Über topologische Abbildungen der euklidischen Sphären [1]).

Von.

J. Schreier und S. Ulam (Lwów).

Es seien $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x), \ldots$, stetige, im Intervall $\langle 0, 1 \rangle$ erklärte Funktionen deren Werte demselben Intervall angehören, gegeben.

Man kann dann durch Zusammensetzen, z. B. $f\varphi(x)$, $\varphi\psi f\varphi(x)$, $\varphi\varphi f(x), \ldots$ aus den gegebenen Funktionen unendlich viele neue bilden.

Wir fragen ob es eine *endliche* Anzahl von Funktionen gibt, so daß die aus ihnen mittels Zuusammensetzen gebildeten Funktionen jede andere mit beliebiger Genauigkeit zu approximieren erlauben.

Man könnte auch anders fragen, ob die stetigen Funktionen in Bezug auf die Zusammensetzung eine endliche *Basis* besitzen.

Wir werden u. a. in dieser Arbeit zu dem vielleicht unerwarteten Ergebnis gelangen, daß es schon *fünf* Funktionen gibt, die das Gewünschte leisten [2]).

Die eben gestellte Frage läßt sich in einen umfangreichen Problemkreis einreihen der, wie sich später herausstellen wird, einen gruppentheoretisch-topologischen Charakter trägt.

Wir werden auch den schwierigeren Fall der eineindeutigen Funktionen (man hat dann also nur alle eineindeutigen Funktionen zu approximieren, darf aber zu diesem Zwecke eben nur solche Funktionen anwenden!) und dies gleich im allgemeinen Falle, wo Argument- und Wertebereich der untersuchten Funktionen die n-dimensionale, euklidische Vollkugel ist, behandeln.

[1]) S. unsere Note in C. R., Nov. 1933.

[2]) Die Zahl 5 kann erniedrigt werden. Vgl. [11]).

Wir werden in verschiedenen Fällen, die Existenz einer endlichen Basis im obigen Sinne für die untersuchten Funktionen nachweisen.

Bei der Methode, die wir dazu anwenden werden, werden wir auf verschiedene topologische Schwierigkeiten stoßen, die sich in gewissen Fällen zurzeit nicht bewältigen ließen, so daß noch verschiedene Probleme offen geblieben sind. In dem am Anfang erwähnten Falle der stetigen Funktionen, die das Intervall $(0, 1)$ in eine Teilmenge dieses Intervalls, abbilden, werden aber diese Schwierigkeiten gar nicht auftreten.

Ob unsere Sätze nicht nur Spezialfälle eines allgemeinen Satzes sind, steht dahin. Jedenfalls müßte der Beweis einen solchen Satzes ganz andere Methoden anwenden und dürfte sehr schwierig sein.

Wir kommen nun zur Präzisierung der angewendeten Begriffe und zur Aufzählung der in dieser Arbeit bewiesenen Sätze.

1. Es sei A ein metrischer, kompakter Raum. Unter einem topologischen *Automorphismus* [3]) $\varphi(p)$ von A werden wir eine eineindeutige und stetige Abbildung, von A auf sich selbst, verstehen. Die Menge aller topologischen Automorphismen von A bildet, wenn man als Verknüpfung zweier Elemente $f(p)$ und $\varphi(p)$ ihre Zusammensetzung $f\{\varphi(p)\}$, versteht, eine Gruppe, die wir mit $T(A)$ bezeichnen wollen. Im Anschluß an die in der Gruppentheorie üblichen Bezeichnungen versteht man unter $f\varphi$ die Abbildung $f\{\varphi(p)\}$, unter $\varphi^k(p)$ bei natürlichen k, die k-mal angewendete Iteration von φ, unter φ^{-k} die zu φ^k inverse Abbildung, unter $e(p)$ die identische Abbildung: $e(p) \equiv p$.

Es bezeichne weiter $K^{(n)}$ die n-dimensionale euklidische Vollkugel $(K^{(n)} = \underset{x_1, \ldots, x_n}{E}(\sum_1^n x_i^2 \leqslant 1))$, $S^{(n-1)}$ ihre Oberfläche, $K_i^{(n)}$ die zu $K^{(n)}$ konzentrische Kugel mit dem Radius $1 - \frac{1}{i}$.

Wir bezeichnen mit $H_1^{(n)}$ den metrischen Raum, den wir erhalten, indem wir die Menge $T(K^{(n)})$ durch die Formel

$$\varrho_1(f, \varphi) = \operatorname*{Max}_{p \in K^{(n)}} \varrho[f(p), \varphi(p)]$$

metrisieren, mit $H_2^{(n)}$ den metrischen Raum, den wir aus derselben

[3]) S. C. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa-Lwów 1933, p. 70.

Menge mittels der Metrisationsformel

$$\varrho_2(f,\varphi)=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}\operatorname*{Max}_{p\in K_i^{(n)}}\varrho[f(p),\varphi(p)]$$

erhalten, endlich mit $G^{(n)}$ den metrischen Raum, den wir erhalten, indem wir die Menge $T(S^{(n)})$ durch die Formel

$$\varrho_1(f,\varphi)=\operatorname*{Max}_{p\in S^{(n)}}\varrho[f(p),\varphi(p)]$$

metrisieren. $F^{(n)}$ sei der durch die Bedingung

$$f(p)=p,\quad \text{für}\quad p\in S^{(n-1)}$$

bestimmte, abgeschlossene Teilraum von $H_1^{(n)}$. (Er ist zugleich Untergruppe von $T(K^{(n)})$!).

Man sieht sofort, daß in $H_1^{(n)}$ bzw. $G^{(n)}$ die Konvergenz einer Folge $\{f_\nu\}$, gegen f, mit der gleichmäßigen Konvergenz von $\{f_\nu\}$ gegen f, in K^n bzw. $S^{(n)}$, in $H_2^{(n)}$ mit der gleichmäßigen Konvergenz in jedem $K_i^{(n)}$, gleichbedeutend ist. Daraus folgt aber, daß $H_1^{(n)}$, $H_2^{(n)}$, $G^{(n)}$ und $F^{(n)}$ topologische Gruppen [4]) sind.

Man hat zu diesem Zwecke zu zeigen, daß aus der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $\{f_\nu\}$ gegen f, und der Folge $\{g_\nu\}$ gegen g die gleichmäßige Konvergenz von $\{f_\nu g_\nu\}$ gegen fg und $\{f_\nu^{-1}\}$ gegen f^{-1} folgt. Es ist aber

$$\varrho(f_\nu g_\nu, fg)\leqq\varrho(fg,fg_\nu)+\varrho(fg_\nu,f_\nu g_\nu)\leqq\varrho(fg,fg_\nu)+\varrho(f,f_\nu).$$

Das erste Glied strebt wegen der Stetigkeit von f und wegen $\lim g_\nu=g$, das zweite wegen $\lim f_\nu=f$ gegen Null. Weiter ist

$$\varrho(f_\nu^{-1},f^{-1})=\varrho(f_\nu^{-1}f_\nu,f^{-1}f_\nu)=\varrho(e,f^{-1}f_\nu)=\varrho(f^{-1}f,f^{-1}f_\nu)$$

und dies strebt wegen $\lim f_\nu=f$ und wegen der Stetigkeit von f^{-1} gegen Null. Im Falle des Raumes $H_2^{(n)}$ hat man noch zu beachten, daß Bild und Urbild einer Kugel $K_i^{(n)}$ immer ganz in einer Kugel $K_j^{(n)}$ liegen.

Die betrachteten Räume sind nicht vollständig. Man kann aber nach S. Banach [5]) diese Räume mittels der Formel

$$\bar\varrho(f,g)=\varrho(f,g)+\varrho(f^{-1},g^{-1})$$

ummetrisieren, so daß sie vollständig werden. Die gleichmäßige Konvergenz von $\{f_\nu\}$ gegen f, bleibt weiter notwendig und hinreichend für $\lim\varrho(f_\nu,f)=0$, doch

[4]) Für den Begriff vgl. z. B. O. Schreier Abh. d. Sem. Hamb. IV *Abstrakte kontinuierliche Gruppen.*

[5]) S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa 1932. p. 229.

erfüllt jetzt eine Folge von Automorphismen die gleichmäßig konvergent ist, deren Grenze aber kein Automorphismus ist, nicht mehr das Cauchysche Konvergenzkriterium. Die (Bogen-) Komponente einer topologischen Gruppe Φ in der das Element e liegt bildet selbst eine topologische Gruppe [6]) (u. zw. ist sie Normalteiler von Φ) die wir mit Φ^* bezeichnen wollen. $I(\Phi)$ bezeichne die Faktorgruppe des Normalteilers Φ^*, die auch die Abbildungstypengruppe genannt wird. Ihre Ordnung gibt die Anzahl der Komponenten des Raumes Φ an.

Zwei topologische Gruppen T und S, heißen *stetig isomorph*, wenn es eine eineindeutige Abbildung f, von T auf S gibt, die mit ihrer Umkehrung f^{-1} stetig ist und für $ab=c$ $(a,b,c\subset T)$ $f(a)f(b)=f(c)$ und $f(a^{-1})=(f(a))^{-1}$ gilt.

Wenn A und B zwei homöomorphe, metrische Räume bezeichnen, so sind $T(A)$ un $T(B)$ stetig isomorph. In der Tat, bezeichnet h den Homöomorphismus der A auf B abbildet, h^{-1} seine Umkehrung, so ordne man dem Elemente $\varphi\in T(A)$ das Element $h\varphi h^{-1}\subset T(B)$ zu. Man bestätigt leicht, daß diese Zuordnung einen stetigen Isomorphismus zwischen $T(A)$ und $T(B)$ herstellt.

Sind A und B zwei topologische Gruppen, so nennt man die Menge aller geordneten Paare $a\in A$, $b\in B$ das *direkte Produkt* $A\times B$, wobei $A\times B$ selbst eine topologische Gruppe ist, mit dem Kompositionsgesetz $(a_1,b_1)(a_2,b_2)=(a_1a_2,b_1b_2)$ und der Limesrelation: $\lim(a_n,b_n)=(a,b)\equiv\lim a_n=a$ und $\lim b_n=b$.

Sei Φ eine topologische Gruppe, B eine Teilmenge von Φ. Mit $\Pi(B)$ bezeichnen wir die kleinste Untergruppe von Φ, die B enthält. Besteht B aus endlich vielen Elementen $a_1, a_2, \dots, a_k$ so schreiben wir auch $\Pi(a_1,a_2,\dots,a_k)$.

Wir sagen, daß Φ eine endliche Basis (kurz e. B.) besitzt, wenn es in Φ endlich viele Elemente $a_1,a_2,\dots,a_k$ gibt, so daß $\Pi(a_1,a_2,\dots,a_k)$ in Φ überall dicht liegt $(\overline{\Pi(a_1,a_2,\dots,a_k)}=\Phi)$.

Man sieht sofort, daß wenn Φ und Ψ stetig isomorph sind entweder beide eine e. B. besitzen, oder keines von ihnen. Dieselbe gilt also für $T(A)$ und $T(B)$, wenn A und B homöomorph sind.

Man sieht auch, daß wenn Φ^* eine e B. besitzt und $I(\Phi)$ endlich ist oder wenigstens endlich viele Erzeugende besitzt, auch Φ eine e. B. besitzt.

Besitzen A und B eine e. B., so gilt dies auch für $A\times B$. Ist nämlich $a_1,a_2,\dots,a_k$ eine e. B. in A, $b_1,b_2,\dots,b_l$ eine e. B. in B dann bilden die Elemente (a_1,e), $(a_2,e),\dots,(a_k,e)$, $(e,b_1),\dots,(e,b_l)$ eine e. B. in $A\times B$.

Bemerkung. Ebenso zeigt man, daß wenn A und B zwei Untergruppen einer topologischen Gruppe C sind, und A und B beide

[6]) S. die unter [4]) zitierte Abhandlung. Unter Bogen-Komponente versteht man hier die Menge der Elemente, die sich mit e durch ein Bogen verbinden lassen.

eine e. B. besitzen, aus $\Pi(A+B)=C$ die Existenz einer e. B. für C folgt.

Nun können wir die folgenden Probleme formulieren:

Problem 1. Unter welchen Voraussetzungen kann man behaupten, daß eine topologische Gruppe Φ eine e. B. besitzt?

Problem 2. Ist dies insbesondere immer der Fall, wenn Φ die Einheitskomponente der Automorphismengruppe eines metrischen, kompakten Raumes ist: $\Phi = T(A)^*$.

Die Lösung dieser Probleme und in erster Linie die positive Beantwortung von Problem 2. scheint uns von großer Wichtigkeit für die Theorie der topologischen Gruppen. Doch glauben wir, daß dies mit nicht geringen Schwierigkeiten verbunden sein wird.

Wir werden im folgenden eine Methode angeben, die in vielen interessanten Spezialfällen des Problems 2. zum Ziele führt. Der Nachteil dieser Methode besteht darin, daß sie direkt eigentlich nur für $H_2^{(n)}$ angewendet werden kann, in jedem anderen Falle noch verschiedene Hilfsbetrachtungen benötigt, die sich mit der topologischen Natur des untersuchten Raumes komplizieren, so daß wir schon z. B. die Existenz einer e. B. für $H_1^{(n)}$ bei $n>3$ nicht nachweisen können. Die Vorteile unserer Methode bestehen darin, daß sie erstens jedesmal die e. B. effektiv zu konstruieren erlaubt, zweitens, daß diese e. B. aus einer verhältnismäßig kleinen Anzahl von Abbildungen besteht, daß sie, drittens, den Satz von der Existenz einer e. B. in einer verschärften Form aussprechen läßt (sie läßt nämlich behaupten, daß unter den Elementen von $\Pi(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ wo $a_1, a_2, \ldots, a_k$ die e. B. bilden, nur gewisse von einer speziellen Gestalt zur Approximation aller anderen gebraucht werden) und viertens, daß sie sich auch im Falle der nicht notwendig eineindeutigen Abbildungen, die ja überhaupt keine Gruppe bilden, anwenden läßt und so die Lösung des zur Anfang der Arbeit gestellten Problems erlaubt. Es wäre interessant für die Funktionen der Basis solche zu finden, die aus dem Gesichtspunkte der Analysis r e g u l ä r, vielleicht gar a n a l y t i s c h sind.

2. Wir werden folgende Sätze beweisen:

I. *In* $(H_2^{(n)})^*$ *gibt es eine aus drei Elementen bestehende e. B.*

II. *In* $F^{(n)}$ *gibt es eine aus drei Elementen bestehende e. B.*

III. *In*

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha) & G^{(1)} \\ \beta) & G^{(2)} \\ \gamma) & H_1^{(1)} \\ \delta) & H_1^{(2)} \\ \varepsilon) & H_1^{(3)} \end{array}\right\} \text{ gibt es eine e. B.}$$

Dem Beweise der Satze I und II sind die Abschnitte 3. und 4. der Arbeit gewidnet. Jetzt schicken wir einige Betrachtungen, voraus, aus denen von Satz II, Satz III folgen wird.

Wir werden folgende Bezeichnungen gebrauchen. Sind p und q zwei Punkte im n-dimensionalen, euklidischen Raum R_n, so bezeichnen wir mit $|p-q|$ ihren Abstand. Den Durchmesser eine Menge A bezeichnen wir mit $\delta(A)$. Ist p ein von Null verschiedener Punkt im R_n, ϑ eine nicht negative Zahl so bezeichnet ϑp den auf der Halbgeraden $\overrightarrow{0p}$ liegenden, von 0 um $\vartheta \cdot |p-0|$ entfernten Punkt ($\vartheta \cdot 0 = 0$). Ist $f(p) \in H_1^{(n)}$ ein Automorphismus der Vollkugel, so bildet er die Sphäre $S^{(n-1)}$ auf sich selbst ab und bestimmt auf diese Weise eindeutig einen Automorphismus $b_f(p) \subset G^{(n-1)}$. Es ist $b_{f'f''} = b_{f'} b_{f''}$, $b_{f^{-1}} = (b_f)^{-1}$ und $\varrho(b_f, b_g) \leqslant \varrho(f, g)$.

Ist dagegen $\varphi(p) \subset G^{(n-1)}$ gegeben, so erklären wir ein $a^{(\varphi)}(p) \in H^{(n)}$ durch die Festsetzung:

$$a^{(\varphi)}(\vartheta p) = \vartheta \varphi(p), \quad \text{für} \quad p \subset S^{(n-1)} \quad \text{und} \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 1.$$

Es ist

$$a^{(\varphi'\varphi'')} = a^{(\varphi')} a^{(\varphi'')}, \quad a^{(\varphi^{-1})} = (a^{(\varphi)})^{-1},$$

$$\varrho(a^{(\varphi')}, a^{(\varphi'')}) = \varrho(\varphi', \varphi''), \quad b_{a^{(\varphi)}} \equiv \varphi.$$

Ein beliebiges $f(p) \in H_1^{(n)}$ läßt sich nun so schreiben:

(1) $$f(p) = a^{(b_f)} \cdot (a^{(b_f)})^{-1} f(p).$$

Dabei ist diese Zerlegung in Faktoren eindeutig d. h. zwei Abbildungen f und g sind dann und nur dann identisch, wenn gleichzeitig $a^{(b_f)} = a^{(b_g)}$ und $(a^{(b_f)})^{-1} f = (a^{(b_f)})^{-1} g$ ist. Das Element $a^{(b_f)}$ gehört einer topologischen Gruppe an, die offenbar mit $G^{(n-1)}$ stetig isomorph ist, die Elemente $(a^{(b_f)})^{-1} f$ durchlaufen aber die Gruppe $F^{(n)}$. Das heißt aber, daß $H_1^{(n)}$ das direkte Produkt von $F^{(n)}$ und $G^{(n-1)}$ ist:

(2) $$H_1^{(n)} = G^{(n-1)} \times F^{(n)}.$$

Daraus folgt, daß aus II. und α), δ) folgt und ebenso aus II und β), ε). Da $S^{(0)}$ aus zwei Punkten besteht, folgt wegen (2) (für $n=0$) auch γ), aus II.

Nun werden wir beweisen, daß aus γ), α) und aus δ), β) folgt. Aus diesen Implikationen sieht man aber sofort daß III aus II folgt.

Wir kommen zum Beweise von $\gamma) \rightarrow \alpha$).

Es bezeichne zu diesem Zwecke P einen festen Punkt auf $S^{(1)}$. $G(P)$ sei die Untergruppe der Abbildungen aus $G^{(1)}$, die P festlaßen, K dagegen die Gruppe der Drehungen des Kreises $S^{(1)}$. K besitzt eine e. B. da die Drehungen um einen mit π nicht kommensurablen Winkel bekanntlich eine in K dichte Untergruppe erzeugen. Wegen

$$G^{(1)} = G(P) \times K \tag{3}$$

genügt es nachzuweisen, daß $G(P)$ eine e. B. besitzt. Dies folgt aber wegen der vorausgesetzten Richtigkeit von α) daraus daß $G(P)$ mit $H_1^{(1)}$ stetig isomorph ist [7]).

Beweis von: $\delta) \rightarrow \beta$).

Es sei P ein fester Punkt auf $S^{(2)}$, $G(P)$ bezeichne wieder die Untergruppe von $G^{(2)}$, der Abbildungen, die P festlaßen. R_i bezeichne eine Folge von Kugeln mit dem Mittelpunkt P und gegen Null konvergierenden Radien.

Lemma. Wenn $F(p) \subset G(P)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben sind, dann gibt es ein $\Phi(p) \epsilon G^{(2)}$ so, daß

$$|\Phi(p) - F(p)| < \varepsilon \tag{b}$$

und

$$\Phi(R_i \cdot S^{(2)}) = R \cdot S^{(2)} \tag{a}$$

für ein gewisses i gilt.

Beweis. Wir wählen zunächst ein j so groß, daß $\delta(F(R_j \cdot S^{(2)})) < \varepsilon$ wird, dann wird i so bestimmt, daß $R_i \subset R_j$, und $S^{(2)} \cdot R_i \subset F(S^{(2)} \cdot R_j)$ ist. Man setze in $S^{(2)} - S^{(2)} \cdot R_j$: $\Phi(p) \equiv F(p)$; in $S^{(2)} \cdot R_j - S^{(2)} \cdot R_i$ werde Φ so erklärt, daß es auf dem R_j begrenzendem Breitekreise noch mit F übereinstimmt und das Gebiet $S^{(2)} \cdot R_j - S^{(2)} \cdot R_i$ homöomorph auf das Gebiet $F(S^{(2)} \cdot R_j) - S^{(2)} \cdot R_i$ abbildet. (Dies ist sogar auf konforme Weise möglich). Φ erfüllt daher (a). In $S^{(2)} \cdot R_i$ kann man z. B. Φ so erklären, daß man die P mit dem R_i begrenzendem

[7]) Nach einer mündlichen Bemerkung von K. Borsuk.

Breitekreise verbindenden Halbmeridianbögen so aufeinander abbildet, wie Φ es mit ihren Endpunkten tut.

Für $p \epsilon S^{(2)} - S^{(2)} R_j$ ist (b) trivial. Für $p \epsilon R_j$ ist $F(p) \subset F(R_i)$ und auch $\Phi(p) \subset \Phi(R_i) - F(R_i)$. Wegen $\delta(F(S^{(2)} \cdot R_i)) \leqslant \delta(F(S^{(2)} \cdot R_j)) < \varepsilon$ ist auch hier (b) erfüllt.

Das Lemma ist daher bewiesen.

Wir führen auf jedem Halbmeridian, der P mit seiner Antipode P' verbindet, einen Parameter t ein, der von 0 in P', bis 1 in P läuft und erklären die Abbildung $N(p) \subset G(P)$ indem wir einem Punkte mit dem Parameter t, den auf demselben Halbmeridian gelegenen Punkt, mit dem Parameter $\sqrt{t}$ zuordnen. Es bezeichne R die Halbkugeloberfläche $t \leqslant \frac{1}{2}$. Die Mengen $N^i(R)$ werden dann durch Breitekreise begrenzt, die auf um P geschlagenen Kugeln R_i liegen, deren Radien gegen Null konvergieren. Da R mit $K^{(2)}$ homöomorph ist, so folgt aus δ) daß $T(R)$ eine e. B. besitzt. Ein $f \subset T(R)$ kann zu einem $f' \subset G(P)$ erweitert werden (z. B. so wie Φ im Lemma). Es sei $f_1, f_2, \ldots, f_k$ die e. B. in $T(R)$. Wir behaupten, daß $f_1', f_2', f_3', \ldots, f_k'$, N eine e. B. in $G(P)$ bilden Zunächst sieht man sofort daß

$$N^{-i} f_1 N^i(p), \ldots, N^{-i} f_k N^i(p) \tag{3a}$$

eine e. B. in $T(N^i(R))$ bilden. Ist nun ein $F(p) \subset G(P)$ und die positive Zahl 2ε gegeben so nehme man ein Φ laut Lemma und außerdem i so groß, daß

$$\delta(R_i) < \varepsilon \tag{4}$$

ausfällt. Mittels der Abbildungen (3a) kann man wegen (a) und (4) Φ bis auf ε, also F bis auf 2ε approximieren.

Wir haben also bewiesen, daß $G(P)$ eine e. B. besitzt. Wir haben jetzt noch die Bemerkung auf S. 105 anzuwenden indem wir für C, die Gruppe $G^{(2)}$, $A = G(P)$ und für B die Gruppe aller Drehungen der Kugel [8]) nehmen.

Auf Grund der hier gemachten Bemerkungen kann man auch sofort beweisen, daß

$$I(G^{(1)}) = I(G^{(3)}) = I(H_1^{(1)}) = I(H_1^{(2)}) = I(H_1^{(3)}) = 2$$

ist (2 heißt die zyklische Gruppe aus zwei Elementen).

[8]) Diese Gruppe besitzt nämlich eine e. B. von zwei Elementen.

Beweis. Wir bemerken zunächst, daß $F^{(n)}$ zusammenhängend ist. In der Tat ist

$$f(\vartheta, p) = \vartheta f\left(\frac{1}{\vartheta} p\right) \qquad \text{wenn } |p - 0| < \vartheta$$

$$f(\vartheta, p) = p \qquad \text{wenn } 1 \geqslant |p - 0| \geqslant \vartheta$$

ein stetiges Streckenbild, welches das beliege Element $f(p) \subset F^{(n)}$, $f(p) = f(1, p)$ mit dem Element $f(0, p) = e(p)$ verbindet.

Aus der Formel (1) folgt, daß

$$(\times) \qquad I(H_1^{(n)}) = I(G^{(n-1)})$$

ist. Da $S^{(2)}$ aus zwei Punkten besteht, ist $I(G^{(0)}) = 2$, wegen $(\times)$ ist $I(H_1^{(1)}) = 2$.

Nun wenden wir (3) an. In dieser Formel ist $G(P)$ stetig isomorph mit $H_1^{(1)}$, die Drehungsgruppe K ist dagegen zusammenhängend, also $I(G^{(1)}) = 2$. Wegen $(\times)$ ist $I(H_1^{(2)}) = 2$.

Aus dem Lemma folgt, daß $I(G^{(2)}) = I(G(P)) = 2$ ist, denn jede Drehung der Kugel läßt sich stetig in die Identität überführen. Wegen $(\times)$ ist schließlich auch $I(H_1^{(3)}) = 2$.

Für höhere Dimensionen versagt diese Methode, wie auch alle anderen bekannten [9]).

3. Aus den Überlegungen des vorigen Abschnittes folgt, daß zum Beweise der Sätze I—III, der Beweis von I. und II. genügt. Dieser Abschnitt ist dem Beweise von I. gewidmet.

Wir wollen den Satz in der Fassung formulieren, die alles enthält was unsere Methode liefert.

Satz. *Es gibt drei Abbildungen $\varphi(p)$, $\psi(p)$ und $\chi(p) \subset H_2^{(n)*}$, derart, daß die Abbildungen*

$$(1) \qquad \Phi(p) = \varphi^k \psi^{-s} \chi \psi^s \varphi^{-k}(p) \quad k = 1, 2, \ldots; \ s = 1, 2, \ldots.$$

im $H_2^{(n)*}$ überall dicht liegen d. h.:

wenn ein $F(p) \subset H_2^{(n)*}$, eine im Innern von $K^{(n)}$ enthaltene Kugel K und eine positive Zahl ε gegeben sind, dann gibt es ein $\Phi(p)$ der Gestalt (1), *so daß*

$$|F(p) - \Phi(p)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad p \in K$$

gilt.

[9]) S. v. Kerékjártó, *Vorlesungen über Topologie*, J. Springer Berlin 1923, p. 186 ff.

Man sieht also, daß zur Approximation nur Abbildungen der speziellen Gestalt (1) verwendet werden. Die Abbildungen (1) sind aber alle *Transformierte* [10]) einer und derselben Abbildung $\chi(p)$ und dabei werden als *transformierende* Abbildungen nur Abbildungen einer Gruppe mit zwei Erzeugenden φ und ψ angewendet [11]).

Beweis. Wir betrachten ein Polarkoordinatensystem $(r, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})$ mit dem Anfang in 0. $\varphi(p)$ ordne dem Punkte $r(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})$ der Punkt $(\sqrt{r}, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})$ zu. Es sei weiter $(\bar{r}, \bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_{n-1})$ ein zweites Polarkoordinatensystem dessen Anfang in $P = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, also auf $S^{(n-1)}$, liegt. Es sei $\bar{r} = \bar{r}(\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_{n-1})$ die Gleichung von $S^{(n-1)}$ in diesen Koordinaten. $\overline{\psi}(p)$ ordne dem Punkte $(\varrho, \bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_{n-1})$ den Punkt $\left(\frac{\varrho^2}{\bar{r}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_{n+1})}, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_{n-1}\right)$ zu. $(\overline{\psi}(P) = P)$.

Man sieht, das φ und $\overline{\psi}$ Automorphismen der Kugel $K^{(n)}$ sind.

Wir bezeichnen mit Q_0 die Kugel $K_2^{(n)}$ (vom Radius $\frac{1}{2}$) $Q_k = \varphi^k(Q_0)$ sind mit $K^{(n)}$ konzentrische Kugeln, deren Radien gegen Eins konvergieren.

Die Zahl l kann so groß gewählt werden, daß die Mengen

$$\overline{\psi}^l(Q_0), \quad \overline{\psi}^{2l}(Q_0), \quad \overline{\psi}^{3l}(Q_0), \ldots$$

die wir mit $J_1, J_2, J_3, \ldots$ bezeichnen wollen, paarweise elementfremd sind.

Man nehme $\psi(p) = \overline{\psi}^l(p)$.

Es ist:

$$(2) \qquad \lim \delta(J_n) = 0$$

und, wenn

$$(3) \qquad p_n \subset J_n \quad \text{so} \quad \lim p_n = P.$$

Der Raum aller topologischen Automorphismen der Kugel Q_0 ist Teilraum des Raumes $Q_0^{Q_0}$ aller stetigen Abbildungen von Q_0

[10]) f ist eine Transformierte von g, wenn es ein h gibt, so daß $f = h^{-1} g h$ gilt; h wird dann die transformierende Abbildung genannt.

[11]) Es kann gezeigt werden, daß als Erzeugende dieser Gruppe eine Abbildung φ und die Abbildung χ, die transformiert wird, gebraucht werden können. Daraus folgt, daß $H_2^{(n)*}$ eine Basis aus zwei Elementen besitzt, dies kann auch für $H_1^{(1)}$ bewiesen werden. Dieser Umstand kann zur in Fußnote [2]) erwähnten Erniedrigung der Funktionenzahl von 5 auf 4 benutzt werden. Dies geschieht jedoch direkt und einfacher in einer Note von W. Sierpiński, dieser Band, S. 119.

auf eine Teilmenge von Q_0, der bei der Metrik $\varrho(f,g) = \underset{p \subset Q_0}{\mathrm{Max}} |f(p) - g(p)|$ separabel ist.

Also gibt es eine Folge von Automorphismen von Q_0:

$$(4) \qquad f_1(p), f_2(p), f_3(p), \dots$$

derart, daß wenn $f(p)$ und $\varepsilon > 0$ gegeben sind, es ein $f_i(p)$ gibt, so daß

$$|f(p) - f_i(p)| < \varepsilon \quad p \subset Q_0$$

gilt. Dabei beschränken wir uns natürlich auf Abbildungen f und f_i die sich stetig in die Identität deformieren lassen.

Die Abbildung $\psi^s f_s \psi^{-s}(p)$ ist wegen $\psi^s(Q_0) = J_s$ ein topologischer Automorphismus von J_s.

Wir setzen für $p \in J_s$:

$$(5) \qquad \chi(p) = \psi^s f_s \psi^{-s}(p).$$

Wir wollen diese Definition von χ, auf ganz $K^{(n)}$ erweitern. Wir betrachten zu diesem Zwecke die Bilder $J'_s = \psi_s(Q'_0)$ einer mit Q_0 konzentrischen Kugel mit dem Radius $\frac{1}{2} + \eta$, wo $\eta > 0$ so klein ist, daß J'_s paarweise elementfremd sind und (2) und (3) (mit J' anstatt J) weiterhin erfüllt bleibt.

Es sei $f_s(\vartheta, p)$ (für $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$) eine stetige Schar von Automorphismen, so daß $f_s(1, p) = p$ und $f_s(0, p) = f_s(p)$ gilt.

Auf der Oberfläche der mit Q_0 konzentrischen Kugel mit dem Radius $\frac{1}{2} + \vartheta\eta$ erklären wir $f_s(p)$ durch die Formel

$$f_s(p) = \frac{\frac{1}{2} + \vartheta\eta}{\frac{1}{2}} f_s\left(\vartheta, \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \vartheta\eta} p\right).$$

Diese $f_s(p)$ sind Automorphismen der Kugel Q'_0, dabei ist auf der Oberfläche von Q'_0, immer $f_s(p) = p$.

Formel (5) erklärt jetzt $\chi(p)$ für jedes $p \in J'_s$, dabei ist auf der Oberfläche von jedem J'_s: $\chi(p) = p$. Setzt man noch $\chi(p) = p$ in $K^{(n)} - \Sigma J'_s$ und beachtet (2) und (3), so bietet der Nachweis, daß dieses $\chi(p)$ ein topologischer Automorphismus der Kugel $K^{(n)}$ ist, keinerlei Schwierigkeiten.

Wir werden jetzt zeigen, daß φ, ψ und χ die im Satz behauptete Eigenschaft besitzen.

Es sei also $F(p) \subset H_2^{(n)*}$, $\varepsilon > 0$, und $K' \subset K^{(n)}$ gegeben. Mit $K(\vartheta)$ bezeichnen wir, die mit $K^{(n)}$ konzentrische Kugel, mit dem

Radius ϑ. $F_\vartheta(p) = \vartheta F\left(\frac{1}{\vartheta} p\right)$ ist dann ein topologischer Automorphismus von $K(\vartheta)$. Dabei ist

$$|F(p) - F_\vartheta(p)| = \left|F(p) - \vartheta F\left(\frac{1}{\vartheta} p\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|F(p) - F\left(\frac{1}{\vartheta} p\right)\right| + \left|F\left(\frac{1}{\vartheta} p\right) - \vartheta F\left(\frac{1}{\vartheta} p\right)\right| \quad \text{für} \quad p \subset K(\vartheta).$$

Wenn also ϑ hinreichend nahe bei 1 liegt $(\vartheta > 1 - \alpha(\varepsilon))$, ist

$$(6) \qquad |F(p) - F_\vartheta(p)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{für} \quad p \subset K(\vartheta).$$

Wir wählen k so groß, daß Q_k K' enthält und der Radius ϑ_k von Q_k größer als $1 - \alpha(\varepsilon)$ ausfällt.

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $\varphi^k(p)$, kann so ein $\delta(\varepsilon)$ gefunden werden, daß aus

$$|p - q| < \delta,$$

$$(7) \qquad |\varphi^k(p) - \varphi^k(q)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad p, q \in K^{(n)}$$

folgt.

Wir setzen

$$(8) \qquad f(p) = \varphi^{-k} F_{\vartheta_k} \varphi^k(p) \quad \text{für} \quad p \in Q_0$$

$f(p)$ ist ein topologischer Automorphismus von Q_0. Es gibt daher ein s, so daß

$$(9) \qquad |f(p) - f_s(p)| < \delta \qquad p \subset Q_0$$

ist. Wir setzen

$$\Phi(p) = \varphi^k \psi^{-s} \chi \psi^s \varphi^{-k}(p) \qquad p \subset K^{(n)}$$

und behaupten, daß $|\Phi(p) - F(p)| < \varepsilon$ für $p \subset K'$ ist.

Für $p \subset K' \subset Q_k$ ist nämlich $\varphi^{-k}(p) \subset Q_0$, also $\psi^s \varphi^{-k}(p) \subset J_s$, daher hat man in Φ für $\chi(p)$ laut Formel (5) $\psi^s f_s \psi^{-s}(p)$ einzusetzen. Dies gibt für $p \subset K'$

$$\Phi(p) = \varphi^k f_s \varphi^{-k}(p).$$

Für $p \subset K'$ haben wir

$$(10) \qquad |\Phi(p) - F_{\vartheta_k}(p)| = |F_{\vartheta_k}(p) - \varphi^k f_s \varphi^{-k}(p)| =$$

$$= |\varphi^k \varphi^{-k} F_{\vartheta_k}(p) - \varphi^k f_s \varphi^{-k}(p)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

was aus (7) wegen

$$(11)\qquad |\varphi^{-k} F_{\vartheta_k}(p) - f_s \varphi^{-k}(p)| < \delta$$

folgt. Die Formel (11) aber, folgt aus (8) und (9) wenn man für p $\varphi^{-k}(p)$ einsetzt und so den Gültigkeitsbereich dieser Formeln von Q_0 auf $Q_k \supset K'$ erweitert.

Die Formeln (6) und (11), geben unter Beachtung von $\vartheta_k > 1 - \alpha(\varepsilon)$ die gesuchte Approximationsformel:

$$|\Phi(p) - F(p)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad p \in K' \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Wir schließen mit der folgenden Bemerkung. Die Abbildung $\chi(p)$ hat einen ziemlich komplizierten Charakter. Es wäre für verschiedene Anwendungen von Bedeutung unseren Satz mit solchen Abbildungen zu beweisen, die ähnlich wie φ und ψ, eine einfache anschaulich-geometrische oder analytische Definition erlauben würden.

4. Die im vorigen Abschnitt konstruierten drei Abbildungen φ, ψ, χ haben die Eigenschaft jeden Punkt auf $S^{(n-1)}$ festzulassen, gehören also zu $F^{(n)}$. Wenn man daher für ein $F(p) \subset F^{(n)}$, für eine Folge gegen Null konvergenter Zahlen $\varepsilon_i > 0$, und für die Folge der Kugeln $K_i^{(n)}$ den Satz aus 3. anwendet, so erhält man eine Folge von Abbildungen $\Phi_i(p) \subset \Pi(\varphi, \psi, \chi)$ für die $\lim \Phi_i(p) = F(p)$ in ganz $K^{(n)}$ gilt, doch braucht die Konvergenz nicht gleichmäßig zu sein. (Ausgenommen den Fall $n = 1$, da eine gegen einen Automorphismus konvergierende Folge von Automorphismen des Intervalls schon notwendig, wie sich leicht zeigen läßt, gleichmäßig konvergiert).

Wir wollen nun die Abbildungen φ, ψ, χ so abändern, daß wir die gleichmäßige Konvergenz in ganz $K^{(n)}$ behaupten werden können. Wir beschränken uns dabei, der Einfachheit halber, auf den Fall $n = 2$. Die höheren n können ebenso behandelt werden.

Der Kreis $K^{(2)}$ liege in der (x, y) Ebene mit den Polarkoordinaten (r, α). $r = \frac{1}{2}$ sei die Gleichung des Kreises Q_0. Wir betrachten auf Q_0 die Punkte $C\left(r = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{\pi}{2} + \alpha_1\right)$, $D\left(r = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha_1\right)$ und ihre symmetrischen Bilder $C'\left(r = \frac{1}{2}, \quad \alpha = -\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right)$, $D'\left(r = \frac{1}{2}, \quad \alpha = -\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right)$ $\left(\alpha_1 \text{ ein fester Winkel} < \frac{\pi}{4}\right)$. Den Punkt $\left(r = \frac{1}{2}, \frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ verbinde man mit dem Punkte $P(r = 1, \alpha = 0)$, wenn $\alpha \leqslant -\alpha_1$, mit dem Punkte $R(r = 1, \alpha = \pi)$ für $\alpha \geqslant \alpha_1$ und mit dem Punkte $\left(r = 1, \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha\pi}{2\alpha_1}\right)$ wenn $|\alpha| \leqslant \alpha_1$ ist und ebenso symmetrisch unterhalb der x-Achse. Den in (0, 0) beginnenden, unter dem Winkel α bis zur Peripherie von Q_0 und von dort bis zur Peripherie von $K^{(2)}$ mit einer der oben definierten Verbindungsstrecken, laufenden Streckenzug nenner wir $L(\alpha)$.

Auf jedem $L(\alpha)$ führen wir einen Parameter $t (0 \leqslant t \leqslant 1)$, der von 0 in (0, 0) bis 1 auf $S^{(2)}$ läuft, ein. Dem Punkte mit dem Parameter t ordnen wir den auf demselben $L(\alpha)$ gelegen Punkt mit dem Parameter $\sqrt{t}$ zu. Auf diese Weise ist eine Abbildung $\varphi_1(p) \subset F^{(2)}$ erklärt worden. Wenn man nun, wie in Abschnitt 2. die Mengen $\varphi_1^k(Q_0)$ mit Q_k bezeichnet, so umfaßt Q_k einen beliebigen, ganz im Innern von $K^{(2)}$ gelegenen Kreis K', wenn nur k hinreichend groß ist.

Die Strecke RC, der Kreisbogen CD und die Strecke DP bestimmen zusammen das Bild einer, im Intervall $(-1, +1)$ erklärten, stetigen Funktion $y = f(x)$.

Ist nun $|\vartheta| \leqslant 1$ so bezeichne $M(\vartheta)$ das Bild der Funktion $y = \vartheta f(x)$. Auf jedem $M(\vartheta)$ führen wir einen Parameter t ein, der von 0 in R bis 1 in P läuft und ordnen dem Punkte mit dem Parameter t, den auf demselben $M(\vartheta)$ gelegenen Punkt, mit dem Parameter $\sqrt{t}$ zu. Diese Abbildung erweitern wir noch oberhalb von $M(1)$ und unterhalb von $M(-1)$ zu einem Automorphismus $\psi_1(p)$, so daß $\overline{\psi}_1 \subset F^{(2)}$ ist

Die Mengen $\psi_1^s(Q_0)$ (bei positiven und negativen s) liegen zwischen $RCDP$ und seinem symmetrischem Bild unter der x-Achse.

Wir nennen T_1 das Gebiet RCC', T_2 das Gebiet PDD'. Das Gebiet $T_1 + T_2 + Q_0$ geht bei den Abbildungen $\overline{\psi}_1^s$ in sich selbst über.

Bei hinreichend großem j, hat $\psi_1 = \overline{\psi}_1^j$ die Eigenschaft, daß die Mengen $J_s = \psi_1^s(Q_0)$ paarweise elementfremd sind und $\lim \delta(J_s) = 0$ ist. Wieder ist auch, wenn $p_s \subset J_s$, $\lim p_s = P$.

Nun können die Überlegungen des vorigen Abschnittes wörtlich wiederholt werden (man braucht jetzt nur nicht mehr die Mengen J_s durch J_s' zu ersetzen weil die $f_i(p)$ der Folge (4), wegen der Beschränkung auf $F^{(2)}$, gleich so genommen werden können, daß

$f_t(p)=p$ ist, auf der Peripherie von Q_0) und wir erhalten, wenn $F(p)\subset F^{(2)}$, $\varepsilon>0$, und k beliebig gegeben sind ein

$$\Phi(p)=\varphi_1^k\,\psi_1^{-s}\,\chi\,\psi_1^s\,\varphi_1^{-k}(p)$$

so daß

(1) $$|\Phi(p)-F(p)|<\varepsilon \quad \text{für} \quad p\in Q_k$$

gilt.

Wir wählen k so groß, daß erstens

(2) $$|F(p)-p|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad p\in K^{(2)}-Q_k$$

gilt (Dies ist immer möglich, weil auf $S^{(2)}$ $F(p)=p$ ist, also (2) außerhalb einem mit $K^{(2)}$ konzentrischen Kreis, der von Q_k, bei hinreichend großem k umfaßt wird, erfüllt ist) und zweitens so, daß

(3) $$\delta(T_1(K^{(2)}-Q_k))<\frac{\varepsilon}{2}$$

(4) $$\delta(T_2(K^{(2)}-Q_k))<\frac{\varepsilon}{2}$$

wird.

Wir behaupten, daß dann (1) in ganz $K^{(2)}$ erfüllt ist. Es bleibt also (1) für $p\in K^{(2)}-Q_k$ zu beweisen. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1) $p\,\bar{\epsilon}\,T_1+T_2$. Dann ist $S_1^{-k}(p)\,\bar{\epsilon}\,Q_0+T_1+T_2$, also auch $\psi_1^s\varphi_1^{-k}(p)\,\bar{\epsilon}\,Q_0+T_1+T_2$. ($\psi_1$ führt, wie bemerkt wurde $Q_0+T_1+T_2$ in sich über).

Außerhalb von $Q_0+T_1+T_2$ ist aber $\chi(p)=p$, daher ist in diesem Falle $\Phi(p)=p$, also wegen (2), gilt (1).

2) $p\in T_1+T_2$. Dann ist $\varphi_1^{-k}(p)\in T_1+T_2$, also $\psi_1^s\varphi_1^{-k}(p)\in Q_0+$ $+T_1+T_2$ und $\psi_1^s\varphi_1^{-k}(p)\,\bar{\epsilon}\,J_s$, also $\chi\psi_1^s\varphi_1^{-k}(p)\in T_1+T_2+Q_0-J_s$, daher $\psi_1^{-1}\chi\psi_1^s\varphi_1^{-k}(p)\in T_1+T_2$ (und $\bar{\epsilon}\,Q_0$!).

Es ist also

$$\Phi(p)\in(T_1+T_2)(K^{(2)}-Q_0).$$

Dabei bestätigt man ebenso, daß aus $p\in T_1$, $\Phi(p)\in T_1$ und aus $p\in T_2$, $\Phi(p)\in T_2$ folgt. Die Anwendung von (3) und (4) ergibt

$$|\Phi(p)-p|<\frac{\varepsilon}{2},$$

Daraus und aus (2) folgt (1) auch in diesem Falle, womit unsere Behauptung vollständig erwiesen ist.

5. Wir wollen in diesem Abschnitt den Fall der stetigen, nicht notwendig eineindeutigen, Abbildungen behandeln.

Wir werden folgenden Satz beweisen:

Es gibt drei stetige Abbildungen von $K^{(n)}$ auf seine Teilmenge. $\chi(p)$, $\mu(p)$, $\mu_1(p)$ und einem Automorphismus von $K^{(n)}$, $\psi(p)$ so, daß die Abbildungen.

(1ᵃ) $$\Phi_s(p)=\mu\,\psi^{-s}\,\chi\,\psi^s\,\mu_1(p)$$

jede andere beliebig genau approximieren d. h. zu jeder stetigen Abbildung $F(p)$, von $K^{(n)}$ auf ein Teilmenge von $K^{(n)}$, und jeder positiven Zahl ε gibt es ein $s(F,\varepsilon)$ so, daß

$$|\Phi_s(p)-F(p)|<\varepsilon \qquad p\in K^{(n)}$$

gilt.

Beweis. Die Abbildungen μ,μ_1,ψ und χ werden, wie folgt, erklärt.

$\mu(p)$ ordnet dem Punkte mit den Polarkoordinaten $(r,\xi_1,\dots,\xi_{n-1})$ den Punkt $(2r,\xi_1,\dots,\xi_{n-1})$ wenn $r\leqslant\frac{1}{2}$ und den Punkt $(1,\xi_1,\dots,\xi_{n-1})$ wenn $r\geqslant\frac{1}{2}$ ist, zu. $\mu(p)$ bildet also Q_0 auf ganz $K^{(n)}$ homöomorph ab.

$\mu_1(p)$ ordnet dem Punkte p de Punkt $\frac{1}{2}p$, zu, es bildet also $K^{(n)}$ auf Q_0 homöomorph ab.

$\psi(p)$ erklären wir genau so, wie in Abschnitt 3, und bezeichnen wieder mit J_s die Menge $\psi^s(Q_0)$.

Wenn noch

(1) $$f_1(p),\ f_2(p),\dots$$

eine in Raume $K^{(n)\,K^{(n)}}$ überall dichte Folge bezeichnet, so setzen wir

(2) $$\chi(p)=\psi^s f_s\,\psi^{-s}(p) \quad \text{für} \quad p\in J_s.$$

Nach allgemeinen Sätzen (Tietze) läßt sich $\chi(p)$ zu einer stetigen Abbildung von ganz $K^{(n)}$ erweitern.

Nun sei ein beliebiges $F(p)\subset K^{(n)K^{(n)}}$ und eine positive Zahl ε gegeben.

Man bemerkt, daß wenn $f(p)$ in Q_0 erklärt ist $\mu_1 F\mu(p)$ bzw. $\mu f\mu_1(p)$ in Q_0 bzw. $K^{(n)}$ erklärt sind. Dabei ist

(3) $$\varrho(f,\mu_1F\mu)=\tfrac{1}{2}\,\varrho(\mu f\mu_1,F)$$

In der Folge (1) gibt es ein f_s so, daß

$$(4) \qquad |f_s(p) - \mu_1 F \mu(p)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad p \in Q_0$$

ist. Wir behaupten, daß

$$(5) \qquad |\Phi_s(p) - F(p)| < \varepsilon \qquad p \in K^{(n)}$$

ist. Es ist nämlich $\mu_1(p) \in Q_0$ also $\psi^s \mu_1(p) \in J_s$.

Laut (2) und (1^a) ist daher

$$\Phi_s(p) = \mu f_s \mu_1(p).$$

Dies gibt aber, mit Rücksicht anf (3) und (4) die gewünschte Ungleichung (5).

Dieser Satz, angewendet für $n=1$, ergibt die Lösung des am Anfang dieser Arbeit gestellten Problems:

Es gibt fünf Funktionen ($\mu(x)$, $\mu_1(x)$, $\psi(x)$, $\psi^{-1}(x)$, $\chi(x)$) so daß jede andere im Intervall $\langle 0, 1 \rangle$ erklärte, stetige Funktion, deren Werte demselben Intervall angehören, durch Zusammensetzen dieser fünf Funktionen, beliebig genau approximiert werden kann.

Sur l'approximation des fonctions continues par les superpositions de quatre fonctions.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

MM. J. Schreier et S. Ulam ont démontré dans ce volume un théorème, dont un cas particulier (pour l'espace linéaire) est la proposition suivante:

Il existe cinq fonctions définies et continues dans l'intervalle I ($0 \leqslant x \leqslant 1$) et dont les valeurs appartiennent à I, telles que toute autre fonction de même nature peut être approximée aussi près que l'on veut par une superposition (finie) de ces cinq fonctions.

Le but de cette Note est de donner une démonstration directe de cette proposition (même en y remplaçant le nombre 5 par 4). Nous la déduirons immédiatement du lemme suivant:

Lemme: *$f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$,... étant une suite infinie donnée de fonctions continues, définies dans l'intervalle I ($0 \leqslant x \leqslant 1$) et ne prenant que des valeurs de cet intervalle, il existe quatre fonctions de même nature, telles que toute fonction de la suite infinie considérée est une superposition (finie) de ces quatre fonctions.*

Démonstration. Définissons dans I les fonctions $\varphi(x)$, $\vartheta(x)$ et $\chi(x)$ par les formules

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi(x) = 4x \text{ pour } 0 \leqslant x < \frac{1}{4}, \quad \varphi(x) = 1 \text{ pour } \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 1, \\ \qquad \vartheta(x) = \dfrac{x}{4}, \quad \chi(x) = \dfrac{x+1}{2} \end{cases}$$

et définissons dans I la fonction $\psi(x)$ comme il suit.