2°-Assegnato un dominio deduttivo (che potrà essere quello definito dai numeri naturali o un suo conveniente ampliamento) determinare le proposizioni che possono dimostrarsi in esso.

Potrà pure, a fianco di questi problemi di *dimostrabilità*, porsi una domanda indipendente relativa alla *verità* o alla *asseribilità* delle proposizioni, in quanto non mancano esempi di proposizioni le quali hanno senso in un dominio deduttivo, mentre non se ne conosce una dimostrazione che si svolga interamente in esso: tali sono frequentemente le proposizioni per le quali si eleva la riserva dell'uso delle infinite scelte. La risposta affermativa o negativa a tale domanda non può evidentemente sottrarsi a una maggiore soggettività del giudizio: a mio parere, ritengo si debbano accogliere per vere in un determinato dominio deduttivo anche quelle proposizioni per le quali il fatto enunciato è identificabile in detto dominio, pure quando ad esso ne sfugga la dimostrazione.

Ricerche assiomatiche sulle teorie delle funzioni d'insieme e dell'integrale di Lebesgue.

Di

Tullio Viola (Bologna)

Introduzione.

1. Il presente lavoro intende contribuire a precisare i procedimenti di costruzione e di dimostrazione di enti e di teoremi analitici nei quali direttamente o indirettamente si deve far capo alle infinite scelte. Il punto di vista da cui ci mettiamo potrebbe chiamarsi „conciliativo", in quanto cerca di dare una giustificazione di molti procedimenti matematici che fanno uso del noto postulato di *E. Zermelo* [11, a, b]. Nella breve bibliografia che faccio seguire all' articolo sono indicate, fra le altre, le pubblicazioni del Levi nelle quali il suo „*principio di approssimazione*" si trova per la prima volta enunciato ed applicato [4, a, b]. Sono pure indicate due piccole note [9, a, b] da me pubblicate su questo argomento nel Bollettino dell' Unione Matematica Ital., le quali costituiscono un preliminare utile e parte integrante del presente lavoro.

2. Nell' articolo che precede questo nostro lavoro in questo stesso volume, il prof. Levi ricorda le definizioni di „*dominio deduttivo*" e di „*aggregati primi*" e l'enunciato del suo „*principio di approssimazione*". In molti casi in cui si afferma abitualmente un' applicazione del postulato di Zermelo, si tratta in verità di un *ampliamento del dominio deduttivo*, mediante l'aggiunta di nuovi aggregati primi. In altri casi, invece, il postulato di Zermelo viene effettivamente applicato in astratto, cioè senza precisazione del dominio deduttivo in cui si operano le scelte arbitrarie, ed è allora che la sua legittimità ci pare discutibile. Tali sono ad esempio quasi tutte

le proposizioni che s'incontrano nella teoria dei numeri transfiniti [Sierpiński, b; Viola, a, n. 1].

Noi ci proponiamo quindi, esaminando alcuni casi concreti, di realizzare un progresso dal punto di vista della correttezza logica e di penetrare più profondamente nell'analisi concettuale delle proposizioni. Ampliare un ben determinato dominio deduttivo è, se si vuole, sempre lecito e in molti casi può essere anche consigliabile, se non altro a scopo didattico, se le dimostrazioni ne guadagnano in semplicità e chiarezza. D'altronde dal punto di vista euristico, cioè come *mezzo* di ricerca, non sarebbe opportuno nè forse possibile eliminare il postulato di Zermelo. Proposizioni come quelle che esamineremo ai n. i 5, 7, come il lemma del teor. di Vitali (n. 10) ed altre, sono state trovate con dimostrazioni assai semplici facendo uso del postulato di Zermelo, e noi riusciremo a confermarle liberandone totalmente le dimostrazioni dal detto postulato. Il progresso che noi desideriamo poi realizzare in una dimostrazione in cui l'uso del postulato di Zermelo sia indispensabile, consiste, se è possibile, nel *regolarizzare* la dimostrazione mediante il principio di approssimazione. E mi pare che dal presente lavoro debba risultare evidente che il principio di approssimazione di Levi esprime in termini esatti e soddisfacenti il concetto intuitivo e d'altronde spesso un po' vago che noi siamo soliti attribuire alla parola „approssimazione" [Cfr. Levi, a, p. 324] e non è una convenzione artificiosa che dissimuli il postulato di Zermelo medesimo.

3. Nella seconda delle mie citate note ho mostrato che il principio di approssimazione permette di regolarizzare il seguente teorema fondamentale della teoria della misura degl' insiemi lineari di punti: *la somma di una successione d'insiemi misurabili contenuti in un medesimo intervallo e non aventi, due a due, alcun punto in comune, è un insieme misurabile e la sua misura è la somma delle misure degl' insiemi che compongono la soma.* Precisamente, indicati con $E_1, E_2, \ldots$ gl' insiemi della successione e con E la loro somma, delle due relazioni

$$m_i(E) \geqslant \sum_{r=1}^{\infty} m(E_r), \quad m_e(E) \leqslant \sum_{r=1}^{\infty} m(E_r),$$

che permettono di concludere $m(E) = \sum_{r=1}^{\infty} m(E_r)$, la prima si può dimostrare facendo uso soltanto di *un numero finito* di scelte arbitrarie [1]), la seconda di un' infinità numerabile di scelte arbitrarie, ma in modo da soddisfare al principio di approssimazione. Su questo teorema si basano le proposizioni più importanti relative alle funzioni misurabili [3, a, p. 118 e seg.] per le quali, com' è noto, è definito il procedimento d'integrazione del Lebesgue. Se ora si riflette che il ricordato teorema della teoria della misura viene applicato nelle dimostrazioni delle proposizioni più fondamentali relative all' integrale di Lebesgue [2]), si vede come anche queste dimonstrazioni vengano a dipendere, sebbene indirettamente, dal postulato di Zermelo, ma come anch' esse divengano accettabili in base al principio di approssimazione.

Mi permetto qui di ricordare come le stesse difficoltà si sia proposto di superare il Tonelli mediante le definizioni di „pseudointervallo" e di „funzione quasicontinua". Ma il procedimento del Tonelli implica una effettiva limitazione della classe di funzioni alla quale riesce applicabile l'integrazione nel senso del Lebesgue, limitazione che tuttavia non è forse lontana dagl' intendimenti del Lebesgue medesimo [3]), [4]). L'affermazione del Tonelli che la classe delle funzioni quasicontinue è più ristretta di quella delle

[1]) Donde segue che, senza far uso del postulato di Zermelo, si può dimostrare la proposizione seguente: *se $G_1, G_2, \ldots$ è una successione d'insiemi misurabili contenuti in un medesimo intervallo e ciascuno nel precedente e se* è $\lim_{r\to\infty} m(G_r) = 0$, *allora l'insieme G comune a tutti i G_r ha misura nulla.* Basta infatti trasformare la successione dei complementari CG_r in una successione d'insiemi non aventi, due a due, alcun punto in comune e la cui somma è CG.

[2]) Come per esempio nella seguente:

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b \varphi(x)\, dx.$$

[3]) „On doit exiger de la démonstration de l'existence d'une catégorie d'êtres mathématiques qu'elle contienne l'énoncé des caractéristiques logiques d'*un* de ces êtres, mais cela seulement. Il est souhaitable que cet énoncé conduise au moins dans les cas plus simples à un procédé de construction effective de l'être défini et que ce procédé soit d'autant plus régulier et précis que les données sont plus particulières" [3, c, p. 137. Vedi anche d, nota 2 alla p. 259].

[4]) Si leggano a questo proposito in [7, a] la definizione di „pseudointervallo", p. 122, n. 40, a), e la condizione della p. 124, n. 40, e) a cui si deve sempre intendere sottoposta una successione di pseudointervalli; la definizione di „funzione quasicontinua", p. 131, n. 42, e la condizione della p. 135, n. 45, a) relativa alle successioni di funzioni quasicontinue; ecc.

funzioni misurabili trova la sua spiegazione nel torema, di N. Lusin [5, a, b] che *ogni funzione misurabile $f(x)$ è continua a prescindere dai punti interni a un insieme d'intervalli non sovrapponentisi avente misura piccola ad arbitrio.* Non conoscendosi una legge generale per la formazione di questo insieme d'intervalli non si può affermare che ogni funzione misurabile sia quasicontinua nel senso del Tonelli. La dimostrazione del teor. di Lusin si basa sopra un altro teorema di D. Th. Egoroff [2]. Il lettore potrà analizzare quella dimostrazione e convincersi facilmente che essa fa uso del postulato di Zermelo e che non può essere regolarizzata col principio di approssimazione [Cfr. 9, a, n. 5].

Sulle funzioni d'insieme.

4. Prendiamo in esame alcune proposizioni fondamentali della teoria delle funzioni d'insieme nella dimostrazione delle quali si fa uso d'infinite scelte arbitrarie [5]).

Ogni funzione d'insieme finita e completamente additiva è limitata.

Questa proposizione è vera in un ampliamento naturale del domino deduttivo degli aggregati di numeri reali [6]). Consideriamo infatti una funzione d'insieme $\Psi(E)$ non limitata in un intervallo $\overline{ab}$. Si tratta di construire un aggregato E tale che $|\Psi(E)| = \infty$. Osserviamo perciò che esiste allora almeno un punto di $\overline{ab}$ in cui $\Psi(E)$ non è limitata. Supponiamo per semplicità che l'estremo b sia un tale punto. Sia $a, a_1, a_2, \ldots$ una successione di valori crescenti tendente a b. Il Lebesgue dimostra che la serie $\sum_1^\infty N_i$, il cui termine generale N_i (eventualmente infinito) è il limite superiore dei valori $|\Psi(E)|$ per gl' insiemi E formati di punti dell' intervallo semichiuso $\overline{a_{i-1}\, a_i}$, è divergente.

Assegnata una successione di numeri positivi $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ tali che $\Sigma\, \varepsilon_i$ sia convergente, *si suppone* che si possa scegliere in ciascun intervallo $\overline{a_{i-1}\, a_i}$ un aggregato e_i tale che $\Psi(e_i)$ sia compreso fra $N_i - \varepsilon_i$ e N_i (tale ipotesi essendo contenuta nel fatto che la funzione d'insieme Ψ è definita nel dominio deduttivo degli aggregati di numeri reali). L'aggregato $E = \sum_i e_i$ soddisfa allora alla $|\Psi(E)| = \infty$, ma la sua definizione dipende da infinite scelte arbitrarie.

Indichiamo con S una generica succesione d'insiemi e_i ciascuno dei quali sia formato rispettivamente di punti dell' intervallo semichiuso $\overline{a_{i-1}\, a_i}$. Se S', S'' sono due di tali successioni, definiamo la „funzione regolatrice" [7])

$d(S', S'')$ = limite superiore delle distanze $|a' - a''|$, per tutte le coppie di punti appartenenti rispettivamente ad S' e ad S'' ma non ad entrambe.

E' chiaro che è $d(S', S'') = 0$ sempre e solo quando è $S' = S''$.

Fissiamo una qualunque delle succesioni S. Assegnato ad arbitrio un numero positivo δ, sia n tale che $b - a_n < \delta$. Se S', S'' sono altre due di dette successioni aventi in comune con S i primi n insiemi e_i, si ha $d(S', S'') < \delta$, perchè S' ed S'' possono non avere in comune soltanto punti appartenenti ad $\overline{a_n\, b}$. Dunque una qualunque delle successioni S appartiene all' ampliamento naturale del detto domino deduttivo, definito dalla funzione $d(S', S'')$. Questa regolarizzazione delle infinite scelte arbitrarie con cui s'immagina costruita la S non è che una generalizzazione, del resto assai evidente, di quella che abbiamo data in [9, a, n. 2].

5. *Una funzione d'insieme, finita e completamente additiva, è a variazione limitata.*

Questa proposizione presuppone che una tale funzione sia limimitata (n° 4). Introducendo esplicitamente questa condizione noi enunciamo:

Una funzione d'insieme, limitata e completamente additiva, è a variazione limitata,

e ragioniamo in modo da eseguire soltanto un numero *finito* di scelte arbitrarie.

Ci proponiamo precisamente di mostrare che una tale funzione è la differenza di due funzioni completamente additive che assumono soltanto valori positivi o nulli. Anche qui seguiremo il Lebesgue [8]),

[5]) H. Lebesgue a, pp. 145 e segg.

[6]) Non si tratta del dominio deduttivo dei numeri che è il più abituale nell' analisi, nè di quello delle funzioni, pure frequente ma meno avvertito. Qui gli enti che si concepiscono come individui intuitivi (e che non si potrebbe fare altrimenti senza incappare davvero in un' applicazione irreduttibile del postulato di Zermelo) sono proprio gli aggregati. Ora questo è assai meno avvertito abitualmente che non sia anche il dominio delle funzioni.

[7]) Levi b, p. 170.

[8]) Lebesgue a, pp. 146, 147.

e daremo per esteso l'intera dimostrazione che è meno semplice di quella del numero precedente.

Sia $\Psi(E)$ una funzione d'insieme limitata e completamente additiva in $\overline{ab}$. Indichiamo rispettivamente con $P(E)$ e con $-N(E)$ il limite superiore e quello inferiore di $\Psi(e)$ per tutti gl' insiemi e (ivi compreso l'insieme nullo per il quale è $\Psi(e)=0$) contenuti in E [9]). E' dunque, per ogni E, $-N(E)\leqslant 0\leqslant P(E)$. Le due funzioni $N(E)$ e $P(E)$, evidentemente limitate, sono anche completamente additive. Dimostriamolo per $P(E)$.

Sia $E_1, E_2, \ldots$ una successione d'insiemi a due a due senza punti comuni. Si dimostra subito che è

$$P(E_1+E_2+\ldots)\leqslant P(E_1)+P(E_2)+\ldots \tag{1}$$

Basta infatti considerare un generico aggregato C contenuto nell' aggregato

$$E_1+E_2+\cdots$$

Indicando con e_i il subaggregato di C (eventualmente nullo) contenuto in E_i, si ha

$$\Psi(e_1+e_2+\ldots)=\Psi(e_1)+\Psi(e_2)+\ldots\leqslant P(E_1)+P(E_2)+\cdots$$

D'altra parte, poichè l'aggregato

$$E_1+E_2+\cdots$$

contiene l'aggregato $E_1+E_2+\ldots+E_m$, qualunque sia m, ne segue, per la definizione stessa di $P(E)$, che è

$$P(E_1+E_2+\ldots)\geqslant P(E_1+E_2+\ldots+E_m).$$

Se dunque si dimostra che la funzione $P(E)$ gode dell' additività ristretta, si ha pure

$$P(E_1+E_2+\ldots)\geqslant P(E_1)+P(E_2)+\ldots$$

e, dal confronto con la (1), l'additività completa.

Per dimostrare che la funzione $P(E)$ gode dell' additività ristretta, osserviamo che, prefissato ad arbitrio un indice m e un numero positivo ε, si può scegliere ciascun e_i, per $i\leqslant m$, in modo che $\Psi(e_i)$ superi $P(E_i)-\frac{\varepsilon}{2^i}$ se è $P(E_i)>0$ [se è $P(E_i)=0$, si tralascia questo valore di i]. Allora si ha

$$\Psi(e_1+e_2+\ldots+e_m)=\Psi(e_1)+\Psi(e_2)+\ldots+\Psi(e_m)> \\ >P(E_1)+P(E_2)+\ldots+P(E_m)-\varepsilon,$$

donde

$$P(E_1+E_2+\ldots+E_m)>P(E_1)+P(E_2)+\ldots+P(E_m)-\varepsilon,$$

e, per l'arbitrarietà di ε,

$$P(E_1+E_2+\ldots+E_m)\geqslant P(E_1)+P(E_2)+\ldots+P(E_m).$$

Ma, analogamente alla (1), si ha pure

$$P(E_1+E_2+\ldots+E_m)\leqslant P(E_1)+P(E_2)+\ldots+P(E_m).$$

Segue l'additività ristretta come si è affermato e quindi anche quella completa.

Dimostreremo ora che $\Psi(E)$ è a variazione limitata per essere $\Psi(E)=P(E)-N(E)$.

Sia e_1 un subaggregato di E tale che $\Psi(e_1)\geqslant\frac{1}{2}P(E)$. Sia e_2 un subaggregato di e_1 tale che $\Psi(e_2)\leqslant-\frac{1}{2}N(e_1)$. Segue

$$\Psi(e_1-e_2)\geqslant\Psi(e_1),\quad N(e_1-e_2)\leqslant\frac{1}{2}N(e_1).$$

Sia e_3 un subaggregato di e_1-e_2 tale che $\Psi(e_3)\leqslant-\frac{1}{2}N(e_1-e_2)$. Segue

$$\Psi(e_1-e_2-e_3)\geqslant\Psi(e_1-e_2),\quad N(e_1-e_2-e_3)\leqslant\frac{1}{2^2}N(e_1).$$

Così si può proseguire indefinitamente. Assegnato ad arbitrio un numero $\delta>0$, mediante un numero finito q di scelte arbitrarie si può dunque construire un aggregato $E_1=e_1-e_2-e_3-\ldots-e_q$, tale che

$$N(E_1)>\varepsilon,\quad P(E-E_1)\leqslant\frac{1}{2}P(E),\quad \Psi(E_1)>P(E_1)-\varepsilon.$$

Analogamente si può construire un subaggregato E_2 di $E-E_1$, tale che

$$N(E_2)<\frac{\varepsilon}{2},\quad P(E-E_1-E_2)\leqslant\frac{1}{2^2}P(E),\quad \Psi(E_2)>P(E_2)-\frac{\varepsilon}{2};$$

[9]) de la Vallée Poussin, b, p. 58.

poi un subaggregato E_3 di $E-E_1-E_2$, tale che

$$N(E_3)<\frac{\varepsilon}{2^2};\ P(E-E_1-E_2-E_3)\leqslant\frac{1}{2^3}P(E),\ \Psi(E_3)>P(E_3)-\frac{\varepsilon}{2^2}.$$

Così si può proseguire indefinitamente. Sia k un intero tale che $\frac{1}{2^k}P(E)<\varepsilon$. Con un numero finito k di scelte arbitrarie si costruisce in tal modo un aggregato $E^p=E_1+E_2+\ldots+E_k$, tale che

$$N(E^p)<\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2^2}+\ldots+\frac{\varepsilon}{2^k}<2\varepsilon,$$

$$P(E-E^p)\leqslant\frac{1}{2^k}P(E)<\varepsilon,\quad \Psi(E^p)>P(E^p)-2\varepsilon\left(1-\frac{1}{2^k}\right)>P(E^p)-2\varepsilon.$$

Quindi, poichè $P(E)=P(E-E^p)+P(E^p)$, si ha anche

$$P(E^p)>P(E)-\varepsilon,\quad \Psi(E^p)>P(E)-3\varepsilon.$$

Analogamente, scelto h tale che $\frac{1}{2^h}N(E)<\varepsilon$, con un numero finito h di scelte arbitrarie si costruisce un E^n tale che

$$P(E^n)<2\varepsilon,\ N(E-E^n)<\varepsilon,\ N(E^n)>N(E)-\varepsilon,\ \Psi(E^n)>-N(E)+3\varepsilon.$$

Indichiamo ora con e l'insieme dei punti comuni ad E^p e ad E^n, con e' l'insieme dei punti di E estranei sia ad E^p che ad E^n. Si ha

$$-2\varepsilon<-N(E^p)\leqslant-N(e)\leqslant\Psi(e)\leqslant P(e)\leqslant P(E^n)<2\varepsilon,$$

$$-\varepsilon<-N(E-E^n)\leqslant-N(e')\leqslant\Psi(e')\leqslant P(e')\leqslant P(E-E^p)<\varepsilon.$$

Ponendo $\overline{E}^p=E^p+e'$, $\overline{E}^n=E^n-e'$, si ha

$$N(\overline{E}^p)<3\varepsilon,\ \Psi(\overline{E}^p)>P(E)-4\varepsilon,\ P(\overline{E}^p)>P(E)-\varepsilon,$$
$$P(\overline{E}^n)<2\varepsilon,\ \Psi(\overline{E}^n)<-N(E)+5\varepsilon,\ N(\overline{E}^n)>N(E)-3\varepsilon.$$

Dunque, essendo $E=\overline{E}^p+\overline{E}^n$ e quindi

$$\Psi(E)=\Psi(\overline{E}^p)+\Psi(\overline{E}^n),$$

ne seguono le limitazioni

$$P(E)-N(E)-4\varepsilon<\Psi(E)<P(E)-N(E)+5\varepsilon,$$

e quindi, per l'arbitrarietà di ε,

$$\Psi(E)=P(E)-N(E),$$

il che prova che $\Psi(E)$ è a variazione limitata.

6. Abbiamo visto, al numero precedente, che un qualunque aggregato E può spezzarsi in due componenti che abbiamo indicato rispettivamente con $\overline{E}^p$, $\overline{E}^n$, tali che

$$\Psi(\overline{E}^p)>P(\overline{E})-4\varepsilon,\quad \Psi(\overline{E}^n)<-N(E)+5\varepsilon,$$

cioè che *la funzione Ψ assuma rispettivamente su di essi dei valori prossimi quanto si vuole a $P(E)$, $-N(E)$*. Eseguendo un' infinità numerabile di scelte arbitrarie può dimostrarsi la possibilità di spezzare E in due componenti tali che la funzione Ψ assuma rispettivamente su di essi *esattamente* i valori $P(E)$ e $-N(E)$. Ma la generalità con cui le funzioni d'insieme sono definite e quella delle ipotesi dalle quali siamo partiti al numero precedente, c'inducono a ritenere che tale infinità numerabile di scelte arbitrarie non possa regolarizzarsi col principio di approssimazione.

Sussiste invece, per le funzioni d'insieme *limitate*, con la dimostrazione data dal Lebesgue, la proposizione che *gl' insiemi E ridotti ad un punto che rendono $\Psi(E)\neq 0$ formano al più un' infinità numerabile.*

7. *Le funzioni $P(E)$, $N(E)$*, dette rispettivamente la „variazione totale positiva di Ψ in E^u e la „variazione totale negativa di Ψ in E^u, *fra tutte le funzioni completamente additive $P_1(E)$, $N_1(E)$ che non sono negative e che verificano l'identità*

$$\Psi(E)=P_1(E)-N_1(E),$$

sono le più piccole. Basta infatti dimostrare che la funzione completamente additiva

$$\lambda(E)=P_1(E)-P(E)=N_1(E)-N(E),$$

è non negativa. All' uopo basta completare le conclusioni del n° 5. Si ha infatti, con le notazioni ivi indicate,

$$\lambda(\overline{E}^p)=N_1(\overline{E}^p)-N(\overline{E}^p)>-3\varepsilon.$$

Dunque, poichè $\overline{E}^p$ è contenuto in E,

$$P_1(E)\geqslant P_1(\overline{E}^p)=P(\overline{E}^p)+\lambda(\overline{E}^p)>P(E^p)-3\varepsilon>P(E)-4\varepsilon,$$
$$\lambda(E)=P_1(E)-P(E)>-4\varepsilon,$$

e, per l'arbitrarietà di ε, $\lambda(E)\geqslant 0$. c. d. d.

8. Si può dare la definizione di una *funzione d'insieme* $\Psi(E)$ *assolutamente continua e completamente additiva a partire da una funzione d'intervallo* $\Phi(\delta)$ avente le due medesime proprietà, senza eseguire scelte arbitrarie [10]). E' infatti dimostato che, assegnato arbitrariamente un numero positivo ε, ne esiste un altro η tale che, se δ_1, δ_2 sono due insiemi ciascuno costituito da una successione d'intervalli non sovrapponentisi, rinchiudente E ed avente da E distanza $<\eta$ [11]) è

$$|\Phi(\delta_1)-\Phi(\delta_2)|<\varepsilon\ ^{12)}.$$

Indichiamo allora con η_r $(r=1,2,3\ldots)$ il valore di η che corrisponde genericamente ad $\frac{\varepsilon}{2^r}$ e con Ψ_r il limite superiore dei valori assunti da $\Phi(\delta)$ per tutti gl'insiemi δ che distano da E per meno di η_r. Può definirsi $\Psi(E)=\lim\limits_{r\to\infty}\Psi_r$.

Se ne deduce il teorema: *ogni funzione d'insieme assolutamente continua e completamente additiva si annulla su ogni insieme avente misura nulla.*

Ne segue pure l'indipendenza dal postulato di Zermelo del procedimento indeato dal De la Vallée Poussin per definire (su una classe estesa d'insiemi) una funzione d'insieme completamente additiva non assolutamente continua, a partire da una funzione d'intervallo o direttamente da una funzione di variabile $F(x)$ a variazione limitata [13]). Infatti quel procedimento consiste nell'eseguire il cambiamento di variabile

$$\vartheta=x+V(x)$$

(essendo $V(x)$ la variazione totale della componente continua $C(x)$ di $F(x)$) e nell'applicare la definizione precedente alla funzione assolutamente continua $C(\vartheta)$ che si ottiene come transformata della $C(x)$.

Qui è però necessaria una riserva. La definizione dell' *„insieme delle singolarità"* di una funzione $F(x)$, a variazione limitata [14]), o, per essere esatti, di *un* insieme delle singolarità, non è possibile senza ricorrere al postulato di Zermelo. Infatti tale insieme si definisce come l'insieme (avente misura nulla) comune a una successione d'insiemi d'intervalli $I_1, I_2, \ldots$, le cui ampiezze tendono a zero e su cui le variazioni totali di $F(x)$ tendono verso il loro limite superiore. Ma non si conosce una legge generale par la costruzione di tali insiemi $I_1, I_2, \ldots$, e non pare neanche che le infinite scelte arbitrarie possano regolarizzarsi in maniera soddisfacente col principio di approssimazione, perchè, se la funzione $F(x)$ da cui si parte non è assolutemente continua in nessun intervallo parziale (come avviene ad es. per la funzione di Lebesgue

$$F(x)=\xi(x)+\frac{1}{2^2}\xi(2x)+\frac{1}{2^4}\xi(2^2x)+\frac{1}{2^6}\xi(2^3x)+\ldots\ ^{15)},$$

allora gl'insiemi I_r, per r tendente ad ∞, tendono ad addensarsi ovunque sull'intervallo totale, e quindi non potrebbero seguirsi i criteri che ho esposti in [a, n. 5].

In particolare non si può liberare dal postulato di Zermelo e neanche regolarizzare col principio di approssimazione la proposizione inversa di quella ricordata sopra: *una funzione completamente additiva d'insieme che si annulla su ogni insieme avente misura nulla è assolutamente continua.*

Sulla derivazione delle funzioni integrali.

9. Le più importanti proposizioni relative alla derivazione delle funzioni integrali sono dovute essenzialmente a G. Vitali [16]) e a H. Lebesgue in [a, b]. Più recentemente il De la Vallée Poussin ha ottenuto gli stessi risultati basandosi sopra la teoria dei reticolati („réseaux"), in particolare dei „reticolati côniugati" e delle derivate su di essi [17]). Il metodo seguito dal De la Vallée Poussin, pur raggiungendo un'alta perfezione di forma, ricorre al postulato di Zermelo in modo da non poter essere regolarizzato col principio di approssimazione. Ma dapprima esso vi ricorre indirettamente, facendo uso del teorema fondamentale della teoria della misura che ho ricordato al n. 3. Questo teorema fondamentale è sfruttato nella dimostrazione della proposizione seguente:

[10]) Lebesgue, a, p. 159.

[11]) Si dice che due insiemi E_1, E_2 distano per meno di η, se, indicate con e_1, e_2 rispettivamente la parte di E_1 estranea ad E_2 e la parte di E_2 estranea ad E_1, è

$$m(e_1)<\eta,\quad m(e_2)<\eta.$$

[12]) Lebesgue, a, p. 157.

[13]) Lebesgue, a, p. 167.

[14]) Lebesgue, a, p. 164.

[15]) Lebesgue, a, p. 56 e p. 165.

[16]) Cfr. [10].

[17]) [8, b, pp. 61 e seg.].

Sia $F(e)$ una funzione d'insieme assolutamente continua e additiva. Se una delle sue derivate (su un reticolato R), per es. $\overline{D}\,F$, è positiva quasi dappertutto su un insieme E di misura non nulla, $F(E)$ è positivo [18].

Le prime applicazioni di questo metodo alle funzioni d'insieme [19] sono dunque regolarizzabili col principio di approssimazione poichè il ricordato teorema fondamentale della teoria della misura lo è [20]. Fra queste prime applicazioni vi è per es. il teorema seguente:

La densità di un insieme misurabile E è eguale quasi dappertutto a 1 in E, a 0 sul complementare CE [21].

Altri teoremi nella teoria della derivazione delle funzioni d'insieme, sono dal De la Valleé Poussin dimostrati premettendo alcune proposizioni fondamentali sugl' insiemi normali. Una di queste, perfettamente analoga al ricordato teorema fondamentale della teoria della misura (n. 3), dice che *la somma di un' infinità numerabile d'insiemi normali è normale* [22]. La sua dimostrazione fa uso del postulato di Zermelo e non può essere regolarizzata col principio di approssimazione, perchè la definizione *d'insieme normale* (a differenza di quella d'insieme misurabile) è troppo generale per dar luogo a considerazioni metriche.

10. Veniamo ora ai metodi seguiti dal Vitali e dal Lebesgue. Il primo prende le mosse da un teorema fondamentale sui gruppi di punti (un „Überdeckungssatz", dicono i tedeschi) che ha analogia con un altro di Lindelöf [23], e studia preliminarmente la derivazione delle funzioni d'insieme assolutamente continue. Il secondo invece sviluppa direttamente la teoria della derivazione delle funzioni integrali mediante un procedimento che egli chiama *„procedimento delle catene"*. Però il metodo del Vitali fu ripreso dal Lebesgue stesso in [b] e sviluppato in tutta la sua portata.

[18] [8, b, pp. 67, 68].

[19] [8, b, fino alla p. 74].

[20] [9, b].

[21] Di questo teorema, nel caso che E sia un insieme perfetto, è stata data una dimostrazione diretta, senza eseguire scelte arbitrarie, da A. Denjoy [1]. Ma, per risalire dalla dimostrazione data relativamente ad E perfetto all'enunciato relativamente ad E misurabile qualunque, dovrebbesi poter liberare dal postulato di Zermelo (o per lo meno regolarizzare col principio di approssimazione) la dimostrazione della proposizione seguente:

Ogni insieme misurabile E è la somma d'un' infinità numerabile d'insiemi chiusi e di un insieme avente misura nulla.

[22] [8, b, p. 87].

[23] Cfr. [9, a; n. 6]

Non rientra nelle intenzioni del presente lavoro l'esame completo, dal punto di vista del postulato delle scelte arbitrarie, di tutto quanto è stato fatto dal Vitali e dal Lebesgue in questo campo. Noi ci limiteremo ad analizzare il „procedimento delle catene" per il caso delle funzioni di una sola variabile, indicando fino a qual punto esso sia regolarizzabile col principio di approssimazione, e a regolarizzare effettivamente il teorema fondamentale, cioè l'„Überdeckungssatz" di Vitali. Questo teorema è stato enunciato sotto varie forme [24]: per il caso degl' insiemi lineari, nella sua forma più generale, esso è il seguente.

Teor. *Siano E un insieme lineare (limitato o no) avente misura finita ed F una famiglia d'intervalli tale che ogni punto di E sia interno (in senso stretto) a un' infinità d'intervalli di F la cui lunghezza sia piccola ad arbitrio. Allora esiste nella famiglia F un numero finito o un' infinità numerabile d'intervalli, senza punti comuni due a due, ricoprenti quasi tutto E ed aventi lunghezza complessiva $< m(E) + \varepsilon$, essendo ε un numero positivo assegnato arbitrariamente piccolo* [25].

Seguendo il Vitali, chiamiamo *„corpo"* di una famiglia d'intervalli, l'aggregato (misurabile) dei punti che appartengono (magari come estremi) a qualche intervallo di Σ. Cominciamo a dimostrare, *senza far uso del postulato di Zermelo*, il seguente

Lemma. *Se Σ è una famiglia d'intervalli il cui corpo abbia una misura μ finita e se ε è un numero maggiore di zero, esiste un numero finito d'intervalli di Σ, senza punti comuni due a due, le cui lunghezze hanno una somma maggiore di $\frac{\mu}{5} - \varepsilon$* [26].

[24] [10; 3, b, p. 391; 8, a, p. 110].

[25] In [8, a, p. 110, n. 98] è data una dimostrazione di carattere elementare di questo teorema. Essa contiene l'ipotesi restrittiva che gl' intervalli della famiglia F abbiano per punto medio un punto di E. Inoltre essa si basa sul teorema fondamentale della teoria della misura. Per quanto noi abbiamo già regolarizzato col principio di approssimazione tale teorema fondamentale, preferiamo seguire un ragionamento che ne sia del tutto indipendente. Per queste e per altre ragioni ancora, ricorriamo sostanzialmente alla dimostrazione originale del Vitali [10]. Ma l'enunciato che riportiamo è più completo di quello del Vitali.

[26] Questo enunciato coincide con quello del Vitali, fatta eccezione per

Dim. Indico con Σ_1 l'insieme (se esiste) di tutti gl' intervalli di Σ che hanno ampiezze $\geqslant \frac{\mu}{2}$ e di tutti gli altri intervalli di Σ che hanno punti in comune con essi; con C_1 il corpo di Σ_1; con $\overline{\Sigma}_1$ l'insieme $\Sigma - \Sigma_1$; con $\overline{C}_1$ il corpo di $\overline{\Sigma}_1$. Se non esistono intervalli di Σ che abbiano ampiezza $\geqslant \frac{\mu}{2}$, pongo $\Sigma_1 = 0$. Per ogni indice $n = 2, 3, \ldots$ indico con Σ_n l'insieme di tutti gl' intervalli di $\overline{\Sigma}_{n-1}$ che hanno ampiezza $\geqslant \frac{\mu}{2^n}$ e di tutti gli altri intervalli di $\overline{\Sigma}_{n-1}$ che hanno punti in comune con essi; con C_n il corpo di Σ_n; con $\overline{\Sigma}_n$ l'insieme $\overline{\Sigma}_{n-1} - \Sigma_n$; con $\overline{C}_n$ il corpo di $\overline{\Sigma}_n$. Ogni intervallo di Σ appartiene a uno e un solo ben determinato Σ_n. Gli aggregati $\overline{C}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sono tutti misurabili e contenuti ciascuno nel precedente.

Per ogni $n = 1, 2, 3, \ldots$ (indefinitamente: diremo in seguito fin dove) per il quale sia $\Sigma_n \neq 0$ eseguisco l'operazione seguente: Sia l_{n_1} il limite superiore delle lunghezze degl' intervalli di Σ_n $\left(\text{è necessariamente } \frac{\mu}{2^{n-1}} \geqslant l_{n_1} \geqslant \frac{\mu}{2^n}\right)$. Esiste in Σ_n un intervallo s_{n_1} di lunghezza $> l_{n_1} - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}$. Indichiamo con Σ_n' l'insieme costituito dai seguenti intervalli di Σ_n:

a) s_{n_1} e tutti gli altri intervalli di Σ_n, aventi ampiezza $\geqslant \frac{\mu}{2^n}$, che abbiano punti in comune con s_{n_1};

b) tutti gli altri intervalli di Σ_n, aventi ampiezza $< \frac{\mu}{2^n}$, che abbiano punti in comune con qualche intervallo della classe a).

Se la classe $\Sigma_n - \Sigma_n'$ non è nulla, sia l_{n_2} il limite superiore delle lunghezze degl' intervalli di $\Sigma_n - \Sigma_n'$ $\left(\text{è necessariamente } l_{n_1} \geqslant l_{n_2} \geqslant \frac{\mu}{2^n}\right)$. Esiste in $\Sigma_n - \Sigma_n'$ un intervallo s_{n_2}, necessariamente senza punti in

l'espressione $\frac{\mu}{5} - \varepsilon$ che è sostituita all' espressione $\frac{\mu}{3} - \varepsilon$. Ciò non ha importanza: infatti l'uno o l'altro degli enunciati conduce, come il lettore potrà vedere al n° 11, ad affermare l'esistenza di un numero finito d'intervalli di Σ, senza punti comuni due a due, le cui lunghezze hanno una somma $< \alpha\mu$, essendo α un numero qualunque < 1.

comune con s_{n_1}, di ampiezza $> l_{n_2} - \frac{3}{2^{n+3}}$. Indichiamo con Σ_n'' l'insieme constituito dai seguenti intervalli di $\Sigma_n - \Sigma_n'$:

a) s_{n_2} e tutti gli altri intervalli di $\Sigma_n - \Sigma_n'$, aventi ampiezza $\geqq \frac{\mu}{2^n}$, che abbiano punti in comune con s_{n_2};

b) tutti gli altri intervalli di $\Sigma_n - \Sigma_n'$, aventi ampiezza $< \frac{\mu}{2^n}$, che abbiano punti in comune con qualche intervallo della classe a).

Sia l_{n_3} il limite superiore delle lunghezze degl' intervalli di $\Sigma_n - \Sigma_n' - \Sigma_n''$. ecc. ecc.

Evidentemente, dopo un numero finito p_n di scelte arbitrarie, si arriva a un $\Sigma_n - \Sigma_n' - \Sigma_n'' - \ldots - \Sigma_n^{(p_n)} = 0$.

Gl' intervalli $s_{n_1}, s_{n_2}, \ldots, s_{np_n}$ non hanno punti in comune due a due. Sia μ_n la somma delle loro lunghezze. E'

$$\sum_{r=1}^{p_n} l_{nr} \geqslant \mu_n > \sum_{r=1}^{p_n} \left(l_{nr} - \frac{\varepsilon}{2^{n+r+1}}\right) > \sum_{r=1}^{p_n} l_{nr} - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Qualunque sia l'intero N, è $\sum\limits_{n=1}^{N} \mu_n \leqslant \mu$, dunque

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{r=1}^{p_n} l_{nr} - \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} < \mu,$$

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{r=1}^{p_n} l_{nr} < \mu + \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} < \mu + \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'altra parte abbiamo

$$m(C_n) \leqslant 5 \sum_{r=1}^{p_n} l_{nr}.$$

Ne segue che l'aggregato dei punti che sono comuni a infiniti aggregati C_n ha misura nulla [27]). Sia ora P un punto comune a tutti

[27]) Infatti si ha, per ogni N,

$$\sum_{n=1}^{N} m(C_n) < 5\left(\mu + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

gli aggregati $\overline{C}_n$ (se un tal punto esiste). Si vede subito che P è anche comune a infiniti C_n, perchè se esistesse un indice ν tale che nessuno dei C_n, con $n > \nu$, contenesse P, allora P non potrebbe appartenere a $\overline{C}_\nu$. Dunque l'aggregato comune a tutti i $\overline{C}_n$ ha misura nulla e perciò estiste un intero N tale che $m(\overline{C}_N) < \frac{5\varepsilon}{2}$ [28].

Fissato in tal modo N, si vede che ogni punto del corpo di Σ appartiene ad almeno uno dei corpi $C_1, C_2, \ldots, C_N, \overline{C}_N$, e perciò, posto $\mu_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ [29]) si ha $\mu < 5\mu_0 + \frac{5\varepsilon}{2} + \frac{5\varepsilon}{2}$, e quindi $\mu_0 > \frac{\mu}{5} - \varepsilon$, c. d. d.

11. Veniamo ora alla dimostrazione del teorema di Vitali (n. 10) [30].

Dico anzitutto che *si può scegliere in F un numero finito d'intervalli senza punti comuni due a due e ricoprenti un subaggregato di E avente misura* $> \frac{1}{6} m(E)$. All' uopo rinchiudiamo E in un

---

e quindi anche

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(C_n) \leqslant 5\left(\mu + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Poniamo $I_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} C_n$. Gli aggregati I_ν sono contenuti ciascuno nel precedente. I punti comuni a tutti gli I_ν sono tutti e soli i punti comuni a infiniti C_n.

Ogni I_ν è misurabile Infatti, per ogni valore dell' indice n, C_n è costituito da tutti i punti che appartengono a un sistema d'intervalli esterni l'uno all' altro (eventualmente gli estremi esclusi). Dunque può darsi una legge, la stessa per ogni n, per rinchiudere C_n in un insieme numerabile d'intervalli non sovrapponentisi e la cui misura superi $m(C_n)$ di quanto poco si voglia; parimenti può darsi una legge, la stessa per ogni n, per rinchiudere il complementare di C_n (rispetto ad un intervallo contenente C_n, cosa possibile poichè C_n è limitato) in un insieme numerabile d'intervalli non sovrapponentisi e la cui misura superi quella del detto aggregato complementare di C_n di quanto poco si voglia. Dunque la misurabilità e la valutazione della misura di I_ν non dipendono da infinite scelte arbitrarie.

E'

$$m(I_\nu) \leqslant \sum_{n=\nu}^{\infty} m(C_n).$$

Dunque

$$\lim_{\nu \to \infty} m(I_\nu) = 0.$$

ecc.

[28]) Vedi nota [27]).

[29]) μ_0 è dunque la somma delle lunghezze di tutti gl' intervalli scelti.

[30]) Cfr. [8, a, p. 111].

insieme A d'intervalli non sovrapponentisi, in modo che ogni punto di E sia interno ad A in senso stretto e che si abbia $m(A) < m(E) + \eta$, essendo $\eta < \frac{1}{60} m(E)$. Escludiamo allora dalla famiglia F tutti gl'intervalli che escono da A. Sia F' la famiglia così ridotta: essa gode ancora della stessa proprietà di F relativamente ad E. Per il lemma precedente si può estrarre da F' un numero finito d'intervalli, senza punti comuni due a due, le cui lunghezze hanno una somma maggiora di $\frac{\mu}{5} - \eta$, essendo μ la misura del corpo di F'. Poichè è $\mu \geqslant m(E)$, il subaggregato E_1 di E ricoperto dagl' intervalli scelti ha misura $> \frac{1}{5} m(E) - 2\eta > \frac{1}{6} m(E)$.

Escludiamo ora da F' tutti gl' intervalli che hanno punti in comune con quelli che hanno servito a coprire E_1 (cosa che non altera le proprietà della famiglia relativamente all'insieme rimanente $E - E_1$) e sia F_1 la famiglia così ridotta. Da F_1 estraggiamo un numero finito d'intervalli, senza punti comuni due a due, che ricoprano un subaggregato E_2 di $E - E_1$ tale che $m(E_2) < \frac{1}{6} m(E - E_1)$. Escludiamo da F_1 tutti gli intervalli che hanno punti in comune con quelli scelti e così continuiamo indefinitamente. Dopo l'h. ma operazione si ha

$$m(E_h) > \frac{1}{6} m(E) - \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{h-1} m(E_i) > 0,$$

$$m(E) > \sum_{i=1}^{h-1} m(E_i) > m(E) - 6\, m(E_h).$$

Assegnato un numero positivo δ arbitrariamente piccolo, può trovarsi un indice h tale che

$$m(E) > \sum_{i=1}^{h-1} m(E_i) > m(E) - \delta. \tag{2}$$

Dunque, eseguendo infinite scelte arbitrarie, si viene a ricoprire quasi tutto E come si è affermato. Inoltre, se si ha avuto cura di scegliere $\eta < \varepsilon$, si vede che la somma delle ampiezze degl'intervalli scelti è $< m(E) + \varepsilon$.

Se S', S'' sono due successioni d'intervalli ottenute con due diverse infinità di scelte arbitrarie, poniamo

$d(S', S'')=$ somma delle lunghezze degl'intervalli di S' che non appartengono a $S''+$ somma delle lunghezze degl'intervalli di S'' che non appartengono a S'.

E' manifestamente $d(S', S'')=0$ sempre e solo quando è $S'=S''$.

Consideriamo la successione S_0 construita secondo la legge seguente. Sia $\lambda_1(\leqslant m(E)+\varepsilon)$ il limite superiore delle ampiezze di tutte le succesioni S. Esiste certamente una successione S la cui ampiezza è $>\lambda_1-1$. Se $u_1, u_2, \dots$ sono gl'intervalli di questa successione, esiste certamente un indice n_1 tale che $\sum_{i=1}^{n_1} m(u_i)<\lambda_1-1$. Sia λ_2 $(\leqslant\lambda_1)$ il limite superiore delle ampiezze di tutte le successioni S i cui primi n_1 intervalli siano $u_1, u_2, \dots, u_{n_1}$. Allo stesso modo si possono scegliere in F_1 altri n_2-n_1 intervalli $u_{n_1+1}, u_{n_1+2}, \dots, u_{n_2}$, senza punti in comune nè coi precedenti nè fra loro due a due, tali che $\sum_{i=1}^{n_2} m(u_i)>\lambda_2-\frac{1}{2}$. Così continuiamo indefinitamente. In generale, dopo aver scelti i primi n_h intervalli $u_1, u_2, \dots, u_{n_h}$, si indicherà con λ_{h+1} $(\leqslant\lambda_h)$ il limite superiore delle ampiezze di tutte le successioni S i cui primi n_h intervalli siano $u_1, u_2, \dots, u_{n_h}$. Poi si sceglieranno in F_1 altri $n_{h+1}-n_h$ intervalli $u_{n_h+1}, u_{n_h+2}, \dots, u_{n_{h+1}}$, senza punti in comune nè coi precedenti nè fra loro due a due, tali che $\sum_{i=1}^{n_{h+1}} m(u_i)>\lambda_{h+1}-\frac{1}{h+1}$.

Dico che *la successione* $S_0\equiv u_1, u_2, \dots$ *esiste nell' ampliamento naturale del dominio deduttivo dei numeri reali definito dalla funzione* $d(S', S'')$. Infatti la successione $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ è monotona non crescente: sia $\lambda>0$ il suo limite. Assegnato ad arbitrio un numero positivo ε_1, indichiamo con h un intero positivo $>\frac{4}{\varepsilon_1}$ e tale che $\lambda_h<\lambda+\frac{\varepsilon_1}{4}$. Se S', S'' sono altre due successioni S aventi in comune i primi n_h intervalli $u_1, u_2, \dots, u_{n_h}$, è

$$\lambda+\frac{\varepsilon_1}{4}>\lambda_h\geqslant\lambda_{h+1}\geqslant m(S')>\sum_{i=1}^{n_h} m(u_i)>\lambda_h-\frac{1}{h}\geqslant\lambda-\frac{1}{h}>\lambda-\frac{\varepsilon_1}{4},$$

e analogamente $\lambda+\frac{\varepsilon_1}{4}>m(S'')>\lambda-\frac{\varepsilon_1}{4}$. Dunque $d(S', S'')<\varepsilon_1$. c. d. d.

12. Nel procedimento delle „*catene d'intervalli*", cioè insiemi d'intervalli contigui ad aggregati chiusi ben ordinati, si considera col Lebesgue [a, pp. 176—184] per es. la derivata superiore destra $\overline{D}_+f(x)$ della funzione $f(x)$ assegnata e, sapendo che tale derivata è misurabile, ci si propone d'integrarla. A tal uopo, prefissato ad arbitrio un numero $\varepsilon>0$, si suddivide l'intervallo d'integrazione $\overline{ab}$ negli aggregati

$$E[l\,\varepsilon\leqslant\overline{D}_+f(x)<(l+1)\,\varepsilon]=E_l$$

relativi al diversi valori di l interi, positivi, negativi e nullo, e negli aggregati

$$E[\overline{D}_+f(x)=+\infty]=E^{ip},\quad E[\overline{D}_+f(x)=-\infty]=E^{in}.$$

Poi si ricopre $\overline{ab}$ con una catena d'intervalli, a partire da a nel verso di b. Questa catena d'intervalli deve soddisfare alla prima condizione essenziale seguente:

Se x_0 *è l'origine d'un intervallo* $\overline{x_0\ x_0+h}$ *della catena, si ha*

$$(l-1)\,\varepsilon\leqslant r\,[f(x), x_0, x_0+h]\leqslant(l+1)\,\varepsilon,\quad \textit{se } x_0 \textit{ appartiene a } E_l\ ^{31}),$$

$$M\leqslant r\,[f(x), x_0, x_0+h],\quad \textit{se } x_0 \textit{ appartiene a } E^{ip},$$

$$r\,[f(x), x_0, x_0+h]\leqslant -M,\quad \textit{se } x_0 \textit{ appartiene a } E^{in};$$

M essendo un numero positivo arbitrariamente grande.

E' chiaro che l'arbitrarietà della scelta dei singoli intervalli della catena, per soddisfare a questa prima condizione, é tosto eliminata se, come osserva il Lebesgue in nota alle pp. 67 e 176, per ogni x_0 si prende per h il massimo valore soddisfacente alla condizione enunciata.

Ci si propone in un primo tempo il calcolo della variazione totale positiva P della $f(x)$ in $\overline{ab}$. La catena d'intervalli fornisce una variazione positiva π che è $\leqslant P$ ma che tende a P, in un modo che può dirsi uniforme, al tendere a 0 dell' ampiezza del massimo intervallo della catena [32]). Si mostra facilmente che un

[31]) $r[f(x), x_0, x_0+h]$ è il rapporto incrementale di $f(x)$ su $\overline{x_0\ x_0+h}$.

[32]) Questa proprietà che, com'è noto, è verificata per le funzioni continue, è sfruttata nei teoremi che seguono quello che ci proponiamo di giustificare.

valore approssimato di π a meno di $\varepsilon(a-b)$ è il numero

$$p=\sum_{l=0}^{+\infty} A_l\, l\,\varepsilon + M' A^{ip},$$

ove A_l è la lunghezza complessiva degl' intervalli della catena le cui origini sono punti di E_l, A^{ip} è quella degl' intervalli le cui origini sono punti di E^{ip}, ed M' è un numero $\geqslant M$.

Ora si tratta di valutare le differenze

$$\sum_0^{\infty} A_l\, l\,\varepsilon - \sum_0^{\infty} m(E_l)\, l\varepsilon, \quad M' A^{ip} - M\, m(E^{ip}),$$

poichè se, per $\varepsilon\to 0$, il limite della serie $\sum_0^{\infty} m(E_l)\, l\varepsilon$ è finito, questo limite è, per definizione, l'

$$\int_{E[0<\bar{D}_+ f(x)<+\infty]} \bar{D}_+ f(x)\, dx.$$

E' appunto in questa valutazione che il Lebesgue fa uso del postulato di Zermelo. Ma se questo uso è facilmente riducibile al teorema fondamentale della teoria della misura e per mezzo di esso quindi al principio di approssimazione (come fra poco dimostrerò) quanto alla valutazione per difetto, non sembra che esso lo possa essere quanto alla valutazione per eccesso.

Mi sia permesso, trattandosi di questione critica, di precisare opportunamente il procedimento anche in qualche particolare sorvolato dal Lebesgue.

13. Per la difinizione degli E_l deve essere necessariamente

$$m(E^{ip})+m(E^{in})+\sum_{l=-\infty}^{+\infty} m(E_l)=b-a.$$

Siano allora h, k due numeri interi positivi tali che

$$m(E^{ip})+m(E^{in})+\sum_{l=-h}^{+k} m(E_l)\geqslant b-a-\eta.$$

Sarà allora, per ogni $l>k$, $m(E_l)\leqslant\eta$.

Indico con $\bar{E}$ la somma di tutti gli aggregati E_l, per $l<-h$ e per $l>k$. *Per il teorema fondamentale della teoria della misura, anche $\bar{E}$ è misurabile ed è anche $m(\bar{E})\leqslant\eta$.*

Prefissato ad arbitrio un numero $\eta>0$, pongo $\varepsilon'=\dfrac{\eta}{h+k+4}$ e rinchiudo gli $h+k+4$ aggregati $\bar{E}$, E^{in}, E_{-h}, $E_{-h+1},\dots, E_{k-1}$, E_k, E^{ip} ciascuno in un insieme d'intervalli non sovrapponentisi. Tali insiemi d'intervalli li indico rispettivamente con $\bar{A}, A^{in}, A_{-h}, A_{-h+1},\dots, A_{k-1}, A_k, A^{ip}$, e li scelgo in modo che sia

$$m(\bar{A})\leqslant m(\bar{E})+\varepsilon',\quad m(A^{in})\leqslant m(E^{in})+\varepsilon',\quad m(A^{ip})\leqslant m(E^{ip})+\varepsilon',$$
$$m(A_l)\leqslant m(E_l)+\varepsilon' \quad (\text{per ogni } l \text{ tale che } -h\leqslant l\leqslant k).$$

Pongo ora per la catena d'intervalli ancora la condizione seguente:

Ciascun intervallo della catena è rinchiuso interamente nell' insieme A che rinchiude l'aggregato E a cui appartiene la sua origine.

Allora ogni A_l è almeno uguale al più grande dei due numeri: 0, $m(E_l)-\eta$; per A^{ip} e per A^{in} si hanno dei limiti analoghi. Segue che è

$$p>\sideset{}{^p}\sum_{l=0}^{k} [m(E_l)-\eta]\, l\,\varepsilon + M[m(E^{ip})-\eta] =$$
$$=\sideset{}{^p}\sum_{l=0}^{\infty} [m(E_l)-\eta]\, l\,\varepsilon + M[m(E^{ip})-\eta],$$

essendo in Σ^p conservati soltanto i termini positivi.

I termini della serie $\sideset{}{^p}\sum_{l=0}^{\infty}[m(E_l)-\eta]\, l\,\varepsilon$ sono in numero finito (numero variabile con η), sono inferiori a quelli della serie $\sum_{l=0}^{\infty} m(E_l)\, l\,\varepsilon$, ma tendono rispettivamente a questi per $\eta\to 0$. Dunque

$$P+\varepsilon(b-a)>\sideset{}{^p}\sum_{l=0}^{\infty} [m(E_l)-\eta]\, l\,\varepsilon + M[m(E^{ip})-\eta],$$

e, per l'arbitrarietà di η,

$$P+\varepsilon(b-a)\geqslant\sideset{}{^p}\sum_{l=0}^{\infty} m(E_l)\, l\,\varepsilon + M\, m(E^{ip}).$$

Infine si può far tendere ε a 0. Quindi è

$$P \geqslant \int_{E[0<\overline{D}_+ f(x)<+\infty]} \overline{D}_+ f(x)\, dx + M\, m(E^{lp}),$$

qualunque sia M.

Il ragionamento si ripete per la variazione totale negativa N e per ciascuno dei quattro numeri derivati. Si conclude col Lebesgue, enunciando il

Teorema. *Una funzione continua e a variazione limitata ha i suoi numeri derivati finiti quasi dappertutto; i suoi numeri derivati sono sommabili nell' insieme dei punti in cui sono finiti; le sue tre variazioni totali P, N, V verificano le relazioni*

$$P \geqslant \int_{E[0<Df]} D f(x)\, dx = \int_a^b \frac{1}{2}[D f(x) + |D f(x)|]\, dx,$$

$$N \geqslant \int_{E[Df<0]} - D f(x)\, dx = \int_a^b \frac{1}{2}[|D f(x)| - D f(x)]\, dx,$$

$$V \geqslant \int_a^b |D f(x)|\, dx,$$

$D f(x)$ essendo uno qualunque dei quattro numeri derivati: i punti in cui $D f(x)$ è infinita essendo esclusi dagli aggregati o intervalli d'integrazione.

14. Il Lebesgue valuta per eccesso le differenze

$$\sum_0^\infty A_l\, l\, \varepsilon - \sum_0^\infty m(E_l)\, l\, \varepsilon, \quad M' A^{lp} - M\, m(E^{lp}),$$

con un ragionamento facente uso del postulato di Zermelo e che non sembra potersi regolarizzare mediante il principio d'approssimazione. Infatti, a tal uopo, egli suppone di poter rinchiudere ciascuno degli aggregati E^{ln}, E^{lp}, E_l (per *tutti* i valori di l, positivi, negativi e nullo) in un insieme d'intervalli non sovrapponentisi, che indichiamo rispettivamente con A^{ln}, A^{lp}, A_l, in modo che si abbia

$$m(A^{ln}) \leqslant m(E^{ln}) + \varepsilon^{ln}, \quad m(A^{lp}) \leqslant m(E^{lp}) + \varepsilon^{lp}, \quad m(A_l) \leqslant m(E_l) + \varepsilon_l$$

(per ogni l), i numeri ε^{ln}, ε^{lp}, ε_l

essendo positivi e tali che le serie $\varepsilon^{ln} + \varepsilon^{lp} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_l$, $\sum_{-\infty}^{+\infty} |l|\, \varepsilon_l$ siano convergenti ed abbiano somme arbitrariamente piccole η, ζ. Si ha allora la valutazione per eccesso

$$(3) \qquad p < \sum_0^\infty [m(E_l) + \varepsilon_l]\, l\, \varepsilon + M'[m(E^{lp}) + \varepsilon^{lp}] <$$

$$< \sum_0^\infty m(E_l)\, l\, \varepsilon + \zeta\, \varepsilon + M'[m(E^{lp}) + \varepsilon^{lp}].$$

Qui la sommatoria del secondo membro contiene effettivamente infiniti termini, a differenza della sommatoria

$$\sum_{l=0}^{\infty}{}^{p} [m(E_l) - \eta]\, l\, \varepsilon$$

che abbiamo trovato nella valutazione per difetto. Questo inconveniente, che non si saprebbe come evitare, è quello che non permette la regolarizzazione. Infatti, nella valutazione per difetto, fu appunto in vista del numero finito di termini che sarebbero stati conservati nella ricordata sommatoria, che noi operammo, al n. 13, il raggruppamento in un unico aggregato $\overline{E}$ di tutti gli E_l con $l < -h$ e con $l > k$. Di modo che il postulato della scelta veniva adoperato soltanto in via indiretta per provare la misurabilità di $\overline{E}$. Qui, invece, il raggruppamento non serve e si è costretti a scegliere l'insieme A_l effettivamente per ogni E_l (l variando da $-\infty$ a $+\infty$). E questa scelta non è regolarizzabile perchè, non conoscendosi nulla intorno alla distribuzione degli aggrregati E_l nell'intervallo $\overline{ab}$, potrebbe benissimo darsi che fossero anche tutti densi in $\overline{ab}$ [33]).

Osservazione. Non volendo respingere in blocco una dimostrazione che soddisfa il sentimento matematico comune, osserviamo che, se non è possibile regolarizzarla mediante il principio di approssimazione, la si può almeno far rientrare completamente nel quadro della teoria dei dominî deduttivi. Consideriamo infatti il *dominio deduttivo* in cui è primo l'aggregato dei sistemi $\{A^{lp}, A^{ln}, A_l\}$. A ogni elemento di questo dominio deduttivo corrisponde un valore per il

[33]) Viola, a, n. 5.

secondo membro della (3). Ora noi non abbiamo bisogno di utilizzare *questo* valore nella nostra deduzione: noi consideriamo soltanto il limite inferiore di quesi valori e affermiamo che p, essendo $<$ di tutti i detti valori, è $\leqslant$ del loro limite inferiore. In altri termini la conclusione risulta indipendente dalle scelte eseguite (Vedi l'articolo precedente del prof. B. Levi).

15. Però se si ammette qualche condizione restrittiva opportuna è possibile regolarizzare completamente le dimostrazioni del Lebesgue. Tale è ad es la condizione $E^{in} = E^{ip} = 0$ che permette di dimostrare, in un ampliamento naturale del dominio deduttivo dei numeri reali, la proposizione seguente [34]:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè il numero derivato $\overline{D}_+ f(x)$, ovunque finito, di una funzione continua $f(x)$ sia sommabile, è che $f(x)$ sia a variazione limitata. La funzione primitiva $f(x)$ di $\overline{D}_+ f(x)$ è allora l'integrale indefinito, funzione di una variabile, di $\overline{D}_+ f(x)$.

Infatti si tratta di regolarizzare la valutazione per eccesso di cui al. n. 14. A tal uopo osserviamo che nell'ipotesi fatta, per un noto teor. di Denjoy [1, p. 149; 3, a, p. 220], se C è un qualunque aggregato chiuso contenuto in $\overline{ab}$, esistono un numero positivo M e un intervallo I, contenente nel suo interno punti di E, tali che, per ogni intervallo $\overline{\alpha\beta}$ di cui l'origine α sia punto di E e di I, si ha $|r[f(x), \alpha, \beta]| < M$ e quindi anche $|\overline{D}_+ f(\alpha)| \leqslant M$. Si può perciò costruire in ab un insieme σ d'intervalli non sovrapponentisi, non denso in $\overline{ab}$ ed avente lunghezza piccola ad arbitrio, a prescindere dal quale $\overline{D}_+ f(x)$ è limitata. Indichiamo infatti con C_1 l'insieme dei punti di $\overline{ab}$ in vicinanza dei quali $\overline{D}_+ f(x)$ non è limitata; per ogni transfinito di prima specie $\alpha (> 1)$, con C_α l'insieme dei punti di $C_{\alpha-1}$ in vicinanza dei quali $\overline{D}_+ f(x)$ non è limitata su $C_{\alpha-1}$; per ogni transfinito di seconda specie α, con C_α l'insieme comune a tutti i C_β, con $\beta < \alpha$. Ogni C_α è chiuso, contenuto e non denso in tutti i precedenti: esiste perciò un transfinito ben determinato μ tale che $C_\mu = 0$ e la successione dei C_α è numerabile. Anche l'insieme di tutti gl' intervalli contigui a tutti i C_α è dunque numerabile e perciò i loro estremi costituiscono essi pure un insieme numerabile e non denso in $\overline{ab}$ che può essere completamente rin-

[34]) Lebesgue, a, p. 183.

chiuso in un sistema σ d'intervalli non sovrapponentisi, avente lunghezza piccola ad arbitrio. A prescindere da σ, $\overline{D}_+ f(x)$ è allora limitata.

Dunque, assegnato ad arbitrio un intero positivo r, si può costruire (con una legge ben precisabile) un insieme σ, sia σ_r, tale che sia $m(\sigma_r) < \frac{1}{r}$. Esiste allora un intero positivo λ_r (sia il più piccolo possibile) tale che $|\overline{D}_+ f(x)| \leqslant \lambda_r \varepsilon$ per ogni x non appartenente a σ_r. Imponendo la condizione che, per ogni $r (> 0)$, σ_{r+1} sia contenuto in σ_r, la successione $\{\lambda_r\}$ è monotona non decrescente. Introduciamo allora nella definizione di una generica successione $\{A_l\}$ d'insiemi d'intervalli, rinchiudenti i rispettivi E_l come si è detto al n. 14, le due condizioni supplementari seguenti:

1a) Per ogni $l (\gtrless 0)$, l'insieme dei punti di $\overline{ab}$ che non sono interni a nessun intervallo di A_l non abbia misura nulla in nessuna parte di $\overline{ab}$ [35]).

2a) Per $r (> 0)$ e per ogni $l (\lessgtr 0)$ tale che $|l| > \lambda_r + 1$, A_l sia completamente contenuto in σ_r.

Se $\{A'_l\}$, $\{A''_l\}$ sono due di tali succesioni $\{A_l\}$, indichiamo con τ l'insieme dei punti di ab che, per almeno un valore dell' indice l, appartengono, come interni o come estremi, ad A'_l oppure ad A''_l ma non ad entrambe. L'aggregato τ, se esiste, è misurabile [36]) e, per la condizione 1a) non può avere misura nulla in nessuna parte di $\overline{ab}$. Definiamo la funzione regolatrice $d(\{A'_l\}, \{A''_l\}) = m(\tau)$ ed osserviamo che la condizione $d(\{A'_l\}, \{A''_l\}) = 0$ è necessaria e sufficiente affinchè sia $\{A'_l\} = \{A''_l\}$. Assegnato ad arbitrio un $\eta > 0$, sia r un intero positivo tale che $\frac{1}{r} < \eta$. Se $\{A'_l\}$, $\{A''_l\}$ sono due successioni costruite come si è detto ed aventi in comune tutte le scelte corrispondenti ad l tale che $|l| \leqslant \lambda_r + 1$, per la condizione 2a) l'aggregato τ corrispondente è interamente contenuto in σ_r e perciò è

$$d(\{A'_l\}, \{A''_l\}) < \eta.$$

Dunque una qualunque successione $\{A_l\}$ appartiene all' ampliamento naturale del dominio deduttivo dei numeri reali definito

[35]) Cfr. Viola b, n. 1.

[36]) E ciò anzi indipendetemente dal teorema fondamentale della misure Cfr. loc. cit. alla nota [35]).

dalla funzione $d(\{A_i'\}, \{A_i''\})$ e l'applicazione del principio di approssimazione appare, in modo analogo a quanto si è fatto in [9, b, n. 1] e secondo le esigenze di [9, a, n. 5], pienamente accettabile.

16. Per terminare le nostre osservazioni sul procedimento delle catene osserviamo ancora che, ritornando all' ipotesi che l'insieme $E' = E'^{n} + E'^{p}$ non sia nullo e volendo anche prescindere dalla difficoltà che s'incontra nella valutazione per eccesso e che abbiamo presa in esame al n. 14, i risultati del Lebesgue andrebbero ancora leggermente precisati ammettendo la possibilità di rinchiudere l'insieme E'^{p} [E'^{n}] in insiemi d'intervalli I tali che $m(I)$ sia piccolo ad arbitrio e $P(I)$ [$N(I)$] finita. La prima parte della proposizione della p. 181 andrebbe allora enunciata così:

Affinchè $f(x)$ sia a variazione limitata è necessario e sufficiente che $\overline{D}_+ f(x)$ sia sommabile nell' insieme dei punti in cui è finita e positiva (negativa) e che l'insieme E'^{p} [E'^{n}] dei punti in cui $\overline{D}_+ f(x) = +\infty$ [$-\infty$] possa essere rinchiuso in un insieme d'intervalli I che abbia misura piccola ad arbitrio [37]) *e che fornisca una somma di variazioni positive $P(I)$ [negative $N(I)$] che sia finita.*

Bibliografia.

1. A. Denjoy — Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues (Journal de Math., t. 1, 1915).

2. D. Th. Egoroff — Sur les suites de fonctions mesurables (Comptes rendus de l'Acad. des Sc., t. 152, 1911, p. 244).

3. H. Lebesgue — (a) Leçons sur l'intégration (Paris, Gauthier-Villars, 1928); (b) Intégration des fonctions discontinues (Annales Ecole Norm., t. 27, 1910); (c) Sur certaines démonstrations d'existence (Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 45, 1917, p. 132); (d) Sur les correspondances entre les points de deux espaces (Fundamenta Math., t. 2, 1921, p. 259).

4. B. Levi — (a) Riflessioni sopra alcuni principi della teoria degli aggregati e delle funzioni (Scritti matematici offerti ad Enrico d'Ovidio. Torino, Bocca, 1918, pp. 305—324); (b) Sui procedimenti transfiniti (Math. Ann., Bd. 90, Heft 3/4, 1923); (c) Intorno ad un ragionamento fondamentale nella teoria delle famiglie normali di funzioni (con T. Viola-Bollettino Un. Mat. Ital., anno XII, n. 4, ottobre 1933).

5. N. Lusin — (a) Sur un théorème fondamental de Calcul intégral (Recueil de la Société mathématique de Moscou, t. 28, 2, 1911); (b) Sur les propriétés des fonctions mesurables (Comptes rendus de l'Acad. de Sc., t. 154, 1912, p. 1688).

[37]) E perciò è necessariamente $m(E'^{p}) = 0$ [$m(E'^{n}) = 0$].

6. W. Sierpiński — (a) L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la Théorie des Ensembles et l'Analyse (Bulletin de l'acad. des Sc. de Cracovie, Série A, apr.-maggio 1918); (b) Leçons sur les Nombres transfinis (Paris, Gauthier-Villars 1928).

7. L. Tonelli — (a) Fondamenti di calcolo delle Variazioni (Bologna, Zanichelli, 1921, vol. 1°); (b) Sulla nozione d'integrale (Ann. di Mat. 4a serie, t. 1, 1923—1924).

8. Ch. J. de la Vallée Poussin — (a) Cours d'Analyse Infinitésimale (seconda ediz. Paris-Louvain, 1912, t. 2°); (b) Intégrales de Lebesgue, Fonctions d'Ensembles, Classes de Baire (Paris, Gauthier-Villars, 1916).

9. T. Viola — (a) Riflessioni intorno ad alcune applicazioni del postulato della scelta di E. Zermelo e del principio di approssimazione di B. Levi nella teoria degli aggregati (Bollett. Un. Mat. Ital., anno X, n. 5, dic. 1931); (b) Sul principio di approssimazione di B. Levi nella teoria della misura degli aggregati e in quella dell' integrale di Lebesgue (Bollet. Un. Mat. Ital., anno XI, n. 2, apr. 1932).

10. G. Vitali — Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali (Atti della R. Accad. delle Sc. di Torino, vol. 43, 1908, p. 229).

11. E. Zermelo — (a) Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann (Math. Ann., Bd. 59, 1904); (b) Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung (Math. Ann., Bd. 65, 1907).