Les superpositions transfinies des fonctions continues et les fonctions de Baire.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

L'objet de cette Note est l'étude de la famille des fonctions d'une variable réelle qu'on obtient en partant des fonctions continues et en effectuant un nombre fini ou une infinité dénombrable de passages à la limite de la forme

$$\lim_{n=\infty} f_1 f_2 \ldots f_n(x).$$

1. *Théorème I. Pour qu'il existe, pour une fonction donnée $f(x)$ d'une variable réelle, une suite infinie de fonctions continues $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, telle que (pour tout x réel)*

$$f(x) = \lim_{n=\infty} f_1 f_2 \ldots f_n(x), \tag{1}$$

il faut et il suffit que $f(x)$ soit une fonction de classe $\leqslant 1$ de Baire.

Démonstration. La superposition d'un nombre fini de fonctions continues étant une fonction continue, on voit sans peine que la condition de notre théorème est nécessaire. Il nous reste donc à démontrer qu'elle est suffisante.

Soit donc $f(x)$ une fonction d'une variable réelle de classe $\leqslant 1$. Il existe donc une suite infinie de fonctions continues $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, telle qu'on a pour tout x réel

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \varphi_n(x). \tag{2}$$

Définissons maintenant la fonction d'une variable réelle $f_1(x)$ comme il suit. Posons, pour n naturels:

$$f_1(x) = \varphi_n(x - n^2 - n - 1) \quad \text{pour} \quad n^2 + 1 \leqslant x \leqslant (n+1)^2. \tag{3}$$

La fonction $f_1(x)$ est ainsi définie et continue dans chacun des intervalles (fermés) $(2, 4)$, $(5, 9)$, $(10, 16), \ldots, (n^2+1, (n+1)^2), \ldots$, et nous pouvons compléter sa définition de sorte qu'elle soit linéaire dans chacun des intervalles $(-\infty, 2)$, $(4, 5)$, $(9, 10), \ldots, (n^2, n^2+1)$. (Il suffit à ce but de poser $f_1(x) = \varphi_1(-1)$ pour $x < 2$ et, pour $n = 2, 3, 4, \ldots$:

$$f_1(x) = (x - n^2 + 1)\varphi_{n-1}(n-1) + (x - n^2)\varphi_n(-n),$$
$$\text{pour} \quad n^2 < x < n^2 + 1).$$

La fonction $f_1(x)$ ainsi définie est continue pour tout x réel. Or, posons, pour x réels:

$$f_2(x) = x + 3$$

et

$$f_n(x) = x + 2n - 2, \quad \text{pour} \quad n = 3, 4, 5, \ldots$$

Je dis que tout x réel satisfait à la formule (1).

En effet, soit x un nombre réel donné et soit n un nombre naturel, tel que $n \geqslant |x|$. Il résulte sans peine de la définition des fonctions $f_n(x)$ (pour $n = 2, 3, 4, \ldots$) que

$$(4) \qquad f_2 f_3 \ldots f_{n+1}(x) = x + n^2 + n + 1$$

D'après $n \geqslant |x|$ on a $-n \leqslant x \leqslant n$, d'où

$$n^2 + 1 \leqslant x + n^2 + n + 1 \leqslant (n+1)^2,$$

d'où, d'après (3):

$$(5) \qquad f_1(x + n^2 + n + 1) = \varphi_n(x).$$

D'après (4) et (5) on a donc

$$f_1 f_2 \ldots f_{n+1}(x) = \varphi_n(x) \quad \text{pour} \quad n > |x|,$$

d'où il résulte, d'après (2), l'égalité (1).

Le théorème I est ainsi démontré.

Or, il est à remarquer que, comme j'ai démontré [1]), il existe des fonctions de classe 1 qui ne sont pas de la forme

$$f(x) = \lim_{n=\infty} f_n f_{n-1} \ldots f_1(x),$$

[1]) Voir ma communication dans les *C. R. de la Soc. Sc. Varsovie* XXVI, p. 2 (Séance du 28 janvier 1933).

où $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ est une suite infinie de fonctions continues (Telle est p. e., d'après M. Eilenberg, toute fonction de 1re classe à valeurs distinctes et non monotone).

$\varphi(x)$ étant une fonction continue d'une variable réelle, il existe, comme on sait, pour tout nombre positif ε une fonction continue $\psi(x)$ à variation bornée (dans tout intervalle fini), telle que $|\varphi(x) - \psi(x)| < \varepsilon$ pour tout x réel.

$f(x)$ étant une fonction de classe $\leqslant 1$, nous pouvons donc supposer dans la formule (2) que les fonctions $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont à variation bornée (dans tout intervalle fini), et il en résulte tout de suite que la fonction $f_1(x)$ qui intervient dans la démontration du théorème I est alors encore à variation bornée (dans tout intervalle fini). En repetant la démonstration du théorème I on obtient ainsi ce

Théorème I^{bis}: *Les fonctions d'une variable réelle de classe $\leqslant 1$ de Baire coïncident avec les fonctions $f(x)$ de la forme*

$$f(x) = \lim_{n=\infty} f_1 f_2 \ldots f_n(x),$$

où $f_n(x)$ $(n = 1, \ldots)$ sont des fonctions continues d'une variables réelle à variation bornée (dans tout intervalle fini).

Or, comme l'a démontré Mlle Nina Bary [1]), un théorème analogue n'a pas lieu lorsqu'on remplace les limites $\lim_{n=\infty} f_1 f_2 \ldots f_n(x)$ par les limites $\lim_{n=\infty} f_n f_{n-1} \ldots f_1(x)$.

2. Désignons par Φ la plus petite famille F de fonctions d'une variable réelle qui contient toute fonction continue et qui jouit de la propriété P suivante:

(P) Si $f(x) = \lim_{n=\infty} f_1 f_2 \ldots f_n(x)$, où $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ est une suite infinie de fonctions appartenant à la famille F, la fonction $f(x)$ appartient aussi à la famille F.

Théorème II. *La famille Φ coïncide avec la famille de toutes les fonctions de Baire d'une variable réelle.*

Démonstration.

La famille de toutes les fonctions de Baire d'une variable réelle

[1]) *Matematičeski Sbornik* T. 40 (Moscou 1933), p. 327.

contenant toute fonction continue et jouissant de la propriété P, elle contient la famille Φ. Il suffira donc de démontrer que toute fonction de Baire d'une variable réelle appartient à la famille Φ, ce que nous prouverons par l'induction transfinie.

D'après le théorème I, toute fonction d'une variable réelle de classe $\leqslant 1$ appartient à la famille Φ.

Soit maitenant α un nombre ordinal compris entre 1 et Ω et suppossons que nous avons déjà démontré que toute fonction de Baire d'une variable réelle de classe $<\alpha$ appartient à la famille Φ.

Soit $f(x)$ une fonction donnée de la classe α. Il existe donc une suite infinie $\varphi_n(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$, où $\varphi_n(x)$ et une fonction de classe α_n, où $1\leqslant\alpha_n<\alpha$, telle que

$$f(x)=\lim_{n=\infty}\varphi_n(x) \quad \text{pour} \quad x \text{ réels.} \tag{6}$$

Posons

$$f_1(x)=\varphi_1(x) \quad \text{pour} \quad x\leqslant 0 \tag{7}$$

et

$$f_1(x)=\lg x \quad \text{pour} \quad x>0\,^{1)} \tag{8}$$

— ce sera évidemment une fonction de classe $\leqslant\alpha_1$.

Désignons par $\lg_n x$, resp. par $E_n(x)$ la n-ième itérée de la fonction $\lg x$, resp. e^x et posons $e_n=E_n(0)$ pour $n=0,1,2,\ldots$ (On a donc $E_0(x)=x$ et $E_0(0)=0$).

Posons ensuite

$$f_2(x)=e^{\varphi_2(x)} \quad \text{pour} \quad x\leqslant 0 \tag{9}$$

et

$$f_2(x)=\lg x \quad \text{pour} \quad x>0. \tag{10}$$

D'après (9) nous avons, pour $x\leqslant 0$: $f_2(x)>0$, donc, d'après (8) et (9):

$$f_1f_2(x)=\lg f_2(x)=\varphi_2(x) \quad \text{pour} \quad x\leqslant 0.$$

D'autre part, d'après (10), on a, pour $x>1$: $f_2(x)>0$, donc, d'après (8) et (10):

$$f_1f_2(x)=\lg f_2(x)=\lg_2(x) \quad \text{pour} \quad x>1.$$

[1]) C'est à M. Lindenbaum que je dois l'introduction de la fonction $\lg x$ au lieu de la fonction $f_1(x)=x-2$ (pour $x\geqslant 2$) que j'utilisai dans ma démonstration, ce qui a permi de l'abréger un peu.

Soit maintenant n un nombre naturel $\geqslant 2$ et supposons que nous avons déjà défini les fonctions $f_1(x), f_2(x),\ldots,f_n(x)$ et que

$$f_n(x)=E_{2^{n-2}}(\varphi_n(x)) \quad \text{pour} \quad x\leqslant e_{2^{n-2}-1} \tag{11}$$

$$f_n(x)=\lg_{2^{n-2}}x \quad \text{pour} \quad x>e_{2^{n-2}-1} \tag{12}$$

$$f_1f_2\ldots f_n(x)=\varphi_n(x) \quad \text{pour} \quad x\leqslant e_{2^{n-2}-1} \tag{13}$$

et

$$f_1f_2\ldots f_n(x)=\lg_{2^{n-1}}x \quad \text{pour} \quad x>e_{2^{n-1}-1} \tag{14}$$

(les formules (11) à (14) ont évidemment lieu pour $n=2$).

Nous poserons

$$f_{n+1}(x)=E_{2^{n-1}}(\varphi_{n+1}(x)) \quad \text{pour} \quad x\leqslant e_{2^{n-1}-1} \tag{15}$$

et

$$f_{n+1}(x)=\lg_{2^{n-1}}x \quad \text{pour} \quad x>e_{2^{n-1}-1}. \tag{16}$$

D'après (15) nous avons, pour $x\leqslant e_{2^{n-1}-1}$:

$$f_{n+1}(x)>E_{2^{n-1}-1}(0)=e_{2^{n-1}-1},$$

donc, d'après (14) et (15):

$$f_1f_2\ldots f_{n+1}(x)=\lg_{2^{n-1}}(f_{n+1}(x))=\lg_{2^{n-1}}E_{2^{n-1}}(\varphi_{n+1}(x))=\varphi_{n+1}(x)$$
$$\text{pour} \quad x\leqslant e_{2^{n-1}-1}.$$

Or, d'après (16), pour $x>e_{2^n-1}$, on a

$$f_{n+1}(x)>\lg_{2^{n-1}}E_{2^n-1}(0)=E_{2^{n-1}-1}(0)=e_{2^{n-1}-1},$$

donc, d'après (14) et (16):

$$f_1f_2\ldots f_{n+1}(x)=\lg_{2^{n-1}}\lg_{2^{n-1}}x=\lg_{2^n}x \quad \text{pour} \quad x>e_{2^n-1}.$$

La suite infinie de fonctions $f_n(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ et ainsi définie par l'induction et on a pour $n=2,3,4,\ldots$ les formules (11), (12), (13) et (14), et, $\varphi_n(x)$ étant une fonction de classe $\alpha_n\geqslant 1$, il résulte tout de suite des formules (11) et (12) que $f_n(x)$ est une fonction de classe $\leqslant\alpha_n$ pour $n=2,3,4,\ldots$ Or, je dis que (pour x réels)

$$f(x)=\lim_{n=\infty}f_1f_2\ldots f_n(x). \tag{17}$$

En effet, soit x un nombre réel donné. On a évidemment $\lim\limits_{n=\infty}e_n=+\infty$ et il existe un nombre naturel $\mu=\mu(x)$, tel que

$x \leqslant e_{2^{\mu-2}-1}$: on a donc $x < e_{2^{n-2}-1}$ pour $n > \mu$, donc, d'après (13):

$$f_1 f_2 \dots f_n(x) = \varphi_n(x) \quad \text{pour} \quad n > \mu,$$

ce qui donne, d'après (6), l'égalité (17).

La formule (17) est ainsi établie pour tout x réel. Les fonctions ${}_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$, étant de classes $< \alpha$, il résulte de notre hypothèse que les fonctions $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ appartiennent toutes à la famille Φ. La famille $F = \Phi$ jouissant de la propriété P, il résulte donc de la formule (17) que la fonction $f(x)$ appartient encore à la famille Φ.

La famille Φ contient donc toute fonction (d'une variable réelle) de classe α, et le théorème II se trouve démontré par l'induction transfinie.

3. On peut demander s'il y a lieu pour les classes positives de superpositions transfinies considérées une additivité, comme c'est pour les superpositions transfinies de la forme $\lim\limits_{n=\infty} f_n f_{n-1} \dots f_1(x)$ [1]. En général ce n'est pas ici le cas.

En effet, si $f_1(x)$ est une fonction de classe $\leqslant \omega$ et les fonctions $f_n(x)$ $(n = 2, 3, 4, \dots)$ sont de classe $\leqslant 1$, toute fonction de la forme (1) est, comme on voit sans peine, de classe $\leqslant \omega + 1$ (puisque $f_1 f_2 \dots f_n(x)$ est dans ce cas une fonction de classe $\leqslant \omega$, pour $n = 1, 2, 3, \dots$), et $\omega + 1 < \omega + 1 + 1 + \dots$ Il en résulte qu'aucune fonction de classe $\omega \cdot 2$ ne peut être représentée sous la forme (1), où $f_1(x)$ est une fonction de la classe $\leqslant \omega$ et $f_n(x)$ $(n = 2, 3, 4, \dots)$ sont des fonctions de classe $\leqslant 1$, malgré que $\omega \cdot 2 = \omega + 1 + 1 + 1 + \dots$

Cependant pour certains nombres ordinaux α l'additivité de classes a lieu. P. e. on peut démontrer que, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ étant une suite infinie donnée quelconque de nombres ordinaux, telle que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots = \omega^\omega$, la famille de toutes les fonctions d'une variable réelle de classe $\leqslant \omega^\omega$ coïncide avec celle de toutes les fonctions de la forme (1), où, pour $n = 1, 2, 3, \dots, f_n(x)$ est une fonction de classe $\leqslant \alpha_n$ (Plus généralement, on pourrait démontrer le même pour les fonctions de classe $\leqslant \omega^\lambda$, où λ est un nombre ordinal quelconque de seconde espèce $< \Omega$).

On peut aussi démontrer (en modifiant légèrement la démonstration du théorème II) que les fonctions d'une variable réelle de classe $\leqslant \omega$ coïncident avec les fonctions de la forme (1), où, pour $n = 1, 2, 3, \dots, f_n(x)$ est une fonction de classe $\leqslant n$.

[1] Cf. A. Lindenbaum, *Fund. Math.* t. 23, p. 35.

Or, le problème reste ouvert si toute fonction de classe ω est de la forme (1), où $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ sont des fonctions de classe $\leqslant 1$.

Parmi les autres questions non résolues, citons le problème si toute fonction continue d'une variable réelle est de la forme (1), où $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ sont des polynomes.