^{(2)})\,d\,G^{(2)}(B^{(2)}) \quad \text{und} \quad \int\limits_{M^{(2)}} u(x^{(2)})\,d\,|g^{(2)}(B^{(2)})|$$

(und umgekehrt), und es ist

$$\int\limits_{M^{(2)}} u(x^{(2)})\,dT^{(2)}(B^{(2)}) = \int\limits_{M^{(2)}} u(x^{(2)})\,d\,G^{(2)}(B^{(2)}) + \int\limits_{M^{(2)}} u(x^{(2)})\,d\,|g^{(2)}(B^{(2)})|.$$

Der Beweis folgt mit Hilfe der Sätze XXIV und XV.

Definition. Für die im vorigen Satze betrachtete Funktion $u(x^{(2)})$ sei *das eigentliche (oder uneigentliche) $f^{(2)}$-Integral über $M^{(2)}$* definiert durch:

$$\int\limits_{M^{(2)}} u(x^{(2)})\cdot d\,f^{(2)}(B^{(2)}) \equiv \int\limits_{M^{(2)}} u\cdot d\,G^{(2)} - \int\limits_{M^{(2)}} u\cdot d\,|g^{(2)}|.$$

Definition. Wenn $u(x^{(2)})$ definiert ist für die Punkte einer in $R^{(2)}$ liegenden, $f^{(2)}$-meßbaren Menge $M^{(2)}$ und

1° $u^+(x^{(2)}) = u(x^{(2)})$ in jedem Punkte $x^{(2)}$ von $M^{(2)}$ wo $u(x^{(2)}) \geqq 0$ ist, $u^+(x^{(2)}) = 0$ in allen weiteren Punkten von $M^{(2)}$;

2° $u^-(x^{(2)}) = -[u(x^{(2)}) - u^+(x^{(2)})]$ in allen Punkten von $M^{(2)}$;

und wenn u^+ und u^- über $M^{(2)}$ $T^{(2)}$-integrierbar sind (im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne), so betrachten wir $u(x^{(2)})$ als *$f^{(2)}$-integrierbar über $M^{(2)}$* und es sei das $f^{(2)}$-Integral von $u(x^{(2)})$ über $M^{(2)}$, $\int\limits_{M^{(2)}} u(x^{(2)})\cdot d\,f^{(2)}(B^{(2)})$, gleich

$$\int\limits_{M^{(2)}} u^+\cdot d\,f^{(2)} - \int\limits_{M^{(2)}} u^-\cdot d\,f^{(2)}$$

(Geometrische Definition des „Riemanschen" Integrals).

§ 18. Lemma A. $u(x^{(2)})$ sei nicht-negativ und beschränkt auf der in $R^{(2)}$ liegenden, zu $K_4^{(2)}$ gehörenden Menge $M^{(2)}$. Wenn S die obere Schranke der $u(x^{(2)})$-Werte ist und $0 \leqq p < p+h \leqq S$, so wird

$$h\cdot T_a^{(2)}\{E^{(2)}(u \geqq p+h)\} \leqq \mathfrak{T}_a\{O(p, p+h)\} \leqq h\cdot T_a^{(2)}\{E^{(2)}(u \geqq p)\} \tag{21}$$

und

$$h\cdot T_i^{(2)}\{E^{(2)}(u \geqq p+h)\} \leqq \mathfrak{T}_i\{O(p, p+h)\} \leqq h\cdot T_i^{(2)}\{E^{(2)}(u \geqq p)\} \tag{22}$$

sein.

Hierbei deutet $E^{(2)}(u \geqq p+h)$ die Teilmenge von $M^{(2)}$ an, in deren Punkten $u \geqq p+h$ ist; $O(p, p+h)$ ist eine Punktmenge in $R^{(1)} \times R^{(2)}$, deren Punkte $(x^{(1)}, x^{(2)})$ den Bedingungen: $x^{(2)} \in M^{(2)}$; $p \leqq x^{(1)} \leqq u(x^{(2)}) < p+h$ oder, im Falle $u(x^{(2)}) \geqq p+h$, $p \leqq x^{(1)} < p+h$ genügen.

Beweis. Aus $O(p, p+h)$ entsteht durch Fortlassung der zwischen $x^{(1)} = p$ und $x^{(1)} = p+h$ liegenden, aber nicht bis zu $x^{(1)} = p+h$ reichenden „Ordinatenstücke" eine Teilmenge, deren äußeres $\mathfrak{T}$-Maß, nach Satz XXV, gleich $h\cdot T_a^{(2)}\{E^{(2)}(u \geqq p+h)\}$ ist.

Hätte man die nicht bis zu $x^{(1)} = p+h$ reichenden „Ordinatenstücke" von $O(p, p+h)$ verlängert bis zu $x^{(1)} = p+h$, so wäre aus O eine Menge entstanden, welche O enthielte und deren äußeres $\mathfrak{T}$-Maß gleich $h\cdot T_a^{(2)}\{E^{(2)}(u \geqq p)\}$ wäre.

Damit ist (21) bewiesen. In gleicher Weise findet man (22) unter Anwendung der Folgerung aus Satz XXV.

Lemma B. Für die in Lemma A betrachtete Funktion $u(x^{(2)})$ und Menge $M^{(2)}$ wird, wenn $0 = x_0^{(1)} < x_1^{(1)} < x_2^{(1)} \ldots < x_n^{(1)} = S$ und δ das Maximum der Differenzen $(x_j^{(1)} - x_{j-1}^{(1)})$ ist,

$$\overline{\int\limits_{M^{(2)}}} u(x^{(2)})\,d\,T^{(2)}(B^{(2)}) = \lim_{\delta\to 0} \sum_{j=1}^{n} (x_j^{(1)} - x_{j-1}^{(1)})\cdot T_a^{(2)}\{E^{(2)}(u \geqq x_j^{(1)})\} \tag{23}$$

und

$$\underline{\int\limits_{M^{(2)}}} u(x^{(2)})\,d\,T^{(2)}(B^{(2)}) = \lim_{\delta\to 0} \sum_{j=1}^{n} (x_j^{(1)} - x_{j-1}^{(1)})\cdot T_i^{(2)}\{E^{(2)}(u \geqq x_j^{(1)})\} \tag{24}$$

sein.

Beweis. Nach Lemma 1 (§ 4) wird immer

$$\overline{\int\limits_{M^{(2)}}} u(x^{(2)})\,d\,T^{(2)}(B^{(2)}) \leqq \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{T}_a\{O(x_{j-1}^{(1)}, x_j^{(1)})\} \tag{25}$$

sein. Bei willkürlich positivem ε läßt sich die Menge $O[x^{(2)}$ auf $M^{(2)}$; $0\leq x^{(1)}\leq u(x^{(2)})]$ überdecken von einer zu $\mathfrak{K}_2$ gehörenden Menge $E = A_1\times B_1 + A_2\times B_2+\dots+A_n\times B_n$ mit $A_j \in K_2^{(1)}$, $B_j\in K_2^{(2)}$ $(j=1,2,\dots,n)$ und $(A_i\times B_i)\cdot(A_j\times B_j)$ leer $(i,j=1,\dots,n;\ i\neq j)$ und derartig daß

$$\mathfrak{T}(E)\leq \overline{\int\limits_{M^{(2)}}} u(x^{(2)})\,d\,T^{(2)}(B^{(2)})+\varepsilon \tag{26}$$

ist. Aus der Körpereigenschaft von $\mathfrak{K}_2$ und der Additivität von $\mathfrak{T}$ für die Mengen von $\mathfrak{K}_2$ folgert man nun weiter leicht:

$$\sum_{j=1}^{n} \mathfrak{T}_a\{O(x_{j-1}^{(1)}, x_j^{(1)})\}\leq \mathfrak{T}(E). \tag{27}$$

Da ε willkürlich ist, folgt aus (25), (26) und (27):

$$\overline{\int\limits_{M^{(2)}}} u(x^{(2)})\,dT^{(2)}(B^{(2)}) = \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{T}_a\{O(x_{j-1}^{(1)}, x_j^{(1)})\}.$$

Nach Lemma A wird

$$\sum_{j+1}^{n} (x_j^{(1)}-x_{j-1}^{(1)})\cdot T_a^{(2)}\{E^{(2)}(u\geq x_j^{(1)})\}\leq \overline{\int\limits_{M^{(2)}}} u(x^{(2)})\,d\,T^{(2)}(B^{(2)})\leq \tag{28}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} (x_j^{(1)}-x_{j-1}^{(1)})\cdot T_a^{(2)}\{E^{(2)}(u\geq x_{j-1}^{(1)})\}$$

sein. Da $T_a^{(2)}\{E^{(2)}(u\geq x^{(1)})\}$ eine beschränkte, monotone Funktion von $x^{(1)}$ ist, wird nach einer bekannten Schlußmethode jede der in (28) vorkommenden Summen einen Grenzwert haben und dieser ist für beide derselbe. Damit ist (23) bewiesen.

In gleicher Weise zeigt man (24) [30]).

Definition. $u(x^{(2)})$ sei beschränkt auf einer Menge $M^{(2)}\in K_4^{(2)}$. Dann wird $u(x^{(2)})$ *auf* $M^{(2)}$ $f^{(2)}$*-meßbar* sein, wenn für jeden reellen $x^{(1)}$-Wert, mit Ausnahme höchstens abzählbar unendlich vieler, die Punkte $\{x^{(2)}\}$ von $M^{(2)}$ mit $u(x^{(2)})\geq x^{(1)}$ eine in $R^{(2)}$ $f^{(2)}$-meßbare Menge bilden.

[30]) Dabei wird man Lemma 2 (§ 4) anwenden müssen.

Satz XXVII. *Damit die auf einer zu $K_4^{(2)}$ gehörenden Menge $M^{(2)}$ beschränkte Funktion $u(x^{(2)})$ ein $T^{(2)}$-Integral über $M^{(2)}$ habe (wobei $T^{(2)}$ die Totalvariation von $f^{(2)}$), ist notwendig und hinreichend, daß $u(x^{(2)})$ $f^{(2)}$-meßbar sei auf $M^{(2)}$.*

Sind s und S die untere bzw. obere Schranke von $u(x^{(2)})$ auf $M^{(2)}$ und sind die Teilungspunkte $(x_j^{(1)})$ von (s, S'), wobei $S'>S$ sein soll, derart gewählt, daß

$$s=x_0^{(1)}<x_1^{(1)}<x_2^{(1)}\dots<x_n^{(1)}=S'$$

ist und daß die Teilmengen $\{E^{(2)}(u\geq x_j^{(1)})\}$ von $M^{(2)}$ für jedes j $f^{(2)}$-meßbar sind, so wird

$$\int\limits_{M^{(2)}} u(x^{(2)})\,d\,T^{(2)}(B^{(2)})=\lim_{\delta\to 0}\sum_{j=1}^{n} x_{j-1}^{(1)}\cdot T^{(2)}\{E^{(2)}(x_{j-1}^{(1)}\leq u<x_j^{(1)})\} \tag{29}$$

sein; δ deutet die größte der Intervallängen $(x_j^{(1)}-x_{j-1}^{(1)})$ an. (Lebesgue-Radonsche Definition des „Riemanschen" Integrals).

Beweis. Nach der geometrischen Definition ist für die Existenz von $\int\limits_{M^{(2)}} u\,d\,T^{(2)}$ notwendig und hinreichend die $T^{(2)}$-Integrierbarkeit über $M^{(2)}$ der nicht-negativen Funktion $v(x^{(2)})\equiv u(x^{(2)})-s$.

Da $T_a^{(2)}\{E^{(2)}(v\geq x^{(1)})\}$ und $T_i^{(2)}\{E^{(2)}(v\geq x^{(1)})\}$ monoton nicht-zunehmende Funktionen von $x^{(1)}$ sind, werden sie gleichzeitig stetig sein für alle $x^{(1)}$-Werte, eine höchstens abzählbar unendliche Menge $K^{(1)}$ ausgenommen.

Nach Lemma B ist, wenn $0=\bar{x}_0^{(1)}<\bar{x}_1^{(1)}<\bar{x}_2^{(1)}\dots<\bar{x}_n^{(1)}=S'-s$ und $\bar{\delta}$ das Maximum der Differenzen $(\bar{x}_{j+1}^{(1)}-\bar{x}_j^{(1)})$ ist,

$$\overline{\int\limits_{M^{(2)}}} v(x^{(2)})\,d\,T^{(2)}(B^{(2)})=\lim_{\bar{\delta}\to 0}\sum_{j=1}^{n}(\bar{x}_j^{(1)}-\bar{x}_{j-1}^{(1)})\cdot T_a^{(2)}\{E^{(2)}(v\geq x_j^{(1)})\} \tag{30}$$

und

$$\underline{\int\limits_{M^{(2)}}} v(x^{(2)})\,d\,T^{(2)}(B^{(2)})=\lim_{\bar{\delta}\to 0}\sum_{j=1}^{n}(\bar{x}_j^{(1)}-\bar{x}_{j-1}^{(1)})\cdot T_i^{(2)}\{E^{(2)}(v\geq x_j^{(1)})\}.$$

Diese beiden Grenzwerte können dann und nur dann einander gleich sein, wenn für alle $x^{(1)}$-Werte, welche nicht zu $K^{(1)}$ gehören,

$$T_a^{(2)}\{E^{(2)}(v\geq x^{(1)})\}=T_i^{(2)}\{E^{(2)}(v\geq x^{(1)})\}$$

ist; dies folgt aus der Tatsache, daß das äußere $T^{(2)}$-Maß einer Menge mindestens gleich ihrem inneren $T^{(2)}$-Maße ist. Damit ist bewiesen, daß die im obigen Satze genannte Bedingung notwendig und hinreichend ist für die Existenz von $\int\limits_{M^{(2)}} u(x^{(2)})\, d\, T^{(2)}(B^{(2)})$.

Aus dieser Existenz folgt, wenn man die Teilungspunkte $(\bar{x}_j^{(1)})$ von $(0, S'-s)$ derartig wählt daß die Mengen $\{E^{(2)}(v \geqq \bar{x}_j^{(1)})\}$ $T^{(2)}$-meßbar sind, daß (30) sich dann schreiben läßt:

$$\int\limits_{M^{(2)}} v(x^{(2)})\, d\, T^{(2)} = \lim_{\bar{\delta}\to 0} \sum_{j=1}^{n} (\bar{x}_j^{(1)} - \bar{x}_{j-1}^{(1)}) \cdot T^{(2)}\{E^{(2)}(v \geqq \bar{x}_j^{(1)})\}. \tag{31}$$

Da

$$\sum_{j=1}^{n} (\bar{x}_j^{(1)} - \bar{x}_{j-1}^{(1)}) \cdot T^{(2)}\{E^{(2)}(v \geqq \bar{x}_j^{(1)})\} = -\bar{x}_0^{(1)} \cdot T^{(2)}\{E^{(2)}(v \geqq \bar{x}_1^{(1)})\} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n-1} \bar{x}_j^{(1)} \cdot T^{(2)}\{E^{(2)}(\bar{x}_j^{(1)} \leqq v < \bar{x}_{j+1}^{(1)})\} + \bar{x}_n^{(1)} \cdot T^{(2)}\{E^{(2)}(v \geqq \bar{x}^{(1)})\}$$

und $\bar{x}_0^{(1)} = 0$, $T^{(2)}\{E^{(2)}(v \geqq x_n^{(1)})\} = 0$ ist, so läßt sich statt (31) schreiben:

$$\int\limits_{M^{(2)}} v(x^{(2)})\, d\, T^{(2)} = \lim_{\bar{\delta}\to 0} \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_{j-1}^{(1)} \cdot T^{(2)}\{E^{(2)}(\bar{x}_{j-1}^{(1)} \leqq v < \bar{x}^{(1)})\}. \tag{32}$$

Setzt man für jedes j $x_j^{(1)} = \bar{x}_j^{(1)} + s$, so geht jede Teilung von $(0, S'-s)$ in eine Teilung von (s, S') über und das Maximum δ der zugehörigen Intervallängen wird gleich $\bar{\delta}$ sein. Aus (32) folgt dadurch:

$$\int\limits_{M^{(2)}} u(x^{(2)})\, d\, T^{(2)} = \int\limits_{M^{(2)}} v(x^{(2)})\, d\, T^{(2)} + s \cdot T^{(2)}(M^{(2)}) =$$
$$= \lim_{\delta\to 0} \sum_{j=1}^{n} x_{j-1}^{(1)} \cdot T^{(2)}\{E^{(2)}(x_{j-1}^{(1)} \leqq u < x_j^{(1)})\}.$$

Satz XXVIII. *Auch für die Existenz von* $\int\limits_{M^{(2)}} u(x^{(2)})\, d\, f^{(2)}(B^{(2)})$ *ist die in Satz XXVII genannte Bedingung notwendig und hinreichend; auch (29) bleibt dabei gültig, jedoch mit* $f^{(2)}$ *statt* $T^{(2)}$.

Beweis. Aus § 17 folgt, daß $u(x^{(2)})$ über $M^{(2)}$ $f^{(2)}$-integrierbar sein wird, wenn und nur wenn sie über diese Menge $T^{(2)}$-integrierbar ist. Dazu ist, nach Satz XXVII, wieder notwendig und hinreichend, daß $u(x^{(2)})$ über $M^{(2)}$ $f^{(2)}$-meßbar ist.

Haben s, S, S', $(x_j^{(1)})$ dieselbe Bedeutung wie im vorigen Satze, so liefern die Definitionen von § 17 und die Sätze XXVI und XXVII, wenn $G^{(2)}(B^{(2)})$, $g^{(2)}(B^{(2)})$ positive bzw. negative Variation von $f^{(2)}(B^{(2)})$ sind:

$$\int\limits_{M^{(2)}} u(x^{(2)})\, d\, f^{(2)}(B^{(2)}) = \int\limits_{M^{(2)}} u(x^{(2)})\, d\, G^{(2)} - \int\limits_{M^{(2)}} u(x^{(2)})\, d\, |g^{(2)}| =$$
$$= \lim_{\delta\to 0} \sum_{j=1}^{n} x_{j-1}^{(1)} \cdot G^{(2)}\{E^{(2)}(x_{j-1}^{(1)} \leqq u < x_j^{(1)})\} +$$
$$+ \lim_{\delta\to 0} \sum_{j=1}^{n} x_{j-1}^{(1)} \cdot g^{(2)}\{E^{(2)}(x_{j-1}^{(1)} \leqq u < x_j^{(1)})\} =$$
$$= \lim_{\delta\to 0} \sum_{j=1}^{n} x_{j-1}^{(1)} \cdot f^{(2)}\{E^{(2)}(x_{j-1}^{(1)} \leqq u < x^{(1)})\}.$$

§ 19. **Definition.** $u(x^{(2)})$ sei beschränkt auf einer Menge $M^{(2)} \varepsilon K_2^{(2)}$. Man überdecke $M^{(2)}$ mit endlich vielen, einander fremden und zu $K_2^{(2)}$ gehörenden Mengen $(P_i^{(2)})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, nehme auf jeder Menge $P_i^{(2)} \cdot M^{(2)}$ obere Schranke S_i und untere Schrankn s_i von $u(x^{(2)})$ und bilde die Summen:

$$\sum_{i=1}^{n} S_i \cdot T^{(2)}(P_i^{(2)}) \tag{33}$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} s_i \cdot T^{(2)}(P_i^{(2)}). \tag{34}$$

Wenn diese Summen gleiche untere bzw. obere Schranke haben für alle möglichen derartigen Überdeckungen von $M^{(2)}$, so definiere der gemeinsame Wert dieser Schranken das „Youngsche" $T^{(2)}$-Integral von $u(x^{(2)})$ über $M^{(2)}$.

Die Summen

$$\sum_{i=1}^{n} S_i \cdot G^{(2)}(P_i^{(2)}) \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} s_i \cdot G^{(2)}(P_i^{(2)})$$

haben dann ebenfalls gleiche untere bzw. obere Schranke, welche das „Youngsche“ $G^{(2)}$-Integral von $u(x^{(2)})$ über $M^{(2)}$ definieren sollen. In gleicher Weise führt man das „Youngsche“ $|g^{(2)}|$-Integral von $u(x^{(2)})$ ein und definiere schließlich das „Youngsche“ $f^{(2)}$-Integral von $u(x^{(2)})$ gleich der Differenz beider letztgenannter Integrale (Y o u n g s c h e D e f i n i t i o n).

Satz XXIX. *Die geometrische Definition des $f^{(2)}$-Integrals ist für jede auf einer zu $K_4^{(2)}$ gehörenden Menge $M^{(2)}$ beschränkte Funktion gleichwertig mit der Youngschen Definition.*

B e w e i s. $M^{(2)}$ gehöre zu $K_2^{(2)}$ und s sei die untere Schranke von $u(x^{(2)})$ auf $M^{(2)}$. Wenn dann $u(x^{(2)})$ über $M^{(2)}$ $f^{(2)}$-integrierbar ist nach der Youngschen Definition, so wird $h(x^{(2)}) \equiv u(x^{(2)}) - s$ es auch sein. Wenn man nur zu $h(x^{(2)})$ gehörende Summen (33) und (34) betrachtet, welche $M^{(2)}$ in zu $K_2^{(2)}$ gehörende und zueinander fremde Mengen $\{P_i^{(2)}\}$ „zerlegen“, so werden die untere bzw. obere Schranke dieser Summen sich dadurch nicht ändern. Da dann ausserdem für die Menge $E[x^{(2)} \epsilon M^{(2)};\ 0 \leqq x^{(1)} \leqq h(x^{(2)})]$ in $R^{(1)} \times R^{(2)}$ immer:

$$\sum_{(i)} s_i \cdot T^{(2)}(P_i^{(2)}) \leqq \mathfrak{T}_i(E) \leqq \mathfrak{T}_a(E) \leqq \sum_{(i)} S_i \cdot T^{(2)}(P_i^{(2)})$$

gelten wird (siehe Satz XXV nebst Folgerung), so folgt aus der $f^{(2)}$-Integrierbarkeit von $h(x^{(2)})$ im Simme von Y o u n g auch die nach der geometrischen Definition und die Gleichheit der $T^{(2)}$-Integrale und die der $f^{(2)}$-Integrale. Dasselbe gibt dadurch auch für die Funktion $u(x^{(2)})$.

Hat, umgekehrt, $u(x^{(2)})$ und somit auch $h(x^{(2)})$ ein $T^{(2)}$-Integral über $M^{(2)}$ nach der geometrischen- und dadurch auch nach der Lebesgue-Radonschen Definition, so wird man $(0, S' - s)$ mit $S' >$ obere Schranke S von $u(x^{(2)})$ auf $M^{(2)}$ derartig teilen können:

$$0 = x_0^{(1)} < x_1^{(1)} < x_2^{(1)} \ldots < x_n^{(1)} = S' - s,$$

daß die Teilmengen $E^{(2)}(x_{j-1}^{(1)} \leqq h < x_j^{(1)})$ $T^{(2)}$-meßbar sind und daß das Lebesgue-Radonsche $T^{(2)}$ Integral von h über $M^{(2)}$ um weniger als die beliebig vorgegebene positive Zahl ε von den Summen

$$(35) \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{j-1}^{(1)} \cdot T^{(2)}\{E^{(2)}(x_{j-1}^{(1)} \leqq h < x_j^{(1)})\}$$

und

$$(36) \qquad \sum_{j=1}^{n} x_j^{(1)} \cdot T^{(2)}\{E^{(2)}(x_{j-1}^{(1)} \leqq h < x_j^{(1)})\}$$

abweicht. In jeder Menge $E^{(2)}(x_{j-1}^{(1)} \leqq h < x_j^{(1)})$ kann man eine zu $K_2^{(2)}$ gehörende Teilmenge $P_j^{(2)}$ so wählen daß $(S - s) \cdot T^{(2)}\{M^{(2)} - \sum_{j=1}^{n} P_j^{(2)}\}$ kleiner als ε ist. Dann werden jedoch die Summen

$$\sum_{j=1}^{n} s_j \cdot T^{(2)}(P_j^{(2)}) + s_{n+1} \cdot T^{(2)}\left\{M^{(2)} - \sum_{j=1}^{n} P_j^{(2)}\right\}$$

und

$$\sum_{j=1}^{n} S_j \cdot T^{(2)}(P_j^{(2)}) + S_{n+1} \cdot T^{(2)}\left\{M^{(2)} - \sum_{j=1}^{n} P_j^{(2)}\right\}$$

um weniger als 2ε von dem geometrischen Integral $\int\limits_{M^{(2)}} h(x^{(2)})\, d\, T^{(2)}$ abweichen; hierbei sind s_j, S_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ untere bzw. obere Schranke von h auf $P_j^{(2)}$, s_{n+1} und S_{n+1} untere bzw. obere Schranke von h auf $M^{(2)} - \sum_{j=1}^{n} P_j^{(2)}$. Daraus folgt die Integrierbarkeit im Youngschen Sinne und die Gleichheit der $T^{(2)}$-Integrale von $h(x^{(2)})$; auch $u(x^{(2)})$ wird dadurch über $M^{(2)}$ ein „Youngsches $T^{(2)}$-Integral gleich ihrem geometrischen $T^{(2)}$-Integral haben.

Daß der Satz auch gültig bleibt, wenn man nur annimmt, daß $M^{(2)}$ zu $K_4^{(2)}$ gehört, läßt sich auf Grund der Beschränktheit der Funktionen leicht aus dem vorigen ableiten.

§ 20. ***Satz XXX.*** *Damit eine Funktion $u(x^{(2)})$, beschränkt auf der zu $K_4^{(2)}$ gehörenden Menge $M^{(2)}$, ein $f^{(2)}$-Integral über $M^{(2)}$ habe, ist notwendig und hinreichend, daß es zu jedem positiven ε eine Überdeckung von $M^{(2)}$ durch endlich viele, einander fremde und zu $K_2^{(2)}$ gehörende Mengen $\{P_i^{(2)}\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ gibt derart daß die Summe derjenigen Mengen $\{P_i^{(2)}\}$, zu deren jeder die Oszillation von $u(x^{(2)})$ auf $P_i^{(2)} \cdot M^{(2)} \geqq \varepsilon$ ist, ein beliebig kleines $T^{(2)}$-Maß hat.*

Der Beweis beruht auf die Anwendung der Youngschen Definition des $f^{(2)}$-Integrals.

§ 21. B e i s p i e l e. Wenn $R^{(2)}$ der n-dimensionale Euklidische Raum ist und die Mengenklassen $K_2^{(2)}, \ldots, K_5^{(2)}$ in $R^{(2)}$ und die zugehörigen Mengenfunktionen $f^{(2)}(B^{(2)})$ wie in den Beispielen von § 6 gewählt sind, so wird der in diesem Kapitel eingeführte „Riemannsche“ Integral eine Erweiterung sein entweder des gewöhnlichen Riemannschen Integrals oder des in unserer Arbeit: Prace mat.-fiz. 41 (1933), S. 65—95 für den linearen Raum behandelten Riemann-Stieltjesschen Integrals (in bezug auf α) (vgl. § 12) [31].

§ 22. Die Überlegungen der §§ 16—20 brauchen nur wenig geändert zu werden um zum „Lebesgue“-Integral im abstrakten Raume $R^{(2)}$ zu gelangen.

$K_2^{(2)}$ sei ein „in bezug auf sich beschränkter“ σ-Körper in $R^{(2)}$ und $f^{(2)}$ eine für die Mengen von $K_2^{(2)}$ definierte, total-additive Mengenfunktion. Dann lassen sich Mengenklassen $K_3^{(2)}$, $K_4^{(2)}$, $K_5^{(2)}$ und Maßfunktionen $m_{f^{(2)}}$, $m_{T^{(2)}}$ einführen, welche die in § 8 behandelten Eigenschaften haben. Die im linearen Raume $R^{(1)}$ betrachteten Mengenklassen und Maßfunktionen mögen wie in § 16 gewählt sein.

Die Betrachtungen von §§ 10 und 11 führen nun, ebenso wie in dem in § 16 betrachteten Fall, zu Mengenkörpern $\mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_5$ in $R^{(1)} \times R^{(2)}$ und dabei gehörenden, beschränkt additiven Mengenfunktionen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{T}$ und beschränkt additiven Maßfunktionen $m_{\mathfrak{F}}$ usw.

Die Sätze XXIV und XXV (nebst Folgerung) behalten ihre Gültigkeit.

Läßt man den Wortlaut der Definitionen in den §§ 17—19 ungeändert (nur lese man „Lebesgue“ anstatt „Riemann“), so bleiben auch alle Sätze der §§ 17—20 gültig.

Wir bemerken, daß zufolge der Eigenschaft von $K_4^{(2)}$ einen in bezug auf $K_2^{(2)}$ beschränkten σ-Körper zu sein, *die* in der Definition der $f^{(2)}$-Meßbarkeit einer Funktion $u(x^{(2)})$, welche auf einer Menge $M^{(2)} \epsilon K_4^{(2)}$ beschränkt ist, *zugelassene abzählbare Ausnahmemenge immer leer sein wird.* Dadurch ist es möglich diese Definition die in der Theorie des gewöhnlichen Lebesgueschen Integrals übliche Form zu geben.

§ 23. Beispiele. Wenn $R^{(2)}$ der n-dimensionale Euklidische Raum ist, in welchem man die in § 9 betrachteten Mengenklassen

[31]) Wenn man sich zu eigentlichen „Riemann“-Integralen beschränkt, so erhält man genau die (eigentlichen) Riemann-Integrale oder die Riemann-Stieltjesschen Integrale aus der im Texte zitierten Arbeit.

Spezialfälle des Satzes XXX liefern die bekannte Lebesguesche notwendige und hinreichende Bedingung für Riemann-Integrierbarkeit und Satz V der zitierten Arbeit.

und Funktionen eingeführt denkt, so führen die Betrachtungen des vorigen Paragraphen entweder zum Lebesgueschen oder zum Lebesgue-Stieltjeschen [32]) Integrale in n-dimensionalen Raum.

IV. Eigenschaften der „Riemann“- und der „Lebesgue“-Integrale.

§ 24. Wir beschränken uns auf die Behandlung von Eigenschaften der eigentlichen „Riemann“-Integrale; es wäre nicht schwer zu untersuchen inwieweit die hier folgenden Sätze auch für uneigentliche Integrale ihre Gültigkeit behalten.

Da die Beweise der ersten vier, hier folgenden Eigenschaften des „Riemannschen“ $f^{(2)}$-Integrals sich in leicht ersichtlicher Weise durch Umformung von Beweisen finden lassen der übereinstimmenden Sätze beim R- oder L-Integral im Euklidischen Raum, lassen wir diese Beweise fort.

Satz XXXI. *Wenn $u(x^{(2)})$ beschränkt und $f^{(2)}$-integrierbar („R“) ist über die Menge $M^{(2)} \epsilon K_4^{(2)}$, so wird sie es auch sein über jede Menge $N^{(2)}$ mit $N^{(2)} \subset M^{(2)}$ und $N^{(2)} \epsilon K_4^{(2)}$.*

Satz XXXII. *Wenn $u(x^{(2)})$ beschränkt und $f^{(2)}$-integrierbar („R“) ist über endlich viele einander fremde Mengen $\{M_j^{(2)}\} \epsilon K_4^{(2)}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, so wird sie es auch sein über die Menge $M^{(2)} \equiv \sum_{(j)} M_j^{(2)}$ und es ist dann*

$$\int_{M^{(2)}} u(x^{(2)})\, d f^{(2)} = \sum_{(j)} \int_{M_j^{(2)}} u(x^{(2)})\, d f^{(2)}.$$

Satz XXXIII. *Wenn $u(x^{(2)})$ und $v(x^{(2)})$ beschränkt und $f^{(2)}$-integrierbar („R“) sind über $M^{(2)} \epsilon K_4^{(2)}$, so gibt dasselbe für ihre Summe, Differenz und Produkt; und es ist:*

$$\int_{M^{(2)}} (u \pm v)\, d f^{(2)} = \int_{M^{(2)}} u\, d f^{(2)} \pm \int_{M^{(2)}} v\, d f^{(2)} \text{ [33]}).$$

[32]) Siehe z. B. Lebesgue, Leçons sur l'intégration, Deuxième Ed. (1928). Chap. 11.

[33]) Zum Beweise vergleiche man Schlesinger und Plessner, Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen (1926), S. 89, 90 und Kamke, Das Lebesguesche Integral (1925), S. 102, 103.

Satz XXXIV. *Wenn $u(x^{(2)})$ und $v(x^{(2)})$ über $M^{(2)} \epsilon K_4^{(2)}$ beschränkt und $f^{(2)}$-integrierbar ($_nR^u$) sind und $|v(x^{(2)})|$ auf $M^{(2)}$ oberhalb einer festen positiven Schranke liegt, so wird auch $\frac{u(x^{(2)})}{v(x^{(2)})}$ über $M^{(2)}$ $f^{(2)}$-integrierbar ($_nR^u$) sein (im eigentlichen Sinne)* [33].

Satz XXXV. *Damit die für die Punkte einer Menge $M^{(2)} \epsilon K_4^{(2)}$ definierte, auf $M^{(2)}$ beschränkte Funktion $u(x^{(2)})$ über* j e d e *Menge $E^{(2)} \subset M^{(2)}$ und $\epsilon K_4^{(2)}$ ein $T^{(2)}$-Integral gleich Null habe, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes positive η die Teilmenge von $M^{(2)}$, in deren Punkten $|u(x^{(2)})| \geqq \eta$ ist, ein $T^{(2)}$-Maß Null habe; $T^{(2)}$ ist die Totalvariation von $f^{(2)}$.*

Der Beweis folgt mit Hilfe der Lebesgue-Radonschen Definition des $T^{(2)}$-Integrals (siehe Satz XXVII):

Aus Satz XXXV folgt nun der

Satz XXXVI. *Damit zwei auf einer Menge $M^{(2)} \epsilon K_4^{(2)}$ beschränkte Funktionen u, v über* j e d e *Menge $E^{(2)} \subseteq M^{(2)}$ und $\epsilon K_4^{(2)}$ $T^{(2)}$-Integrale von gleichem Werte haben, ist notwendig und hinreichend daß entweder u oder v über $M^{(2)}$ $T^{(2)}$-integrierbar ($_nR^u$) sei und daß für jedes positive η die Teilmenge $P^{(2)}[|u-v| \geqq \eta]$ von $M^{(2)}$ ein $T^{(2)}$-Maß Null habe. Es werden dann auch die $f^{(2)}$-Integrale von u und v über jede derartige Menge $E^{(2)}$ den gleichen Wert haben.*

Satz XXXVII. *Wenn jede der Funktionen einer Folge $\{u_n(x^{(2)})\}$, welche auf der Menge $M^{(2)} \epsilon K_4^{(2)}$ gleichmäßig gegen die Funktion $u(x^{(2)})$ konvergiert, beschränkt und $f^{(2)}$-integrierbar ($_nR^u$) über $M^{(2)}$ ist, so wird auch $u(x^{(2)})$ $f^{(2)}$-integrierbar ($_nR^u$) sein, und man hat:*

$$(37) \qquad \int_{M^{(2)}} u \cdot df^{(2)} = \lim_{n\to\infty} \int_{M^{(2)}} u_n \cdot df^{(2)}.$$

Die Existenz des Integrals von u folgt aus Satz XXX. Der übrige Teil des Beweises ist evident.

Satz XXXVIII. N i c h t *für alle in abstrakten Räumen $R^{(2)}$ definierten Körper $K_2^{(2)}$ und dazu gehörige Mengenfunktionen $f^{(2)}$ wird es möglich sein, daß aus der Konvergenz einer Folge $\{u_n(x^{(2)})\}$ auf einer zu $K_4^{(2)}$ gehörenden Menge $M^{(2)}$ gegen eine Funktion $u(x^{(2)})$ und aus der $f^{(2)}$-Integrierbarkeit ($_nR^u$) im eigentlichen Sinne der Funktionen $\{u_n(x^{(2)})\}$ und $u(x^{(2)})$ immer die Gleichheit (37) folgen wird.*

B e w e i s. Aus § 6 folgt, daß man in n-dimens. Eukl. Räume den Körper aller Teilmengen dieses Raumes betrachten kann als einen Körper K_2 und daneben als den mittels der beschränkt additiven Mengenfunktion $\mu(E)$ (siehe § 6) zu K_2 gehörenden Erweiterungskörper K_4. Alle Mengen dieses Raumes sind somit μ-meßbar. Die Betrachtungen des dritten Kapitels zeigen, wenn $R^{(1)}$ der Raum der reellen Zahlen, $R^{(2)}$ der n-dimens. Eukl. Raum ist, daß a l l e diejenigen Funktionen des n-dimens. Raumes, deren jede auf ihrer Existenzmenge beschränkt ist, über Ihre Existenzmengen und über alle Teilmengen μ-integrierbar ($_nR^u$) sind (siehe Satz XXVII). Für die charakteristische Funktion einer jeden Menge E des n-dimens. Raumes wird der Integralwert über jede E umfassende Menge mit $\mu(E)$ zusammenfallen. Wäre somit Satz XXVIII unrichtig, so wäre immer für einander fremde Mengen $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ von $R^{(2)}$:

$$\mu(E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots) = \sum_{(n)} \mu(E_n).$$

Dies widerspricht jedoch den schon in § 6 zitierten Satz von B a n a c h und K u r a t o w s k i.

B e m e r k u n g. Im Beweise des letzten Satzes bemerkten wir u. m. daß jede für alle Punkte des n-dimens. Raumes R_n definierte, nicht-negative und beschränkte Funktion über jede Teilmenge von R_n μ-integrierbar ($_nR^u$) ist. Das μ-Integral ($_nR^u$) einer derartigen, fest gewählten Funktion über alle Teilmengen von R_n besitzt die gleichen Eigenschaften 1°, 2° und 4° wie die Mengenfunktion $\mu(E)$ (siehe § 6). Aus der Eigenschaft des μ-Maßes entweder für jede L-meßbare Teilmenge von

$$K(0 \leqq x_1 < 1;\ 0 \leqq x_2 < 1; \ldots;\ 0 \leqq x_n < 1)$$

mit dem L-Maße dieser Menge oder für jede nach Jordan meßbare Teilmenge von K mit ihrem Jordanschen Maße zusammenzufallen, folgt, daß man leicht unendlich viele, im ganzen Raume R_n definierte, beschränkte und nicht negative Punktfunktionen angeben kann derart daß die μ-Integrale ($_nR^u$) dieser Funktionen über die Teilmengen von R_n *unendlich viele, voneinander verschiedene, beschränkt additive Maßfunktionen* liefern, *definiert für alle Teilmengen des R_n*; wir betrachten dabei Maßfunktionen, welche sich nur um einen multiplikativen Faktor voneinander unterscheiden, als identisch [16].

§ 25. *Ausgehend von einem „in bezug auf sich beschränkten" σ-Körper $K_2^{(2)}$ in $R^{(2)}$ und einer für die Mengen von $K_2^{(2)}$ definierten, total-additiven Mengenfunktion $f^{(2)}$*, läßt sich, wie in § 22, ein „Lebesguesches" Integral einführen.

In den hier folgenden Eigenschaften darf das Integral sowohl eigentlich wie uneigentlich sein.

Satz XXXIX. *Wenn $u(x^{(2)})$ $f^{(2)}$-integrierbar („L") ist über die Menge $M^{(2)} \in K_5^{(2)}$, so wird sie es auch sein über jede Menge $N^{(2)}$ mit $N^{(2)} \subset M^{(2)}$ und $N^{(2)} \in K_5^{(2)}$.*

Satz XL. *Wenn $u(x^{(2)})$ $f^{(2)}$-integrierbar („L") ist über abzählbar viele einander fremde Mengen $\{M_j^{(2)}\} \in K_5^{(2)}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ und*

$$\sum_{(j)} \int_{M_j^{(2)}} u(x^{(2)})\, d\, T^{(2)}$$

konvergiert ($T^{(2)}$ ist die Totalvariation von $f^{(2)}$), so wird $u(x^{(2)})$ auch $f^{(2)}$-integrierbar („L") sein über $M^{(2)} = \sum\limits_{(j)} M_j^{(2)}$ und es ist dann:

$$\int_{M^{(2)}} u(x^{(2)})\, d f^{(2)} = \sum_{(j)} \int_{M_j^{(2)}} u(x^{(2)})\, d f^{(2)}. \tag{38}$$

Umgekehrt, folgt auch aus der Existenz von $\int\limits_{M^{(2)}} u(x^{(2)})\, d f^{(2)}$ die Gültigkeit von (38) *(und die Konvergenz von $\sum\limits_{(j)} \int\limits_{M_j^{(2)}} u(x^{(2)})\, d\, T^{(2)}$)* [34].

Definition. $u(x^{(2)})$, definiert auf einer Menge $M^{(2)} \in K_5^{(2)}$, wird *auf $M^{(2)}$ $f^{(2)}$-meßbar („L")* sein, wenn für jeden reellen $x^{(1)}$-Wert die Punkte $\{x^{(2)}\}$ von $M^{(2)}$ mit $u(x^{(2)}) \geqq x^{(1)}$ eine Menge $\in K_5^{(2)}$ bilden.

[34]) Der Beweis verläuft, unter Anwendung der Lebesgne-Radonschen Definition des eigentlichen „L"-Integrals, analog an dem Beweise bei de la Vallée Poussin, l. c. [13]), S. 51. — Wir bemerken, daß man eine mit der im Texte Gegebenen völlig aequivalenten geometrischen Definition des „L"-Integrals erhält, wenn man in § 22 anstatt der daselbst benutzten Mengenklassen und Maßfunktionen des linearen Raumes $R^{(1)}$ diejenigen betrachtet, welche in § 9, Beispiel 1 angegeben wurden, und zwar mit $n = 1$. Die Betrachtungen der §§ 13 und 14 zeigen dann, daß $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{T}$ und die zugehörigen Maßfunktionen $m_{\mathfrak{F}}$ u. s. w. (im erweiterten Körper $\mathfrak{K}_5$) total-additiv sind. Beim Beweise der Aequivalenz beider geometrischer Definitionen beachte man speziell den Inhalt der Fußn. 26. Auch ausgehend von dieser neuen Definition läßt sich Satz XL nun leicht beweisen.

Satz XLI. *Wenn $u(x^{(2)})$ ein $f^{(2)}$-Integral („L") hat über $M^{(2)} \in K_5^{(2)}$, so wird $u(x^{(2)})$ $f^{(2)}$-meßbar („L") sein auf $M^{(2)}$.*

Satz XLII. *Die Summe, die Differenz und das Produkt zweier auf der Menge $M^{(2)} \in K_5^{(2)}$ endlicher Funktionen, $f^{(2)}$-meßbar („L"), sind wieder $f^{(2)}$-meßbar („L") auf $M^{(2)}$. Auch ihr Quotient wird $f^{(2)}$-meßbar („L") sein, wenn nur der Nenner nirgends gleich Null wird.*

Satz XLIII. *Wenn u und v $f^{(2)}$-integrierbar („L") sind über $M^{(2)} \in K_5^{(2)}$, so gilt dasselbe für ihre Summe und Differenz; und es ist*

$$\int_{M^{(2)}} (u \pm v)\, d f^{(2)} = \int_{M^{(2)}} u\, d f^{(2)} \pm \int_{M^{(2)}} v\, d f^{(2)}\ ^{35}).$$

Satz XLIV. *Damit zwei auf einer Menge $M^{(2)} \in K_5^{(2)}$ definierte Funktionen u, v über jede Menge $E^{(2)} \subseteqq M^{(2)}$ und $\in K_5^{(2)}$ $T^{(2)}$-Integrale („L") von gleichem Werte haben, ist notwendig und hinreichend daß entweder u oder v über $M^{(2)}$ $T^{(2)}$-integrierbar („L") sei und daß die Teilmenge von $M^{(2)}$, in deren Punkten $u \neq v$ ist, ein $T^{(2)}$-Maß („L") gleich Null habe. Es werden dann auch die $f^{(2)}$-Integrale („L") von u und v über jede derartige Menge $E^{(2)}$ den gleichen Wert haben.*

Satz XLV. *Sind auf $M^{(2)} \in K_5^{(2)}$ die Funktionen der konvergenten Folge $\{u_n\}$ $f^{(2)}$-meßbar („L"), so gilt dasselbe von der Grenzfunktion u.*

Satz XLVI. *Sind die Funktionen $\{u_n\}$ $f^{(2)}$-integrierbar („L") auf $M^{(2)} \in K_5^{(2)}$ und gibt es außerdem auf $M^{(2)}$ eine Funktion Ψ, $f^{(2)}$-integrierbar („L"), mit*

$$|u_n| \leqq \Psi$$

für jede natürliche Zahl n, so wird auch die (existierend gedachte) Grenzfunktion u über $M^{(2)}$ $f^{(2)}$-integrierbar („L") sein und es ist

$$\int_{M^{(2)}} u\, d f^{(2)} = \lim_{n \to \infty} \int_{M^{(2)}} u_n\, d f^{(2)}\ ^{36}).$$

[35]) In denjenigen Punkten wo Summe bzw. Differenz unbestimmt sind, kann man willkürliche Werte für sie annehmen. Zum Beweise vergleiche man de la Vallée Poussin, l. c. [13]), S. 51, 52.

[36]) Zum Beweise vergleiche man de la Vallée Poussin, l. c. [13]), S. 53.

Es wird nun deutlich sein, daß eine zum σ-Körper $K_2^{(2)}$ in $R^{(2)}$ und zur total-additiven Mengenfunktion $f^{(2)}$ gehörende Hilfsintegration von der in Fußn. 26 betrachteten Art immer ein Spezialfall der zugehörigen „Lebesgue"-Integration sein wird.

Für Totalstetigkeits- und Differentiationseigenschaften des $f^{(2)}$-[$T^{(2)}$-] Integrals („L") vergleiche man die Betrachtungen auf den Seiten 255—257 der l. c. [8]) genannten Saksschen Monographie.

Aus den Definitionen der Kapitel I und III und dem Satze XXVII (für „R"- und für „L"-Integrale) läßt sich unmittelbar folgern der

Satz XLVII. *Wenn $f^{(2)}$ beschränkt-additiv ist für die Mengen eines Körpers $K_2^{(2)}$ und total-additiv für die Mengen eines $K_3^{(2)}$ umfassenden, in bezug auf sich beschränkten σ-Körpers $K_2^{(2)*}$, so wird der zu $K_3^{(2)}$ gehörende Körper $K_4^{(2)}$ umfaßt von dem zu $K_2^{(2)*}$ gehörenden und in bezug auf $K_2^{(2)*}$ beschränkten σ-Körper $K_4^{(2)*}$ und jedes $f^{(2)}$-Integral („R") einer Funktion u über eine Menge $M^{(2)} \in K_4^{(2)}$ ist zugleich ein $f^{(2)}$-Integral („L") von u über $M^{(2)}$.*

Wenn es außerdem zu jeder Menge $M^{(2)} \in K_2^{(2)*}$ eine Menge $N^{(2)} \supseteqq M^{(2)}$ und $\in K_2^{(2)}$ gibt, so wird das $f^{(2)}$ Integral („R") einer Funktion u über eine Menge $\in K_3^{(2)}$ auch ihr $f^{(2)}$-Integral („L") über diese Menge sein.

Aus § 7 geht hervor, daß es nicht immer zu einem Körper $K_2^{(2)}$, wie in Satz XLVII betrachtet, eine Mengenklasse $K_2^{(2)*}$, wie in der ersten Hälfte dieses Satzes definiert, geben kann.

V. Das Doppelintegral im Produktraume $R^{(1)} \times R^{(2)}$.

§ 26. Definitionen. Bei der § 17 schon benutzten Bedeutung der Buchstaben sei für jede nicht-negative, beschränkte Funktion $u(x^{(2)})$:

$$\overline{\int}_{M^{(2)}} u(x^{(2)})\, df^{(2)} \equiv \overline{\int}_{M^{(2)}} u(x^{(2)})\, dG^{(2)} - \underline{\int}_{M^{(2)}} u(x^{(2)})\, d|g^{(2)}|$$

und

$$\underline{\int}_{M^{(2)}} u(x^{(2)})\, df^{(2)} \equiv \underline{\int}_{M^{(2)}} u(x^{(2)})\, dG^{(2)} - \overline{\int}_{M^{(2)}} u(x^{(2)})\, d|g^{(2)}|.$$

Für jede beschränkte, übrigens willkürliche Funktion $u(x^{(2)})$ sei

$$\overline{\int}_{M^{(2)}} u(x^{(2)})\, df^{(2)} \equiv \overline{\int}_{M^{(2)}} u^+\, df^{(2)} - \underline{\int}_{M^{(2)}} u^-\, df^{(2)}$$

und

$$\underline{\int}_{M^{(2)}} u(x^{(2)})\, df^{(2)} \equiv \underline{\int}_{M^{(2)}} u^+\, df^{(2)} - \overline{\int}_{M^{(2)}} u^-\, df^{(2)}.$$

Satz XLVIII. *$R^{(1)}$, $f^{(1)}$, $K_2^{(1)}$, $K_3^{(1)}$, u. s. w.; $R^{(2)}$, $f^{(2)}$, $K_2^{(2)}$, $K_3^{(2)}$, u. s. w.; $R^{(1)} \times R^{(2)}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$, u. s. w. mögen dieselbe Bedeutung haben wie in den §§ 10 und 11.*

Wenn dann $f^{(1)}$ und $f^{(2)}$ außerdem nicht negativ *sind und eine für die Punkte einer Menge $\mathfrak{M} \in \mathfrak{K}_4$ definierte Funktion $u(x^{(1)}, x^{(2)})$ beschränkt und $\mathfrak{F}$-integrierbar („R") ist über $\mathfrak{M}$, so wird*

$$\int_{\mathfrak{M}} u(x^{(1)}, x^{(2)})\, d\mathfrak{F} = \int_{P^{(1)}} df^{(1)} \cdot \overline{\int}_{P^{(2)}_{x^{(1)}}} u(x^{(1)}, x^{(2)})\, df^{(2)} \tag{39}$$

sein. Hierbei deutet $P^{(1)}$ eine Menge $\in K_1^{(2)}$ an derart, daß jeder *Punkt $\xi^{(1)}$ von $R^{(1)}$ zu ihr gehört, für den der Durchschnitt $P^{(2)}_{\xi^{(1)}}$ von $\mathfrak{M}$ mit der Menge derjenigen Punkte von $R^{(1)} \times R^{(2)}$, für die $x^{(1)} = \xi^{(1)}$ ist, nicht leer ist; $\overline{\int}$ und $\underline{\int}$ deuten obere bzw. untere „Riemann"-Integrale an* [37]).

Beweis. Zu jeder Menge $\mathfrak{M} \in \mathfrak{K}_4$ gibt es immer eine Menge $P^{(1)} \times P^{(2)} \supseteqq \mathfrak{M}$ mit $P^{(1)} \in K_2^{(1)}$ und $P^{(2)} \in K_2^{(2)}$. Die für die Punkte von $\mathfrak{M}$ definierte Funktion $u(x^{(1)}, x^{(2)})$ besitze ein eigentliches $\mathfrak{F}$-In-

[37]) Wenn $f^{(1)}$ und $f^{(2)}$ nicht immer $\geqq 0$ zu sein brauchen, läßt sich demnoch folgendes zeigen. Ausgehend von den Totalvariationen $T^{(1)}$, $T^{(2)}$ von $f^{(1)}$ bzw. $f^{(2)}$ und von einer für die Mengen von $\mathfrak{K}_2$ in gleicher Weise aus $T^{(1)}$, $T^{(2)}$ hergeleiteten Mengenfunktion $\mathfrak{T}^*$ wie $\mathfrak{F}$ aus $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ folgte, lassen sich zu $\mathfrak{T}^*$ gehörende Mengenklassen $\mathfrak{K}_3^* [= \mathfrak{K}_3]$, $\mathfrak{K}_4^* [\subseteqq \mathfrak{K}_4]$ bilden. *Dann wird sich für jede Menge $\mathfrak{M} \in \mathfrak{K}_4^*$ aus der Beschränktheit und $\mathfrak{T}^*$-Integrierbarkeit („R") einer auf $\mathfrak{M}$ definierten Funktion $u(x^{(1)}, x^{(2)})$ folgern lassen:*

$$\int_{\mathfrak{M}} u \cdot d(G^{(1)} \cdot f^{(2)}) + \int_{\mathfrak{M}} u \cdot d(g^{(1)} \cdot f^{(2)}) = \int_{P^{(1)}} df^{(1)} \overline{\int}_{P^{(2)}_{x^{(1)}}} u \cdot df^{(2)} =$$

$$= \int_{P^{(2)}} df^{(2)} \overline{\int}_{P^{(1)}_{x^{(2)}}} u \cdot df^{(1)} = \int_{\mathfrak{M}} u \cdot d(G^{(2)} \cdot f^{(1)}) + \int_{\mathfrak{M}} u \cdot d(g^{(2)} \cdot f^{(1)}).$$

Dabei deutet z. B. $(G^{(1)} \cdot f^{(2)})$ die aus dem Produkte $G^{(1)} \cdot f^{(2)}$ hervorgehende, für die Mengen $\in \mathfrak{K}_2$ definierte, beschränkt additive Mengenfunktion an; $P^{(1)}$ hat eine Bedeutung wie im obigen Satze, $P^{(2)}$ eine damit analoge. — Wenn für $x^{(1)}$ in $P^{(1)}$ die Menge $P^{(2)}_{x^{(1)}}$ leer ist, nehme man $\overline{\int}_{P^{(2)}_{x^{(1)}}}$ gleich Null.

tegral („R^u“) über $\mathfrak{M}$. Wenn man $u=0$ setzt in den nicht zu $\mathfrak{M}$ gehörenden Punkten von $P^{(1)}\times P^{(2)}$, so wird

$$\int\limits_{\mathfrak{M}} u\cdot d\mathfrak{F}=\int\limits_{P^{(1)}\times P^{(2)}} u\cdot d\mathfrak{F} \tag{40}$$

sein. Zu willkürlich positivem η gibt es, nach § 19, eine Zerlegung von $P^{(1)}\times P^{(2)}$ in endlich viele Mengen $\mathfrak{P}_i \in \mathfrak{K}_2$ $(i=1,2,\dots,n)$ derart, daß, wenn S_i^+ und s_i^+ obere bzw. untere Schranke sind von u^+ auf $\mathfrak{P}_i$, S_i^- und s_i^- obere bzw. untere Schranke von u^- auf $\mathfrak{P}_i$,

$$\int\limits_{P^{(1)}\times P^{(2)}} u^+ d\mathfrak{F}-\eta<\sum_{i=1}^{n} s_i^+\cdot\mathfrak{F}(\mathfrak{P}_i)\leqq\sum_{i=1}^{n} S_i^+\cdot\mathfrak{F}(\mathfrak{P}_i)<\int\limits_{P^{(1)}\times P^{(2)}} u^+ d\mathfrak{F}+\eta \tag{41}$$

und

$$\int\limits_{P^{(1)}\times P^{(2)}} u^- d\mathfrak{F}-\eta<\sum_{i=1}^{n} s_i^-\cdot\mathfrak{F}(\mathfrak{P}_i)\leqq\sum_{i=1}^{n} S_i^-\cdot\mathfrak{F}(\mathfrak{P}_i)<\int\limits_{P^{(1)}\times P^{(2)}} u^- d\mathfrak{F}+\eta \tag{42}$$

ist. Nach Satz XXI läßt sich für jedes $i=1,2,\dots,n$ schreiben:

$$\mathfrak{P}_i=\sum_{j=1}^{k_i} A_j^{(i)}\times B_j^{(i)}$$

mit $A_j^{(i)}\in K_2^{(1)}$, $B_j^{(i)}\in K_2^{(2)}$ $(j=1,2,\dots,k_i)$ und $(A_{j_1}^{(i)}\times B_{j_1}^{(i)})\cdot(A_{j_2}^{(i)}\times B_{j_2}^{(i)})$ leer $(j_1,j_2=1,2,\dots,k_i;\ j_1\neq j_2)$. Statt (41) kann man somit auch schreiben:

$$\begin{aligned}\int\limits_{P^{(1)}\times P^{(2)}} u^+ d\mathfrak{F}-\eta&<\sum_{i=1}^{n} s_i^+\cdot\sum_{j=1}^{k_i} f^{(1)}(A_j^{(i)})\times f^{(2)}(B_j^{(i)})\leqq\\&\leqq\sum_{i=1}^{n} S_i^+\cdot\sum_{j=1}^{k_i} f^{(1)}(A_j^{(i)})\times f^{(2)}(B_j^{(i)})<\int\limits_{P^{(1)}\times P^{(2)}} u^+ d\mathfrak{F}+\eta.\end{aligned} \tag{43}$$

Für jeden Punkt $\xi^{(1)}$ von $P^{(1)}$ werden alle Punkte $(\xi^{(1)},x^{(2)})$ von $P^{(1)}\times P^{(2)}$ zu endlich vielen der Mengen $\{A_j^{(i)}\times B_j^{(i)}\}$ gehören; es seien dies die Mengen $\{A_{p(\xi^{(1)})}\times B_{p(\xi^{(1)})}\}$. Dann sieht man leicht, daß für die zugehörigen $\{s^+_{p(\xi^{(1)})}\}$ und $\{S^+_{p(\xi^{(1)})}\}$ gelten wird:

$$\begin{aligned}\sum_{(p)} s^+_{p(\xi^{(1)})}\cdot f^{(2)}(B_{p(\xi^{(1)})})&\leqq\underline{\int\limits_{P^{(2)}}} u^+(\xi^{(1)},x^{(2)})\,df^{(2)}\leqq\overline{\int\limits_{P^{(2)}}} u^+(\xi^{(1)},x^{(2)})\,df^{(2)}\leqq\\&\leqq\sum_{(p)} S^+_{p(\xi^{(1)})}\cdot f^{(2)}(B_{p(\xi^{(1)})}).\end{aligned}$$

Daraus läßt sich ableiten:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} s_i^+\cdot\sum_{j=1}^{k_i} f^{(1)}(A_j^{(i)})\times f^{(2)}(B_j^{(i)})&\leqq\underline{\int\limits_{P^{(1)}}} df^{(1)}\underline{\int\limits_{P^{(2)}}} u^+ df^{(2)}\leqq\\\leqq\overline{\int\limits_{P^{(1)}}} df^{(1)}\overline{\int\limits_{P^{(2)}}} u^+ df^{(2)}&\leqq\sum_{i=1}^{n} S_i^+\cdot\sum_{j=1}^{k_i} f^{(1)}(A_j^{(i)})\times f^{(2)}(B_j^{(i)}).\end{aligned} \tag{44}$$

Aus (43) und (44) folgt, da η willkürlich ist, daß man hat:

$$\int\limits_{P^{(1)}\times P^{(2)}} u^+ d\mathfrak{F}=\int\limits_{P^{(1)}} df^{(1)}\overline{\int\limits_{P^{(2)}}} u^+ df^{(2)}=\int\limits_{P^{(1)}} df^{(1)}\underline{\int\limits_{P^{(2)}}} u^+ df^{(2)}.$$

(42) führt zu einer analogen Relation für u^-. Mit Hilfe von (40) erhalten wir schließlich:

$$\int\limits_{\mathfrak{M}} u\,d\mathfrak{F}=\int\limits_{P^{(1)}} df^{(1)}\overline{\int\limits_{P^{(2)}}} u\,df^{(2)}=\int\limits_{P^{(1)}} df^{(1)}\underline{\int\limits_{P^{(2)}}} u\,df^{(2)},$$

wofür sich (39) schreiben läßt [38].

Ein Spezialfall des letzten Satzes erhält man, wenn $u(x^{(1)},x^{(2)})$ die charakteristische Funktion der Menge $\mathfrak{M}$ ist; $\overline{\int}_{P^{(2)}_{x^{(1)}}} u\,df^{(2)}$ und $\underline{\int}_{P^{(2)}_{x^{(1)}}} u\,df^{(2)}$ sind dann das obere bzw. untere $f^{(2)}$-Maß von $P^{(2)}_{x^{(1)}}$ und die Menge $\mathfrak{M}$ hat ein $\mathfrak{F}$-Maß gleich $\int_{\mathfrak{M}} u\,d\mathfrak{F}$.

[38]) Durch Anwendung der in den §§ 10—12 entwickelten Theorie des beschränkt additiven Maßes in Produkträumen $\{R^{(1)}\times R^{(2)}\}$ gelangt man auch zu einem Maße in Produkträumen von endlich vielen Räumen $\{R^{(i)}\}$. Dabei läßt sich zeigen, daß die erhaltenen Maßzahlen unabhängig sind von der Folge, in der man die Räume „multipliziert“. Als Erweiterung des Satzes XLVIII erhält man dann im Falle daß die Maßfunktionen in den einzelnen Räumen $\{R^{(i)}\}$ nicht-negativ sind, *die Reduktion jedes eigentlichen „Riemann“-Integrals im Produktraume* $R^{(1)}\times R^{(2)}\times\dots\times R^{(n)}$ *zu einem n-fach iterierten Integrale.*

§ 27. Man definiere die oberen und unteren „L"-Integrale in gleichartiger Weise wie die oberen und unteren „R"-Integrale in § 26. Dann wird der Beweis des folgenden Satzes, unter Anwendung der in Fußn. 26 enthaltenen Bemerkung über $\mathfrak{F}(M)$, durch Nachbildung des Beweises von Satz XLVIII erhalten.

Satz XLIX. *$R^{(1)}, f^{(1)}, K_2^{(1)}, K_3^{(1)}$, u. s. w.; $R^{(2)}, f^{(2)}, K_2^{(2)}, K_3^{(2)}$, u. s. w.; $R^{(1)}\times R^{(2)}, \mathfrak{F}, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3$, u. s. w. mögen dieselbe Bedeutung haben wie in den §§ 13 und 14.*

Wenn dann $f^{(1)}$ und $f^{(2)}$ außerdem nicht-negativ *sind und eine für die Punkte einer Menge $\mathfrak{M}\in\mathfrak{K}_4$ definierte Funktion $u(x^{(1)}, x^{(2)})$ beschränkt und $\mathfrak{F}$ integrierbar („L") ist über $\mathfrak{M}$, so wird*

$$\int_{\mathfrak{M}} u(x^{(1)}, x^{(2)})\, d\mathfrak{F} = \int_{P^{(1)}} df^{(1)} \cdot \int_{P^{(2)}_{x^{(1)}}} u(x^{(1)}, x^{(2)})\, df^{(2)} \tag{45}$$

sein. Hierbei deutet $P^{(1)}$ eine Menge $\in K_3^{(1)}$ an derart, daß jeder *Punkt $\xi^{(1)}$ von $R^{(1)}$ zu ihr gehört, für den der Durchschnitt $P^{(2)}_{\xi^{(1)}}$ von $\mathfrak{M}$ mit der Menge derjenigen Punkte von $R^{(1)}\times R^{(2)}$, für die $x^{(1)}=\xi^{(1)}$ ist, nicht leer ist.*

Die im zweiten Gliede von (45) vorkommenden, oberen und unteren „Lebesgue"-Integrale sind einander gleich in den Punkten von $P^{(1)}$, eine Menge vom $f^{(1)}$-Maße („L") Null ausgenommen [39].

Aus dem Satze XLVI läßt sich ableiten [40] der

Hilfssatz. $R, f, K_1, K_2, \ldots, K_5$ mögen dieselbe Bedeutung haben wie in § 8 und f sei nicht-negativ. Wenn es dann auf der Menge $M\in K_5$ eine monoton nicht-abnehmende Folge von Funktionen, $\{v_n\}$, gibt, deren jede nicht-negativ und f-integrierbar („L") ist über M und wenn v die (vielleicht auch unendliche Werte annehmende) Grenzfunktion ist, so wird aus der Existenz des endlichen Grenzwertes

$$\lim_{n\to\infty} \int_M v_n \cdot df$$

[39]) Die in den Fußnoten 37 und 38 enthaltenen Sätze für das „R"-Integral lassen sich in sinngemäßer Weise auf das „L"-Integral übertragen.

[40]) Man vergleiche de la Vallée Poussin, l. c. [13]), S. 53, 54.

folgen, daß auch v ein f-Integral („L") über M hat, während daneben:

$$\int_M v\, df = \lim_{n\to\infty} \int_M v_n\, df$$

ist.

Durch Anwendung dieses Hilfssatzes läßt sich aus dem vorigen Satze folgern [41]):

Satz L. *Wenn die Funktion $u(x^{(1)}, x^{(2)})$ nicht beschränkt zu sein braucht, übrigens den gleichen Bedingungen genügt wie in Satz XLIX, so wird*

$$\int_{P^{(2)}_{x^{(1)}}} u(x^{(1)}, x^{(2)})\, df^{(2)}$$

existieren für alle Punkte $(x^{(1)})$ einer Menge $P^{(1)*} \subseteqq P_1$ und mit $m_{f^{(2)}}(P^{(1)} - P^{(1)*}) = 0$. Außerdem ist dann:

$$\int_{\mathfrak{M}} u(x^{(1)}, x^{(2)})\, d\mathfrak{F} = \int_{P^{(1)*}} df^{(1)} \cdot \int_{P^{(2)}_{x^{(1)}}} u(x^{(1)}, x^{(2)})\, df^{(2)}.$$

Ein Spezialfall erhält man wieder, wenn u die charakteristische Funktion einer $\mathfrak{F}$-meßbaren Menge ist.

[41]) Man siehe auch Saks, l. c. [3]), S. 262, 263 (Th. 5, 6 nebst Beweisen), wo der Autor den Fubinischen Satz über Doppelintegrale auf die von ihm behandelten Lebesgue-Integration in abstrakten Räumen erweitert.