Es liegt also zugleich eine homöomorphe Abbildung $h$ von $D$ auf $E$ vor, bei der $h(x_{n_1,\ldots,n_k}) = y_{n_1,\ldots,n_k} = f(x_{n_1,\ldots,n_k})$, dann hat man aber notwendig in allen Punkte von $D \cdot X$ die Übereinstimmung $h(x) = f(x)$ [10]. Die Abbildung $f$ ist also auf $D \cdot X$ eine Homöomorphie. Nun ist $D$ als dyadisches Diskontinuum in sich kompakt und folglich abgeschlossen in $X^*$; daher ist $D \cdot X$ abgeschlossen in $X$; ferner ist $D \cdot X$ insichdicht, da die insichdichte Menge der Punkte $x_{n_1,\ldots,n_k}$ in $D \cdot X$ dicht ist. Also ist $D \cdot X$ in $X$ perfekt. Damit ist das Theorem bewiesen.

[10]) Eine stetige Abbildung einer Menge $M$ wird nämlich durch ihre Werte auf einer in $M$ dichten Menge eindeutig bestimmt.

---

# La nozione di »dominio deduttivo« e la sua importanza in taluni argomenti relativi ai fondamenti dell'analisi.

Di

**Beppo Levi** (Bologna).

Grato all'ospitalità della Direzione dei *Fundamenta Mathematicae*, vorrei presentare ai lettori dell'apprezzato periodico un ordine di considerazioni esposto già da me parecchi anni addietro in due successive pubblicazioni [1]) le quali non poterono forse essere sufficientemente rilevate anzitutto per la loro brevità in qualche riguardo forse eccessiva ed inoltre, almeno per una di esse, per la poca diffusione del volume che la contiene. L'occasione a ritornare su di esse mi si presenta ora perchè il Dr. Tullio Viola ha ripreso da alcuni anni questo ordine di vedute, illustrandolo con varie applicazioni alla discussione dei fondamenti della teoria delle funzioni e degli aggregati [2]); e precisamente un suo lavoro su tale argomento è pubblicato al seguito del presente articolo.

1-Si tratta, nelle considerazioni che intendo esporre, di osservazioni di portata molto generale nel campo della metamatematica; tuttavia, a cagion di chiarezza, mi pare conveniente di cominciare con riflessioni che riguardano strettamente l'aritmetica.

Ricordo come l'ultimo ventennio del 1800 abbia considerato come uno dei più notevoli contributi all'analisi della nozione di „numero reale" la riduzione di essa alle „classi di numeri razionali": avvenga

[1]) B. Levi, *Riflessioni sopra alcuni principii della teoria degli aggregati e delle funzioni* in Scritti matematici offerti a Enrico D'Ovidio-Torino, Bocca, 1918. *Sui procedimenti infiniti.* Math. Ann. Bd. 90. 1923.

[2]) T. Viola, *Riflessioni intorno ad alcune applicazioni del postulato della scelta.* (Boll. dell'Unione Mat. Ital., X, 1931) *Sul principio di approssimazione di B. Levi nella teoria della misura* ecc. (ibid. XI, 1932).

questa riduzione al modo di Weierstrass e Cantor, mediante la considerazione di successioni convergenti di numeri razionali, ovvero, col Dedekind, col metodo delle sezioni. In seguito a questa riduzione si potè dire, col Weierstrass, che l'intera analisi discendeva ormai, per virtù di sole definizioni, dalla semplice nozione di numero intero. Questo apparente successo fu però subito contraddetto dall'antinomia, perchè, mentre il Cantor mostrava che l'aggregato dei numeri reali era non-numerabile, era poi evidente che, mediante sole definizioni, non era possibile, partendo da un aggregato numerabile (sia esso quello dei numeri interi ovvero, senz'altro, quello dei numeri razionali) generare un aggregato di potenza superiore. Non si può superare l'antinomia altrimenti che concedendo che mediante definizioni, partendo dall'aggregato dei numeri razionali, si possono bensì generare *alcuni numeri reali*, ma non *l'aggregato dei numeri reali*. Se, per comodità, ci limitiamo a parlare del metodo delle sezioni di Dedekind (che teoricamente si presenta come più perfetto perchè fra ciascun ente *sezione* e ciascun ente *numero reale* stabilisce una corrispondenza biunivoca) si supera l'antinomia soltanto ammettendo — ciò che è effettivamente — che la nozione di „sezione" è *una intuizione a sè*, identificabile, nel modo più semplice, con quella di „punto di una retta euclidea". Nella geometria, siamo avvezzi, a partire da Euclide, a trovare perfettamente sensate e rigorose proposizioni come „sia $A$ un punto", „sia $l$ un segmento": nessuno pretende che i primi libri di Euclide manchino di rigore perchè vi si discorre di proprietà di punti e di segmenti prima di aver provveduto alla loro identificabilità mediante riferimento ad un sistema di coordinate o di aver parlato di commensurabilità o di un qualsiasi simbolismo per la identificazione delle lunghezze. Non v'ha alcuna ragione perchè diverso debba essere il pensiero del matematico in rapporto all'algebra e che si debba ritenere impossibile o meno rigoroso il fondare le proposizioni dell'algebra e dell'analisi sopra le „proprietà" *(assiomi, postulati)* dei numeri reali e sopra l'applicazione di tali proprietà a elementi *(numeri)* pensati come assegnati con semplici enunciazioni della forma „sia $a$ un numero"; che si debba invece ritenere necessario che ogni numero sia, per lo meno mentalmente e come possibilità, assegnabile mediante le sue approssimazioni razionali. Effettivamente, teorie assiomatiche dei numeri reali sono state esposte da diversi autori: ciò che risulta dalle precedenti osservazioni è che esse non



sono un *diverso modo di trattare la teoria dei numeri reali*, ma sono, in realtà, *il solo modo che rispetti le più profonde esigenze della logica*; la relazione fra numeri reali e sezioni dell'aggregato dei razionali è precisamente che ogni sezione definisce un numero reale, ogni numero reale definisce una sezione, ogni sezione è definibile mediante un numero reale, ma *non* ogni numero reale è definibile mediante una sezione.

Il pensiero opposto a quello enunciato proviene da una confusione fra le esigenze della teoria matematica e quelle della pratica: praticamente è vero che noi non possiamo *assegnare un numero reale*, ma possiamo soltanto *assegnare approssimazioni razionali di un numero reale*, allo stesso modo che non possiamo costruire una sbarra la cui lunghezza sia *certamente* un metro. Ma non è soltanto nella geometria o nella teoria dei numeri reali che gli elementi su cui si svolge il ragionamento debbono pensarsi fissati con atto di pensiero irreduttibile ad una successione di atti praticamente effettuabili, od anche soltanto ad una successione di atti puramente concettuali antecedentemente ammessi come effettuabili: ciò avviene, si può dire, ogni volta che il pensiero matematico allarga il campo delle proprie considerazioni. Nella stessa aritmetica dei numeri interi, nella teoria dei numeri, si studiano proprietà e relazioni fra *numeri interi sinteticamente concepiti*: il programma di considerare i numeri interi come costruiti successivamente mediante aggregazione di unità è illusoria; mediante una tale costruzione si può riuscire a formare un certo numero di *esempi di numeri interi*, non mai si riuscirà così alla nozione generica di „numero intero"; ed il merito principale della teoria assiomatica dei numeri interi del Peano sta appunto nell'aver riconosciuto esplicitamente la necessità di considerare la nozione di „numero intero" come idea primitiva.

2-La stessa osservazione si deve ripetere ogni volta che introduciamo nelle nostre considerazioni nuovi aggregati di potenze crescenti, anche quando *diciamo* di costruirli. Noi consideriamo ad es. un aggregato numerabile e i ben-ordinamenti di esso: l'aggregato di questi ben ordinamenti ha la potenza $\aleph_1$; possiamo noi dire di aver realmente *generato un aggregato* di tale potenza? Possiamo dire di saper costruire uno *generico* dei suddetti ben-ordinamenti? No; perchè, in qualunque modo noi definiamo una classe più o meno vasta di tali ben-ordinamenti, questa ne comprende sempre soltanto una infinità numerabile. I ben-ordinamenti che, caso per caso, noi sappiamo effettivamente costruire costituiscono l'*esperienza mentale* su cui ci formiamo l'*intuizione* di un ben-ordinamento generico; e quando poi istituiamo ragionamenti intorno ad uno o ad una classe di tali ben-ordinamenti generici (per es. per dimostrare che un aggregato numerabile di essi non può comprenderli tutti), noi poniamo dinnanzi alla nostra mente i ben-ordinamenti su cui ragioniamo con atto di pensiero unitario e non con una qualsiasi generazione.

3-L'osservazione può ripetersi per la nozione generale di „funzione", e così di seguito. In ogni caso il matematico ha a fare con un aggregato, sugli elementi del quale egli può ragionare in quanto, *supposti fissati, ma non ulteriormente precisati*, un certo numero di elementi di esso, si può ragionare senza ambiguità intorno ai risultati di determinate operazioni eseguibili sopra di essi: l'effettiva assegnazione dei detti elementi mediante quella di elementi appartenenti ad altri aggregati considerati più semplici ed elementari non è richiesta, nè generalmente eseguibile.

Ho riassunto da tempo[3]) queste osservazioni mediante l'enunciato: *In ogni teoria matematica si* **suppongono** *taluni aggregati, per ciascuno dei quali si postula la possibilità di scegliere (fissare) arbitrariamente elementi, con atto di pensiero unico, non scomponibile o riduttibile ad altri più semplici.* Ho chiamato i suddetti aggregati gli *aggregati primi della teoria trattata*; e dico che essi definiscono il *dominio deduttivo* in cui si svolge detta teoria. Così, per ritornare sugli esempi precedenti, il dominio deduttivo della geometria elementare è definito dallo *spazio*, aggregato primo di punti; la maggior parte delle teorie aritmetiche si svolgono nel *dominio deduttivo* definito dall'aggregato primo dei numeri interi *(N,* secondo Peano, $\mathfrak{Z}$, secondo Hilbert): e ho detto „la maggior parte" perchè può nascere il dubbio che la cosidetta aritmetica analitica esorbiti da questo dominio: ne esorbita certamente almeno nella sua esposizione abituale; la teoria delle equazioni algebriche, anche limitata alle equazioni a coefficienti razionali, non è contenuta in questo dominio, nella sua esposizione classica: molta parte di essa vi si può però ricondurre. Invece l'ordinaria analisi delle funzioni ha necessariamente come dominio deduttivo quello in cui è primo l'aggregato dei numeri reali: tuttavia esiste una parte di tale analisi (ad es. il

[3]) Cfr. il primo lavoro citato in [1]).



Calcolo delle variazioni o più generalmente il calcolo funzionale) che non può essere contenuta in questo dominio e che suppone, come aggregato primo, anche l'aggregato delle funzioni (eventualmente limitato da qualche condizione restrittiva). In una nota recente, pubblicata in unione a T. Viola[4]), abbiamo osservato che la teoria delle famiglie normali di funzioni suppone come primo l'aggregato delle successioni convergenti di funzioni, e che basta questa osservazione per eliminare l'obiezione che le sue deduzioni si appoggino al postulato delle infinite scelte.

Una delle illusioni che può aver contribuito e può contribuire a nascondere l'evidenza di questo modo di vedere consiste nella dipendenza per *composizione (Belegung)* che lega fra loro i principali aggregati primi da cui dipende l'analisi: aggregato dei numeri interi, aggregato dei numeri reali, aggregato delle funzioni numeriche, ecc.: appare, a causa di questa dipendenza, che gli elementi di ciascuno di questi aggregati si possano *definire mediante riunione, secondo una legge determinata, di elementi di un aggregato precedentemente postulato o costruito*: in verità non sono i singoli elementi del nuovo aggregato che in tal modo si riesce a definire, ma soltanto l'aggregato nel suo insieme: subito che si voglia discorrere di relazioni fra elementi generali del nuovo aggregato ed altri elementi appartenenti ad esso o a qualcuno di quelli precedentemente ammessi, si presenterà la necessità di assumere detti elementi come risultato di un atto di pensiero unico e non scindibile in altri più semplici. Io dico che si compie un *ampliamento del dominio deduttivo* quando si associano nuovi aggregati primi a quelli precedentemente ammessi per una determinata teoria. Quando gli elementi dei nuovi aggregati primi si possono considerare come composti mediante quelli degli aggregati primi precedenti con una legge enunciabile completamente in termini di questi, si può dire che si compie un *ampliamento naturale del dominio deduttivo*: in questo senso si può dire che l'apparente procedimento di aritmetizzazione dell'analisi (riduzione di tutte le nozioni analitiche al concetto di *numero intero)* che è parso un successo di rigore della fine dell'800, non è invece che un procedimento di successivi ampliamenti naturali del dominio deduttivo. Nelle mie ricerche precedenti ho dato al termine „*ampliamento naturale di un*

[4]) *Intorno ad un ragionamento fondamentale nella teoria delle famiglie normali di funzioni.* Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, XII, 1933.

*dominio deduttivo"* un significato più ristretto, sul quale ritornerò più innanzi e che forse può essere conveniente di mantenere (n. 6).

4-La distinzione fra dimostrazioni costruttive e dimostrazioni esistenziali e la valutazione delle esigenze di rigore del cosidetto intuizionismo si riduce a una questione di enunciazione del dominio deduttivo in cui si intende svolgere un determinato ragionamento matematico. In verità „intuizionismo" nel senso di accettare soltanto ragionamenti che dipendano da un numero finito di elementi assegnati con un numero finito di operazioni mentali realmente effettuabili, non ha senso o non è matematicamente realizzabile. Perchè occorre sempre ancora definire quali siano le operazioni mentali ammesse e non è matematicamente più giustificato di ammettere la successiva aggiunzione di unità per formare dei numeri interi che di ammettere la libera assunzione di elementi nella classe dei numeri interi considerata nel suo insieme come un dato dell'intuizione; con questa differenza, che col primo procedimento non si potrebbe nemmeno parlare di proprietà generali dei numeri interi (cfr. n. 1).

E' invece pienamente giustificato un „intuizionismo" (se così lo si vuol chiamare, modificando certamente il significato della parola „intuizione") nel quale si domandi di ragionare sempre sopra un numero finito di elementi e di operazioni da scegliersi e da effettuarsi in un dominio deduttivo precisato anteriormente; e nel quale anche si graduino i dominii deduttivi secondo il numero e la immediata intuibilità degli aggregati assunti come primi; e nel quale infine possa anche attribuirsi un maggior pregio, per più intima analisi, a un ragionamento il quale arrivi a stabilire una determinata proposizione svolgendosi in un dominio deduttivo il più semplice possibile nella nominata graduazione. (Un desiderato, che potrebbe precisare ulteriormente questa preferenza, sebbene non sempre si riesca a soddisfare, potrebbe essere che il dominio deduttivo in cui si svolge ogni dimostrazione sia il più semplice possibile in cui l'enunciato della proposizione medesima abbia senso (cfr. n. 7).

Comunque si può affermare che *ogni dimostrazione esistenziale è anche costruttiva in un dominio deduttivo convenientemente precisato.* Consideriamo, in via d'esempio, la dimostrazione secondo Cauchy del teorema di d'Alembert: essa utilizza il fatto che ogni funzione continua in un dato campo di numeri, chiuso, vi raggiunge il minimo: ora si può osservare che, poichè una funzione razionale intera rappresenta un numero finito di operazioni determinate (moltiplicazioni ed addizioni) da effettuarsi sopra numeri reali, si può pretendere che la dimostrazione di ogni proposizione relativa a funzioni razionali intere si svolga interamente nel dominio definito dall'aggregato dei numeri reali, assunto come primo. Ciò non avviene per la suddetta proposizione, la quale suppone come aggregato primo quello delle funzioni continue: in essa si ragiona infatti di una funzione continua arbitrariamente scelta nel detto aggregato, senza che occorra di precisarla mediante l'enunciazione di operazioni determinate da effettuarsi su numeri reali, e del minimo afferma quindi l'esistenza senza poter dare alcun procedimento per collocarlo, nei singoli casi particolari, in un determinato punto (numero reale). La detta dimostrazione è dunque soltanto esistenziale, non costruttiva, nel dominio deduttivo dei numeri reali; diviene invece anche costruttiva nel dominio deduttivo delle funzioni. Invero, in questo dominio, ogni funzione (reale di variabile reale) deve considerarsi come un aggregato di coppie ordinate di numeri reali, interamente definito dal solo fatto di nominare la funzione; per cui, appena affermato che il limite inferiore dei valori della funzione è un valore della medesima, risultano definiti, senza intermediario di altre operazioni, i valori della variabile per cui questo valore è raggiunto.

La domanda di *determinare, senza uscire dal dominio deduttivo dei numeri reali, un valore delle variabili per cui una assegnata funzione razionale intera raggiunge il minimo modulo,* e quindi parimenti quella di *stabilire il teorema di d'Alembert senza uscire dal dominio deduttivo dei numeri reali (in questo essendo contenuti anche i numeri complessi)* sono problemi matematici pienamente giustificati e non oggetto di possibile discussione: dico più precisamente, non oggetto di possibile *opinione,* come spesso si è fatto apparire dividendo i matematici in scuole filosofiche di nominalisti, idealisti, realisti ecc.: la divisione sorge, a mio parere del tutto ingiustificata, quando, dal riconoscimento del problema e del suo valore, si passi respingere in modo assoluto la dimostrazione valida soltanto nel dominio deduttivo più ampio.

5-E' importante di esaminare da questo punto di vista la proposizione dello Zermelo relativa alla bene-ordinabilità di ogni aggregato. Il ragionamento di Zermelo si riduce in ultima analisi a questo: essendo assegnato un aggregato $A$ consideriamo l'aggregato $B$ di tutti i possibili ben-ordinamenti di $A$: fissiamo quindi un elemento qualunque di $B$. Che, seguendo più da vicino lo

Zermelo, il procedimento dimostrativo appaia un po' più complicato, è cosa del tutto secondaria e inessenziale: invece dell'aggregato $B$ dei ben-ordinamenti si considera l'aggregato di tutti i modi di scegliere un elemento distinto in tutti gli aggregati parziali estraibili da $A$, e in questo aggregato si fissa ancora un elemento. E' chiaro che nell'uno e nell'altro procedimento non si ragiona soltanto sopra l'aggregato $A$, a questo applicando proposizioni generali della teoria degli aggregati, bensì si introduce nel ragionamento un nuovo *aggregato primo* (l'aggregato $B$ di cui sopra o altro equivalente) e di questo si pensa di assumere un elemento con atto di pensiero irreduttibile ad altri più semplici: la forma schematica sopra suggerita mostra però che, nel caso presente la *deduzione* è illusoria: effettivamente non si fa altro che *affermare (non dimostrare)* che il ben-ordinamento è *concepibile*, e dopo ciò si effettua un *ampliamento ad hoc del dominio deduttivo* al fine di dar senso all'operazione mentale di „fissare un particolare ben-ordinamento di $A$".

Ora in questo modo di procedere si presentano alcuni particolari per cui ritengo si debba dire che *la nozione della ampliabilità del dominio deduttivo nulla presta alla accettabilità della proposizione di Zermelo.* In primo luogo è chiaro che non è permesso di introdurre arbitrariamente aggregati primi, essendo necessario di accertare la non contradditorietà della definizione dei loro elementi: nel caso che l'aggregato primo considerato sia ad es. „lo spazio" della geometria ovvero sia „la successione dei numeri naturali" questa domanda si riduce alla nota richiesta della compatibilità dei postulati. Più frequentemente, nei successivi ampliamenti di un dominio deduttivo (ad es. in quelli di cui si è fatto cenno nei n, prec.) si ottiene la dimostrazione della compatibilità colla effettiva costruzione (nel dominio deduttivo antecedente all'ampliamento) di elementi del nuovo aggregato da assumersi come primo: ciò avviene quando, nel dominio deduttivo dei numeri razionali (o meglio dei numeri interi), si definiscono *particolari numeri reali*, ovvero quando, nel dominio deduttivo dei numeri reali, si definiscono *particolari funzioni* (eventualmente assoggettate a convenienti restrizioni, per es. *particolari funzioni continue).* Nel caso speciale della proposizione di Zermelo tale dimostrazione manca, e manca necessariamente perchè, essendo lo scopo medesimo del supposto ampliamento del domini odeduttivo quello di stabilire l'esistenza di *un* ben-ordinamento dell'aggregato $A$, cesserebbe ogni ragione di effettuare il detto ampliamento se ci



si astringesse a *costruire prima qualche ben-ordinamento di $A$*. E' interessante al riguardo ricordare in qual modo il problema che Zermelo ha cercato di risolvere si sia posto inizialmente: si trattava di decidere la presunzione del Cantor che l'aggregato dei numeri reali si potesse ben-ordinare; ora, come ho già osservato altrove, è noto che si può caratterizzare l'aggregato dei numeri reali mediante un sistema di postulati completo in sè, al quale cioè non sia possibile aggiungere un nuovo postulato indipendente. Ne segue che non è possibile di postulare ad es. la proposizione „esistono ben-ordinamenti dell'aggregato dei numeri reali": essa, o è conseguenza del suddetto sistema di postulati, ovvero è in contraddizione con essi.

Si possono d'altronde riassumere queste considerazioni in una osservazione meno minutamente analitica, ma più immediatamente conclusiva: ed è che l'assegnazione di un dominio deduttivo e dei suoi aggregati primi ha la sua ragione matematica nelle deduzioni che possono farsi riguardo ad elementi arbitrariamente fissati di questi aggregati; non avrebbe invece ragion d'essere quando i detti aggregati siano introdotti con atto d'arbitrio solo per poter affermare l'esistenza di un loro elemento.

V'ha poi, contro la proposizione dello Zermelo, ancora un'altra obiezione: ed è che essa vorrebbe affermare la ben-ordinabilità di *ogni* aggregato: se anche fosse permesso di considerare vera la proposizione per ogni determinato aggregato $A$ in un dominio deduttivo più ampio di quello in cui $A$ è definito, si dovrebbe, per concludere, ammettere di poter compiere tale ampliamento infinite volte[5]).

6-Un certo interesse potrebbe avere il rispondere alla domanda *quali siano gli ampliamenti che si possono consentire ai dominii deduttivi della ricerca matematica.* Non pare che la risposta possa essere altra che sperimentale e, qualunque essa sia, non oserei ritenere possa essere assoluta e definitiva: comunque dalle considerazioni precedenti emerge già che il procedimento di successivi ampliamenti più comune e che si è mostrato più utile allo svolgimento del pensiero matematico si può riassumere come segue: le nozioni generali di „numero intero" e di „spazio geometrico" costituiscono due aggregati primi che stanno alla base rispettivamente dell'analisi

[5]) Cfr. la 2ª Nota citata in [1]).

e della geometria: esse si formano per astrazione dalla conoscenza di *singoli numeri interi* e di *singole operazioni geometriche* ma difficilmente si dà già nome di matematica a ricerche individuali su tali oggetti singoli, che non suppongano già le suddette astrazioni: partendo da questi aggregati primi il dominio deduttivo delle ricerche matematiche si amplia poi successivamente mediante la considerazione di nuovi aggregati primi, definiti generalmente mediante composizione (*Belegung)* di aggregati precedentemente acquisiti, con questa regola però, che ciascuna volta, l'esistenza dei nuovi aggregati riesce dimostrata mediante la effettiva costruzione di *(singoli)* loro elementi ottenuta senza uscire dal dominio deduttivo precedente alla introduzione del nuovo aggregato.

Se poi fermiamo l'attenzione a ciò che avviene nel caso particolarmente importante del dominio deduttivo definito dall'aggregato primo dei numeri reali (e, almeno parzialmente, avviene pure nel caso del dominio deduttivo dell'aggregato delle funzioni) si giustifica di porre in una posizione a parte quegli ampliamenti del dominio deduttivo i quali portino soltanto a considerare nuovi enti i quali si possano *approssimare* nel dominio precedente all'ampliamento: è a questa particolare forma di ampliamento che in lavori precedenti ho riservato il nome di *ampliamenti naturali*, precisandone la nozione come segue:

*Sia $\Omega$ un dominio deduttivo al quale appartengano gli aggregati $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$,.... e sia $E$ un nuovo aggregato primo, ciascun elemento del quale sia definito come* **corrispondente** *ad un sistema infinito di elementi scelti (eventualmente soddisfacendo a determinate condizioni) nei suddetti aggregati $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$,....* (la *corrispondenza* potendo spesso identificarsi colla concezione simultanea della detta infinità di elementi, talvolta anche colla „assegnazione di un nome" a tale infinità); *sia infine $f(x)$ un ente, funzione della variabile $x$, in quanto questa assume valori in $E$ o in un suo subaggregato $D$. Supponiamo poi che sia definita una funzione numerica positiva $d(y, z)$ della coppia $(y, z)$ di valori possibili di $f(x)$ la quale prenda il valore $0$ sempre e solo quando $y = z$. Se avviene che, indicato con $a$ un elemento di $D$, comunque si assegni un $\delta > 0$ si possa fissare un numero finito $n$ degli elementi di $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$,... costituenti il sistema infinito corrispondente ad $a$ tali che, indicando con $a'$ e $a''$ due elementi qualunque di $D$ purchè gli analoghi sistemi di elementi che li definiscono abbiano i suddetti $n$ elementi comuni col precedente, sia sempre $d(f(a'), f(a'')) < \delta$; allora noi diciamo che $f(a)$* ***esiste in un ampliamento naturale del dominio $\Omega$.***



Ho chiamato questo enunciato *principio di approssimazione* e nelle due note citate in [1]) ho mostrato mediante esempi l'importanza della sua applicazione a vari argomenti di analisi e come esso possa servire a regolarizzare parecchie deduzioni che si fanno abitualmente dipendere dal principio delle infinite scelte. Altri esempi si possono vedere nei lavori citati del Viola e nella memoria di questo autore che segue alla presente.

Ma non si può dire che il procedimento di ampliamento descritto sia esclusivo: altri debbono accogliersi per es. nelle ricerche di logica generale e della teoria generale degli aggregati: così, ad es., è questione vecchia se, chiamato *finito* un aggregato di potenza finita (rappresentata da un numero naturale), si possa affermare che da ogni aggregato infinito *(non-finito)* si può estrarre una successione numerabile. Ora, restando nel dominio deduttivo dei numeri naturali, si può mostrare che *se un aggregato non è finito, nessuna successione finita di estrazioni di elementi da esso può esaurirne gli elementi.* Pare che questa osservazione sia sufficente per permettere la considerazione *come aggregato primo* dell'aggregato delle successioni numerabili che si possono estrarre dall'aggregato dato anche se non siamo in grado di definire qualcuna particolare di tali successioni: la ragione mi pare sia che tale ammissione rientra nello stesso ordine di astrazioni per cui, per es., dalla conoscenza di particolari numeri naturali si passa alla ammissione dell'aggregato primo dei numeri interi; più generalmente rientra nello stesso ordine di astrazioni che giustifica la determinazione assiomatica dei dominii fondamentali della ricerca matematica (numeri interi, spazio geometrico, logica matematica, teoria degli aggregati).

7-Due questioni, in certo modo parallele ad altre che sono alla base delle ricerche assiomatiche, si pongono naturalmente quando si analizza la struttura delle teorie matematiche dal punto di vista del dominio deduttivo; e cioè:

1°-Assegnato un sistema di proposizioni, determinare il più ristretto dominio deduttivo in cui esso ha senso ed è dimostrabile. Seguendo la più comune esperienza della ricerca matematica, si può supporre senz'altro che il detto dominio deduttivo ammetta fra i suoi aggregati primi quello dei numeri naturali.

2º-Assegnato un dominio deduttivo (che potrà essere quello definito dai numeri naturali o un suo conveniente ampliamento) determinare le proposizioni che possono dimostrarsi in esso.

Potrà pure, a fianco di questi problemi di *dimostrabilità*, porsi una domanda indipendente relativa alla *verità* o alla *asseribilità* delle proposizioni, in quanto non mancano esempi di proposizioni le quali hanno senso in un dominio deduttivo, mentre non se ne conosce una dimostrazione che si svolga interamente in esso: tali sono frequentemente le proposizioni per le quali si eleva la riserva dell'uso delle infinite scelte. La risposta affermativa o negativa a tale domanda non può evidentemente sottrarsi a una maggiore soggettività del giudizio: a mio parere, ritengo si debbano accogliere per vere in un determinato dominio deduttivo anche quelle proposizioni per le quali il fatto enunciato è identificabile in detto dominio, pure quando ad esso ne sfugga la dimostrazione.

---

# Ricerche assiomatiche sulle teorie delle funzioni d'insieme e dell'integrale di Lebesgue.

Di

Tullio Viola (Bologna)

## Introduzione.

1. Il presente lavoro intende contribuire a precisare i procedimenti di costruzione e di dimostrazione di enti e di teoremi analitici nei quali direttamente o indirettamente si deve far capo alle infinite scelte. Il punto di vista da cui ci mettiamo potrebbe chiamarsi „conciliativo", in quanto cerca di dare una giustificazione di molti procedimenti matematici che fanno uso del noto postulato di *E. Zermelo* [11, a, b]. Nella breve bibliografia che faccio seguire all' articolo sono indicate, fra le altre, le pubblicazioni del Levi nelle quali il suo „*principio di approssimazione*" si trova per la prima volta enunciato ed applicato [4, a, b]. Sono pure indicate due piccole note [9, a, b] da me pubblicate su questo argomento nel Bollettino dell' Unione Matematica Ital., le quali costituiscono un preliminare utile e parte integrante del presente lavoro.

2. Nell' articolo che precede questo nostro lavoro in questo stesso volume, il prof. Levi ricorda le definizioni di „*dominio deduttivo*" e di „*aggregati primi*" e l'enunciato del suo „*principio di approssimazione*". In molti casi in cui si afferma abitualmente un' applicazione del postulato di Zermelo, si tratta in verità di un *ampliamento del dominio deduttivo*, mediante l'aggiunta di nuovi aggregati primi. In altri casi, invece, il postulato di Zermelo viene effettivamente applicato in astratto, cioè senza precisazione del dominio deduttivo in cui si operano le scelte arbitrarie, ed è allora che la sua legittimità ci pare discutibile. Tali sono ad esempio quasi tutte