En tenant compte du théorème [10]) d'après lequel, pour qu'un ensemble compact en soi $E \subset R_{n+1}$ soit une coupure de R_{n+1} il faut et il suffit qu'il existe une transformation essentielle de E en S_n, on conclut que notre corollaire contient la réponse affirmative au problème posé par M. J. Schreier.

Le sens combinatoire du dernier corollaire [11]) impose la question suivante:

Est-il vrai que les points de biunivocité d'une fonction continue f qui transforme une variété cantorienne fermée C à n dimensions en un ensemble acyclique en dimension n [12]) constituent un ensemble de I-re catégorie dans C?

[10]) P. Alexandroff, l. c., p. 226. Cf. aussi K. Borsuk, Math. Ann. 106 (1932), p. 247.

[11]) Comp. la note [9]).

[12]) Autrement dit, $f(C)$ est „eine in der n-ten Dimension azyklische Menge" au sens de ma note de Fund. Math. 21 (1933), p. 95.

Sur le plongement des espaces dans les continus acycliques.

Par

Samuel Eilenberg (Varsovie).

Le but de cette Note est de généraliser le théorème suivant, démontré par MM. W. Hurewicz et B. Knaster [1]): *chaque espace* [2]) *compact E se laisse plonger dans un continu E_1 localement connexe, unicohérent et tel que* $\dim(E_1 - E) = 2$. Je montre notamment (th. 2) qu'en remplaçant l'unicohérence par la notion (plus forte déjà pour $n = 2$) de „continu acyclique en dimensions $r = 0, 1, \dots, n-1$", on peut réaliser la condition $\dim(E_1 - E) = n$.

Je prouverai dans une autre Note que le nombre n de la dernière égalité ne peut pas être abaissé.

Le problème d'une généralisation de ce genre m'a été communiqué par M. C. Kuratowski, qui, indépendemment, a trouvé aussi certaines parties de la démonstration.

Un espace compact E sera dit *acyclique en dimension n*, lorsque chaque vrai cycle n-dimensionnel dans E y est homologue à 0 [3]). On a la proposition suivante:

(1) *Pour qu'un espace compact E soit acyclique en dimension n, il faut et il suffit qu'il existe pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un nombre $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que la relation $z \underset{\varepsilon}{\sim} 0$ dans E subsiste pour chaque δ-cycle n-dimensionnel z* (mod m où $m \geqslant 0$) *dans E.*

[1]) *Ein Einbettungssatz über henkelfreie Kontinua*, Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. XXXVI (1933), p. 557.

[2]) Je ne considère ici que des espaces métriques.

[3]) Les notions combinatoires employées dans cette Note sont à entendre dans le sens de M. P. Alexandroff, *Dimensionstheorie*, Math. Ann. 106 (1932), p. 161.

Il est évident que la condition est suffisante. Supposons qu'elle ne soit pas nécessaire. Il existerait donc un $\varepsilon > 0$ et une suite $z_1, z_2, \dots, z_k, \dots$, où z_k est un δ_k-cycle n-dimensionnel (mod m_k, $m_k \geqslant 0$), tels que $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = 0$ et z_k *non* $\underset{\varepsilon}{\sim} 0$ dans E. Le vrai cycle n-dimensionnel

$$Z = (z_1, z_2, \dots, z_k, \dots)$$

dans E ne serait pas dans ces conditions homologue à 0 dans E et par conséquent cet espace ne serait pas acyclique en dimension n, contrairement à l'hypothèse.

Dans la suite nous allons nous appuyer sur les théorèmes suivants:

(I) Chaque espace compact dont un „rétracte par déformation“ [4]) est acyclique en dimension n, est lui-même acyclique en dimension n [5]).

(II) Chaque espace compact contractile en soi [6]) est acyclique en toute dimension $r \geqslant 0$ [7]).

(III) La somme de deux espaces acycliques en dimension n et dont le produit est acyclique en dimension $n-1$, est elle-même acyclique en dimension n [8]).

(IV) Le produit d'une suite décroissante d'espaces acycliques en dimension n est acyclique en dimension n [9]).

(V) A étant un espace acyclique en dimensions $r = 0, 1, \dots, n$ et $y = f(x)$ une transformation continue de A dont les „tranches“ [10]),

[4]) Un sous-ensemble B d'un espace A est appelé son *rétracte*, s'il existe une fonction continue f telle que $f(A) = B$ et que $f(x) = x$ pour tout $x \in B$. Dans le cas où il existe une fonction continue $\varphi(x, t)$ telle que

$$\varphi(x, 0) = 0, \qquad \varphi(x, t) \in A, \qquad \varphi(x, 1) = f(x)$$

po toute paire $x \in A$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$, on dit que B est de A un *rétracte par déformation* (K. Borsuk, *Zur kombinatorischen Eigenschaften der Retrakte*, Fund. Math. XXI (1933), p. 91).

[5]) Ibidem, p. 95.

[6]) Un ensemble B est dit *contractile en soi*, s'il existe un point $p \in A$ et une fonction continue $\varphi(x, t)$ tels que l'on ait

$$\varphi(x, 0) = x, \qquad \varphi(x, t) \in A, \qquad \varphi(x, 1) = p$$

pour tout couple $x \in A$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

[7]) C'est une conséquence immédiate de (I).

[8]) K. Borsuk, *O zagadnieniu topologicznego scharakteryzowania sfer euklidesowych* (en polonais), Wiadomości Matematyczne 38 (1934), p. 15.

[9]) Ibidem, p. 16.

[10]) C. Kuratowski, *Sur les décompositions semi-continues d'espaces métriques et compacts*, Fund. Math. XI (1928), p. 169. Cette théorie des décompositions semi-continues sera souvent appliquée dans la suite. J'en emprunte aussi la terminologie.

c. à d. les ensembles $f^{-1}(y)$, sont acycliques en dimensions $r = 0, 1, \dots$ $\dots, n-1$, l'image $f(A)$ de A est également acyclique en dimensions $r = 0, 1, \dots, n$ [11]).

(VI) Chaque espace compact n-dimensionnel est acyclique en dimensions $r > n$ [12]).

Soient dans l'espace euclidien à $2n+1$ dimensions $n+1$ segments rectilignes $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}$ ne se trouvant pas situés dans un hyperplan à $2n$ dimensions. Cela équivaut à dire que les $2n+2$ extrémités des ces segments sont les sommets d'un simplexe à $2n+1$ dimensions.

Pour chaque système de $m+1$ ensembles $Z_{k_1} \subset P_{k_1}$, $Z_{k_2} \subset P_{k_2}, \dots$ $\dots, Z_{k_{m+1}} \subset P_{k_{m+1}}$, où $k_i \neq k_j$ si $i \neq j$, désignons par

$$[Z_{k_1}, Z_{k_2}, \dots, Z_{k_{m+1}}]$$

la somme de tous les simplexes (géométriques) m-dimensionnels $[a_1, a_2, \dots, a_{m+1}]$ où $a_i \in Z_{k_i}$.

On a:

$$(2) \qquad [Z_{k_1}, Z_{k_2}, \dots, Z_{k_{m+1}}] \cdot [Z'_{k_1}, Z'_{k_2}, \dots, Z'_{k_{m+1}}] = 0, \quad \text{si} \quad Z_{k_i} \cdot Z'_{k_i} = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant m+1.$$

$$(3) \qquad [Z'_{k_1}, Z_{k_2}, \dots, Z_{k_{m+1}}] \cdot [Z''_{k_1}, Z_{k_2}, \dots, Z_{k_{m+1}}] = [Z_{k_1}, Z_{k_2}, \dots, Z_{k_{m+1}}], \quad \text{si} \quad Z'_{k_1} \cdot Z''_{k_1} = 0.$$

Soit h_i une fonction transformant par homéomorphie l'ensemble discontinu C de Cantor [13]) en Z_i. Je vais montrer que:

$$(4) \qquad \dim\,[h_1(C), h_2(C), \dots, h_{n+1}(C)] = n.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe, en effet, un nombre $\eta > 0$ tel que pour tout couple x_2, $x_2 \in C$ la relation $|x_1 - x_2| < \eta$ entraîne $\varrho(h_i(x_1), h_i(x_2)) < \varepsilon$ pour $1 \leqslant i \leqslant n+1$. L'ensemble C étant de

[11]) Cela résulte immédiatement d'un théorème de M. L. Vietoris, *Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen*, Math. Ann. 97 (1927), p. 465, en appliquant la proposition (1).

[12]) L. Vietoris, *Zum höheren Zusammenhang der kompakten Räume*, Math. Ann. 101 (1929), p. 223. Le théorème de M. L. Vietoris concerne l'homologie mod 0, mais sa démonstration reste valable dans le cas général.

[13]) Voir p. ex. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografje Matematyczne, Warszawa—Lwów 1933, p. 79—80.

dimension 0, il existe une η-déformation φ transformant C en ensemble fini $\varphi(C)$. Si l'on transforme ensuite le simplexe

$$[h_1(a_1), h_2(a_2), \ldots, h_{n+1}(a_{n+1})] \quad \text{où} \quad a_i \in C$$

d'une façon linéaire en simplexe

$$[h_1(\varphi(a_1)), h_2(\varphi(a_2)), \ldots, h_{n+1}(\varphi(a_{n+1}))],$$

on obtient une ε-déformation de l'ensemble

$$[h_1(C), h_2(C), \ldots, h_{n+1}(C)]$$

en polyèdre n-dimensionnel

$$[h_1(\varphi(C)), h_2(\varphi(C)), \ldots, h_{n+1}(\varphi(C))],$$

ce qui prouve en vertu du théorème de M. P. Alexandroff[14]) que

$$\dim[h_1(C), h_2(C), \ldots, h_{n+1}(C)] \leqslant n.$$

L'inégalité inverse est évidente.

(5) *Pour chaque système d'ensembles fermés* $Z_{k_i} \subset P_{k_i}$ *l'ensemble*

(i) $$[Z_{k_1}, Z_{k_2}, \ldots, Z_{k_{m+1}}]$$

est acyclique en dimensions $r = 0, 1, \ldots, m-1$.

Pour le démontrer, admettons d'abord que les ensembles Z_{k_i} soient finis. Dans le cas où chacun d'eux se réduit à un point, l'ensemble (i) est un simplexe m-dimensionnel et la proposition (5) résulte alors de (II). On peut donc supposer que p. ex.

$$Z_{k_1} = Z'_{k_1} + Z''_{k_1}, \quad Z'_{k_1} \cdot Z''_{k_1} = 0, \quad Z'_{k_1} \neq 0 \neq Z''_{k_1}.$$

On a

$$[Z_{k_1}, Z_{k_2}, \ldots, Z_{k_{m+1}}] = [Z'_{k_1}, Z_{k_2}, \ldots, Z_{k_{m+1}}] + [Z''_{k_1}, Z_{k_2}, \ldots, Z_{k_{m+1}}]$$

et d'après (3)

$$[Z'_{k_1}, Z_{k_2}, \ldots, Z_{k_{m+1}}] \cdot [Z''_{k_1}, Z_{k_2}, \ldots, Z_{k_{m+1}}] = [Z_{k_2}, Z_{k_3}, \ldots, Z_{k_{m+1}}].$$

En appliquant (III), on voit aussitôt que, dans le cas où les ensembles Z_{k_i} sont finis, la proposition (5) s'obtient par l'induction complète.

[14]) l. c., p. 169.

Ceci établi, passons au cas où chacun des ensembles Z_{k_i} se compose d'un nombre fini de segments. Chaque Z_{k_i} contient alors un ensemble fini Z'_{k_i} qui en est un rétracte par déformation [4]). Il en résulte facilement que l'ensemble $[Z'_{k_1}, Z'_{k_2}, \ldots, Z'_{k_{m+1}}]$ est un rétracte par déformation de l'ensemble (i), qui est donc, en vertu de (I), acyclique en toutes les dimensions $r = 0, 1, \ldots, m-1$.

Enfin, pour passer au cas général, il suffit d'appliquer (IV), en remarquant que chaque ensemble linéaire fermé est le produit d'une suite décroissante d'ensembles composés d'un nombre fini de segments.

Théorème 1. *Chaque espace métrique compact E est une image continue d'un ensemble compact n-dimensionnel, ayant toutes les tranches acycliques en dimensions $r = 0, 1, \ldots, n-1$* [15]).

Démonstration. Soit f une fonction continue transformant l'ensemble C de Cantor en E [16]). Posons, pour tout $x \in E$,

$$T(x) = [h_1(f^{-1}(x)), h_2(f^{-1}(x)), \ldots, h_{n+1}(f^{-1}(x))].$$

Soient encore

$$A = \sum_{x \in E} T(x) \quad \text{et} \quad g(y) = x, \quad si \quad y \in T(x).$$

Pour tout couple $x_1, x_2 \in E$ tel que $x_1 \neq x_2$ on a $f^{-1}(x_1) \cdot f^{-1}(x_2) = 0$ et, d'après (2), $T(x_1) \cdot T(x_2) = 0$. Il en résulte que la fonction g est univoque sur A.

Considérons dans E une suite arbitraire de points $\{x_n\}$ convergeant vers un point x. La fonction f étant continue, on a

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{n \to \infty} f^{-1}(x_n) \subset f^{-1}(x) \text{ }^{16}),$$

ce qui donne

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{n \to \infty} T(x_n) \subset T(x).$$

On en déduit que l'ensemble A est compact et que la fonction g est continue. Or, d'après (4) $\dim A = n$ et d'après (5) les ensembles

[15]) Dans le cas de $n = 1$ ce théorème a été démontré par M. W. Hurewicz, *Über oberhalb-stetige Zerlegungen von Punktmengen in Kontinua*, Fund. Math. XV (1930), p. 60.

[16]) Voir F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin—Leipzig 1927, p. 197.

$T(x)$ sont acycliques en toutes les dimensions $r=0, 1, \dots, n-1$, ce qui achève la démonstration.

Remarque. Dans le cas où l'espace E est de dimension finie, on peut, en remplaçant l'ensemble C par un ensemble de dimension 0 convenablement choisi, assujettir la fonction f à la condition supplémentaire que les ensembles $f^{-1}(x)$ soient finis pour tout $x \in E$[17]. Les tranches de la transformation g deviennent alors des *polyèdres n-dimensionnels.*

Théorème 2. *Chaque espace métrique compact E se laisse plonger, pour tout $n>0$, dans un continu E_1 localement connexe, acyclique en toute dimension $r<n$ et tel que* $\dim(E_1-E)=n$.

Démonstration. Le cas particulier $n=1$ est bien connu: *Chaque espace métrique compact E se laisse plonger dans un continu localement connexe E_1 tel que* $\dim(E_1-E)=1$.

Pour le démontrer, on envisage la fonction continue f transformant l'ensemble C en E et on considère la décomposition semi-continue du segment $[0,1]$ ayant pour tranches toutes les tranches de la fonction f et tous les points individuels du complémentaire de C. L'hyperespace[10] E_1 de cette décomposition satisfait alors aux conditions exigées.

Passons donc au cas $n>1$.

D'après le th. 1, il existe un ensemble compact A à $n-1$ dimensions et une fonction continue g qui le transforme en E de manière que ses tranches soient acycliques en dimensions $r=0, 1, \dots$ $\dots, n-2$. L'ensemble A peut être considéré comme sous-ensemble d'un continu localement connexe A_1 tel que $\dim(A_1-A)=1$. Les relations $\dim A=n-1$ et $n>1$ impliquent que $\dim A_1=n-1$.

Soit maintenant A_2 le continu localement connexe à n dimensions contenant A_1 et contractile en soi, qui s'obtient du produit cartésien[18] $A_1\times[0,1]$ par l'identification des points de l'ensemble $A_1\times(1)$[19]. Considérons la décomposition semi-continue de A_2 ayant pour tranches les tranches de la transformation g et les points individuels de A_2-A. L'hyperespace E_1 de cette décomposition est évidemment un continu localement connexe contenant E. On a $\dim(E_1-E)=\dim(A_2-A)=\dim A_2=n$, puisque $\dim A=n-1$. Enfin, E_1 est l'hyperespace d'une décomposition semi-continue d'un ensemble compact contractile en soi (donc en vertu de (II) d'un ensemble acyclique en toutes dimensions) en tranches acycliques en dimensions $r=0, 1, \dots, n-2$. Il en résulte d'après (V) que E_1 est acyclique en dimensions $r=0, 1, \dots, n-1$, c. q. f. d.

On voit aussitôt que le résultat de MM. Hurewicz et Knaster, cité au début, est une conséquence du cas particulier $n=2$ du th. 2, chaque continu localement connexe acyclique en dimension 1 étant unicohérent[20]).

Un espace séparable n-dimensionnel se laisse toujours plonger dans un espace compact de même dimension[21]). Le th. 2 et la proposition (VI) entraînent donc le suivant

Corollaire. *Chaque espace métrique séparable n-dimensionnel (où $n>0$) se laisse plonger dans un continu localement connexe n-dimensionnel et acyclique en dimensions $r\neq n$.*

[17]) C. Kuratowski, *Sur l'application des espaces fonctionnels à la Théorie de dimensions,* Fund. Math. XVIII (1932), p. 285.

[18]) Voir C. Kuratowski, *Topologie I,* p. 135.

[19]) A_2 est donc un „cône" ayant A_1 pour base. Il est bien connu que $\dim A_2=1+\dim A_1$.

[20]) K. Borsuk, *Über die Abbildungen der metrischen kompakten Räume auf die Kreislinie,* Fund. Math. XX (1933), p. 230; E. Čech, *Sur les continus Péaniens unicohérents,* Fund. Math. XX (1933), p. 232.

[21]) W. Hurewicz, *Über Einbettung separabler Räume in gleichdimensionale kompakte Räume,* Monatshefte für Math. u. Phys. 37 (1930), p. 199.