Ein Satz über stetige Abbildungen.

Von

W. Hurewicz (Amsterdam).

Wir betrachten eine stetige (eindeutige) Abbildung eines metrischen Raumes X auf einen Raum Y. Ist x ein Punkt von X und M eine Teilmenge von X, so sagen wir, f sei *stationär* in x in Bezug auf M, wenn alle in einer hinreichend kleinen Umgebung von x gelegenen Punkte von M das gleiche Bild haben. Ist f in *keinem* Punkt von M in Bezug auf M stationär, so nennen wir f *nirgends stationär* auf M [1]). Das Ergebnis dieser Arbeit besteht im folgenden:

Theorem. *Enthält X eine Teilmenge, auf der f nirgends stationär ist* [1]), *so gibt es eine in X perfekte* [2]) *Menge, die durch f eineindeutig und beiderseits stetig abgebildet wird.*

Übrigens wird sich aus dem Beweis die schärfere Aussage ergeben: Zu jeder Menge M, auf der f nirgends stationär ist, gibt

[1]) Die Vereinigung aller Teilmengen von X, auf denen f nirgends stationär ist, liefert die grösste Menge von dieser Eigenschaft. Diese Menge — wir wollen sie die *Kernmenge* der Abbildung f nennen und mit $K(f)$ bezeichnen — ist, wie man leicht sieht in X abgeschlossen (eventuell leer). Man kann sie aus X durch sukzessive Reduktion erzeugen, indem man für jede Menge $M \subset X$ unter $M_1(f)$ die Menge aller Punkte versteht, in denen f in Bezug auf M nicht stationär ist und dann üblichereweise durch Iterierung (kombiniert mit der Produktbildung) die Mengen $M_\alpha(f)$ für transfinite Ordinalzahlen α erklärt. Es gibt ein kleinstes α mit $X_\alpha(f) = X_{\alpha+1}(f)$ (falls X separabel, ist dies eine Zahl der ersten oder zweiten Zahlenklasse) und für dieses α ist $K(f) = X_\alpha(f)$. Dies gilt allgemein für eindeutige (auch nicht stetige) Abbildungen. Im Spezialfall der identischen Abbildung $f(x) = x$ ist $K(f)$ der perfekte Kern (die grösste insichdichte Teilmenge) von X. Die Mengen $X_\alpha(f)$ können als verallgemeinerte Ableitungen aufgefasst werden.

[2]) D. h. eine in X abgeschlossene und insidichte Menge.

es eine in X perfekte Menge, auf der f topologisch ist und *in der eine Teilmenge von M dicht liegt.*

Bevor wir zum Beweis des Theorems übergehen, wollen wir aus ihm einige Schlussfolgerungen ziehen: Setzen wir den Raum X als separabel voraus. Die Voraussetzung des Theorems ist dann sicher erfüllt, sobald der Bildraum *Y nicht abzählbar ist.* Wählt man nämlich zu jedem Punkt von Y je einen Originalpunkt in X, so erhält man eine nicht abzählbare Teilmenge von X, die nach einem bekannten Satz über separable Räume einen insichdichten Teil M enthalten muss, und man sieht sofort, dass f auf M nirgends stationär ist [3]). Wir sehen also:

Eine stetige Abbildung eines separablen Raumes, deren Wertmenge nicht abzählbar ist, ist eine Homöomorphie auf einer in X perfekten Menge.

Ist insbesondre X ein *vollständiger* separabler Raum, so enthält bekanntlich jede in X perfekte Menge ein *dyadisches Diskontinuum* [3a]), d. h. ein topologisches Bild der Cantorschen nirgends dichten linearen perfekten Menge; falls Y nicht abzählbar ist, wird also nach dem Vorangehenden durch f ein dyadisches Diskontinuum homöomorph abgebildet. Dies ist ein Resultat von Kuratowski [4]), dessen Konsequenz [4a]) die bekannte Tatsache ist, dass jede *analytische* Menge (diese Mengen können, wie man weiss, als stetige Bilder vollständiger Räume aufgefasst werden), falls sie nicht abzählbar ist, ein dyadisches Diskontinuum enthält.

Man kann nun allgemein die Frage stellen: Welche sind die hinreichenden und notwendigen Bedingungen dafür, dass alle aus einem gegebenen Raum X durch stetige Abbildungen entstehenden Räume, wofern sie nicht abzählbar sind, dyadische Diskontinua enthalten? Eine *hinreichende* Bedingung können wir auf Grund der oben angeführten Ergebnisse leicht angegeben. Diese Bedingung (wir nennen sie kurz „Bedingung P“) besteht darin, dass es zu

[3]) Denn f ist auf M umkehrbar eindeutig, und eine umkehrbar eindeutige Abbildung einer insichdichten Menge ist auf dieser Menge trivialerweise nirgends stationär.

[3a]) Dies ist ein Spezialfall des Satzes, dass jede in einem vollständigen Raum gelegene insichdichte Menge G_δ ein dyadisches Diskontinuum enthält. Vgl. etwa H. Hahn, Reelle Funktionen I (Leipzig 1932), S. 127. Der Ausdruk „dyadisches Diskontinuum“ stammt von F. Hausdorff.

[4]) Vgl. C. Kuratowski, Topologie I (Warszawa—Lwów, 1933), p 227.

[4a]) Vgl. C. Kuratowski. a. a O p 232.

jeder *nicht abzählbaren* Menge $N \subset X$ ein dyadisches Diskontinuum $D \subset X$ geben soll, so dass der Durchschnitt $D \cdot N$ in D dicht liegt. Wir zeigen sogar, dass die Bedingung P *invariant* ist in Bezug auf stetige Abbildungen, d. h. zugleich mit einem Raum X hat auch jedes stetige Bild von X die Eigenschaft P, und enthält somit, falls es nicht abzählbar ist, ein dyadisches Diskontinuum. Sei nämlich f eine stetige Abbildung von X auf einen Raum Y, und sei N eine nicht abzählbare Teilmenge von Y. Indem wir jedem Punkt von N je einen Originalpunkt in X zuordnen, erhalten wir eine nicht abzählbare Menge $N^* \subset X$, zu der es nach Voraussetzung ein dyadisches Diskontinuum D gibt, so dass $D \cdot N^*$ in D dicht und folglich auch insichdicht ist. Auf $D \cdot N^*$ ist f ein-eindeutig, somit nirgends stationär [3]). Nach unserem Theorem gibt f eine Homöomorphie auf einer in D perfekten Menge D', und, wie wir im Anschluss an das Theorem bemerkten, kann man sogar annehmen, dass $D' . (D \cdot N^*) = D' \cdot N^*$ in D' dicht ist; dann ist auch die Bildmenge $f(D' \cdot N^*) \subset f(N^*) \subset N$ in $f(D')$ dicht; ferner ist D', als eine in einem dyadsischen Diskontinuum perfekte Menge, selbst ein dyadisches Diskontinuum, und dasselbe gilt von der mit D' homöomorphen Menge $f(D')$, die, wie eben bemerkt, eine in ihr dichte Teilmenge von N enthält.

Man kann leicht zeigen, dass jeder vollständige separable Raum der Bedingung P genügt [5]). Nach dem eben gesagten genügen daher der Bedingung P auch die stetigen Bilder der vollständigen separablen Räume, d. h. die *analytischen* Mengen [5a]).

[5]) Jeder vollständige Raum X hat nämlich, wie es sich im folgenden als Nebenresultat ergeben wird, die folgende Eigenschaft: Zu jeder *insichdichten* Teilmenge M von X gibt es in X ein dyadisches Diskontinuum, das eine in ihm dichte Menge aus Punkten vom M enthält. (Ein etwas schwächeres Resultat findet sich in meiner Arbeit in Fund. Math. 12, S. 108). Daraus folgt, dass ein separabler vollständiger Raum der Bedingung P genügt, denn in einem separablen Raum enthält jede *nicht abzählbare* Menge einen *insichdichten* Teil. Die eben angeführte Eigenschaft der vollständigen Räume kommt a fortiori jedem *in sich kompakten* Raum zu. Berücksichtigt man noch dass jedes dyadische Diskontinuum in sich kompakt ist, so sieht man leicht: Ein Raum X genügt dann und nur dann der Bedingung P, wenn jede *nicht abzählbare Teilmenge von X eine in X kompakte insichdichte Menge enthält*. Dabei heisst eine Menge $M \subset X$ in X kompakt, wenn jede unendliche Teilmenge von M in X einen Häufungspunkt hat, wenn also anders ausgedrückt, M in einer in sich kompakten Teilmenge von X enthalten ist.

[5a]) Ein damit (mit Rücksicht auf die vorangehende Fussnote) äquivalentes Resultat wurde auf ganz anderem Weg in meiner zitierten Arbeit (S. 106) abgeleitet.

Es wäre interessant zu untersuchen, ob (X als separabel vorausgesetzt) die Bedingung P auch *notwendig* dafür ist, dass jede nicht abzählbare Menge, die stetiges Bild ist von X, ein dyadisches Diskontinuum enthält?

Wir wollen noch das folgende Korollar aus dem oben formulierten Theorem erwähnen:

Ist jede in X perfekte Menge nicht abzählbar (oder allgemeiner hat jede in X perfekte Menge eine Mächtigkeit $\geqq \mathfrak{A}$, wo $\mathfrak{A}$ eine feste Kardinalzahl bedeutet), so ist bei jeder stetigen Abbildung von X, die auf einem Teil von X nirgends stationär ist, der zugehörige Bildraum nicht abzählbar (*bzw. von einer Mächtigkeit* $\geqq \mathfrak{A}$).

Daraus folgt, dass, wenn X separabel ist und jede in X perfekte Menge die Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$ hat, *unter den stetigen Bildern von X nur abzählbare Mengen und Mengen von Mächtigkeit* $2^{\aleph_0}$ vorkommen, denn im Falle eines nicht abzählbaren Bildraumes ist, wie wir oben sahen, die Abbildung sicher nirgends stationär auf einer Teilmenge von X.

Beschränken wir uns auf den Bereich der separablen *nulldimensionalen* Räume, oder, was genau dasselbe bedeutet, auf den Bereich der linearen Punktmengen ohne innere Punkte, so können wir die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen feststellen:

α) Jede in X perfekte Menge ist nicht abzählbar (bzw. von einer Mächtigkeit $\geqq \mathfrak{A}$) [6a]).

β) Jede auf X definierte stetige Funktion, die auf einer gewissen Teilmenge von X nirgends stationär ist, hat einen nicht abzählbaren Wertevorrat (bzw. einen Wertevorrat von einer Mächtigkeit $\geqq \mathfrak{A}$).

Dass aus *α*) *β*) folgt, haben wir eben gesehen. Die Umkehrung ergibt sich sofort aus dem folgenden Resultat von Sierpiński [6]): ist X eine lineare Menge ohne innere Punkte und ist die Menge $A \subset X$ in X abgeschlossen, so lässt sich auf X eine stetige Funktion definieren, deren Wertebereich A ist, wobei für jeden Punkt x von A $f(x) = x$. Eine derartige Funktion ist offenbar, falls A in X perfekt (also insichdicht) ist, auf A nirgends stationär [3]).

Beweis des Theorems. Der Beweis gründet sich auf Betrachtung des sogen. „Häufungssysteme", die sich bereits bei einer

[6]) Fund. Math. 11, S. 118.

[6a]) Vgl. darüber meine sub [5]) zitierte Arbeit.

früheren Gelegenheit als ein nützliches Untersuchungsmittel erwiesen haben [7]). Unter einem *Häufungssystem* verstehen wir ein System von in einem metrischen Raum gelegenen Punkten

$$a_0,\ a_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \quad (k = 1, 2, \ldots;\ n_1,\ n_2, \ldots,\ n_k = 1, 2, \ldots),$$

wo

$$(^0) \qquad a_0 = \lim_{m\to\infty} a_m;\quad a_{n_1,\ldots,n_k} = \lim_{m\to\infty} a_{n_1,\ldots,n_k,m}$$

$$(^{00}) \qquad a_m \neq a_{m'};\quad a_{n_1,\ldots,n_k,m} \neq a_{n_1,\ldots,n_k,m'} \quad (m \neq m').$$

Liegt ein System ganzer nicht-negativer Zahlen

$$m_0,\ m_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \quad (k = 1, 2, \ldots;\ n_1, \ldots,\ n_k = 1, 2, \ldots)$$

vor, so bilden die Punkte

$$(\mathrm{X}) \qquad b_0 = a_0;\quad b_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = a_{n_1+m_0, n_2+m_{n_1}, \ldots, n_k+m_{n_1 \ldots n_{k-1}}}$$

ein neues Häufungssystem, welches als ein *Restsystem* des ursprünglichen Systems $\sigma = \{a_{n_1\ldots n_k}\}$ bezeichnet wird. Es ist klar, dass ein Restsystem eines Restsystems von σ wieder ein Restsystem von σ ist. Wir setzen nun den zugrundegelegten Raum als *vollständig* voraus und zeigen:

Zu jedem gegebenen Häufungssystem $\{a_{n_1\ldots n_k}\}$ *gibt es ein Restsystem* $\{b_{n_1\ldots n_k}\}$ *mit den folgenden Eigenschaften*:

1) Für jede unendliche Folge natürlicher Zahlen $(n_1, n_2, \ldots n_k, \ldots)$ ist die Punktfolge

$$(^*) \qquad b_{n_1},\ b_{n_1, n_2}, \ldots,\ b_{n_1\ldots n_k}, \ldots$$

konvergent.

2) Je zwei mit verschiedenen Indizeskomplexen versehene Punkte des Häufungssystems $b_{n_1\ldots n_k}$ sind voneinander verschieden; ebenso sind die Grenzpunkte der Folgen (*) paarweise verschieden, und keiner dieser Grenzpunkte fällt mit einem Punkt des Häufungssystems selbst zusammen.

3) Jede Punktfolge von der Gestalt

$$(+) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_{n_1, n_2, \ldots, n_k,\, i^{(1)}_{k+1},\, i^{(1)}_{k+2}, \ldots\, i^{(1)}_{\nu_1}},\quad b_{n_1, n_2, \ldots, n_k,\, i^{(2)}_{k+1},\, i^{(2)}_{k+2} \ldots\, i^{(2)}_{\nu_1}}, \ldots, \\ \qquad\qquad b_{n_1, n_2, \ldots\, n_k,\, i^{(m)}_{k+1},\, i^{(m)}_{k+2} \ldots\, i^{(m)}_{\nu_m}}, \ldots \end{array} \right.$$

[7]) Vgl. meine oben zitierte Arbeit.

wo

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)}_{k+1} = \infty,$$

konvergiert gegen den Punkt $b_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ (insbesondre konvergiert jede Folge $(b_{i_1^{(m)}, \ldots,\, i^{(m)}_{\nu_m}})$ mit $\lim i_1^m = \infty$ gegen den Punkt b_0).

4) Jede Folge von der Gestalt

$$(++) \quad b_{n_1,\, i_2^{(1)}, \ldots,\, i^{(1)}_{\nu_1}},\quad b_{n_1 n_2,\, i_3^{(2)}, \ldots,\, i^{(2)}_{\nu_2}}, \ldots \quad b_{n_1, n_2 \ldots, n_k,\, i^{(k)}_{k+1}, \ldots,\, i^{(k)}_{\nu_k}}, \ldots$$

konvergiert gegen den Grenzpunkt der Folge (*).

Zum Beweis [8]) bestimmen wir zunächst eine Zahl m_0, so dass für $m > m_0$ $a_m \neq a_0$ (eine solche Zahl gibt es sicher, denn wegen $a_m \neq a_{m'}$ $(m \neq m')$ kann es unter den Punkten a_m höchstens einen geben, der mit a_0 übereinstimmt) und setzen $b_0 = a_0$, $b_n = a_{n+m_0}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Zu jedem Punkte b_n wählen wir jetzt eine Umgebung U_n mit einem Durchmesser $< 1/n$, so dass die abgeschlossenen Hüllen $\overline{U}_n$ dieser Umgebungen paarweise fremd sind und den Punkt b_0 nicht enthalten. Wir setzen dann

$$b_{n_1, n_2} = a_{n_1+m_0, n_2+m_{n_1}},$$

wo die Zahlen m_{n_1} so gross gewählt sind, dass $b_{n_1, n_2} \neq b_{n_1}$ und b_{n_1, n_2} in U_{n_1} liegt. Allgemein seien beim k-ten Schritt die Punkte $b_{n_1\ldots n_k}$ $(n_1, \ldots, n_k = 1, 2, \ldots)$ definiert und jedem dieser Punkte sei ferner eine *Umgebung* $U_{n_1\ldots n_k}$ zugeordnet, so dass

$$(\mathrm{a}) \qquad \overline{U}_{n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k} \subset U_{n_1, \ldots, n_{k-1}} - b_{n_1, \ldots, n_{k-1}}$$

$$(\mathrm{b}) \qquad \delta(U_{n_1, \ldots, n_k}) < \frac{1}{k \cdot n_k}\ ^{8a)}$$

$$(\mathrm{c}) \qquad \overline{U}_{n_1, \ldots, n_k, m} \cdot \overline{U}_{n_1, \ldots, n_k, m'} = 0 \quad (m \neq m').$$

Bei dem nächsten $(k+1)$-ten Schritt haben wir dann nur dafür zu sorgen, dass die neu hinzukommenden Punkte $b_{n_1, \ldots, n_k, n_{k+1}}$ in $U_{n_1, \ldots, n_k} - b_{n_1, \ldots, n_k}$ liegen, was sicher erreicht wird, wenn man in (X) die Zahlen $m_{n_1, \ldots, n_k}$ genügend gross wählt. Es ist deutlich dass man nunmehr zu den Punkten $b_{n_1, \ldots, n_{k+1}}$ Umgebungen $U_{n_1, \ldots, n_{k+1}}$ konstruieren

[8]) Im wesentlichen ist dieser Beweis in meiner Arbeit a. a. O., S. 84—86 enthalten.

[8a]) $\delta(M)$ bedeutet den Durchmesser der Menge M.

kann, die die Bedingungen (a), (b), (c) erfüllen; das Verfahren ist also ad infinitum fortsetzbar. Aus (a) und (b) ergibt sich, dass in der Folge (*) alle Punkte, vom k-ten angefangen, weniger als um $1/k$ voneinander entfernt sind, die Folge (*) konvergiert demnach, und die Bedingung 1) ist tatsächlich erfüllt. 2) ist eine leichte Folgerung aus (a) und (c). In der Folge (+) ist nach (a) und (b) der m-te Punkt weniger als um $1/i_{k+1}^{(m)}$ vom Punkt $b_{n_1 \ldots n_k, i_{k+1}^{(m)}}$ entfernt, (+) konvergiert folglich gegen $\lim\limits_{m\to\infty} b_{n_1,\ldots,n_k,m} = b_{n_1,\ldots,n_k}$. Ebenso einfach bekommen wir 4) aus (a) und (b).

Es ist leicht zu sehen, dass gleichzeitig mit dem Häufungssystem $\{b_{n_1,\ldots,n_k}\}$ auch *jedes seiner Restsysteme die Bedingungen* 1)—4) *erfüllt.*

Das gewonnene Resultat können wir noch etwas anders formulieren, indem wir das *Cantorsche dyadische Diskontinuum* C im Intervall $(0 \leqq x \leqq 1)$ heranziehen. Vom Punkt $x=0$ abgesehen, können wir jeden Punkt „erster Art" von C eindeutig in der Form

$$\text{(i)} \qquad x = \frac{2}{3^{n_1}} + \frac{2}{3^{n_1+n_2}} + \ldots + \frac{2}{3^{n_1+n_2+\ldots+n_k}}$$

darstellen (wo alle $n_i > 0$), während jeder Punkt „zweiter Art" eindeutig eine Darstellung durch unendliche tryadische Entwickelung

$$\text{(ii)} \qquad x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n_1+n_2+\ldots+n_k}}$$

zulässt. Ordnen wir nun dem Punkt $x=0$ den Punkt b_0, jedem Punkte (i) den Punkt $b_{n_1,\ldots,n_k}$ und jedem Punkt (ii) den Grenzpunkt der Folge (*) zu, so erhalten wir eine eindeutige Abbildung des Cantorschen Diskontinuums C auf die Menge M, welche aus allen Punkten $b_{n_1,\ldots,n_k}$, sowie allen Grenzpunkten der Folgen (*) besteht. Die Bedingungen 2)—4) besagen nun, wie man leicht bestätigt, dass *die so hergestellte Abbildung umkehrbar eindeutig* (Bedingung 2)) *und stetig* (Bedingungen 3)—4)), also *topologisch* [9]) ist. M ist folglich ein *dyadisches Diskontinuum.*

Aus dem Bewiesenen folgt, wie wir nebenbei bemerken, dass ein vollständiger Raum zu jeder in ihm gelegenen insichdichten

[9]) Eine umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung von C ist eo ipso umkehrbar stetig, da C in sich kompakt ist.

Menge M ein dyadisches Diskontinuum enthält, in dem eine Teilmenge von M dicht liegt, denn man kann offenbar ein Häufungssystem aus Punkten von M bilden, also auch ein Häufungssystem, mit Eigenschaften 1)—4), dessen Punkte, wie wir eben sahen, in einem dyadischen Diskontinuum dicht liegen. Daraus folgt, u. a., dass jeder vollständige Raum der oben betrachteten Bedingung P genügt. (Vgl. oben Fussnote [5])).

Es ist nunmehr ganz leicht das am Anfang der Arbeit formulierte Theorem zu beweisen. Sei X ein beliebiger metrischer Raum, f eine stetige Abbildung von X auf einen Raum Y, und f sei auf einer Teilmenge $M \subset X$ nirgends stationär. X und Y können als Teilmengen vollständiger Räume X^*, bzw. Y^* betrachtet werden. Wir nehmen nun einen beliebigen Punkt x_0 von M. Da f in x_0 nicht stationär ist in Bezug auf M, gibt es eine gegen x_0 konvergierende Folge von Punkten x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ aus M, deren Bilder sämtlich von $f(x_0)$ verschieden sind; wegen der Stetigkeit der Abbildung f hat man $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, und indem man nötigenfalls die Folge $\{x_n\}$ durch eine Teilfolge ersetzt, kann man noch annehmen, die Punkte $f(x_n)$ seien *paarweise verschieden.* Analog bilden wir jetzt zu jedem der Punkte x_n einen gegen denselben konvergierende Folge von Punkten $x_{n,m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ aus M, so dass die gegen $f(x_n)$ konvergierende Folge $f(x_{n,m})$ aus lauter verschiedenen Punkten besteht. Auf diese Weise schrittweise fortfahrend, erhalten wir in M ein Häufungssystem $\{x_{n_1 \ldots n_k}\}$, so dass die Bildpunkte

$$y_{n_1,\ldots,n_k} = f(x_{n_1,\ldots,n_k})$$

ebenfalls ein Häufungssystem bilden. Wir können nun ohne weiteres annehmen, dass die beiden Häufungssysteme $\{x_{n_1 \ldots n_k}\}$ und $\{y_{n_1 \ldots n_k}\}$ den Bedingungen 1)—4) genügen, denn nach dem Vorangehenden kann dies jedenfalls durch (zweimaligen) Übergang zu Restsystemen erreicht werden.

Sei D die Menge, bestehend aus den Punkten $x_{n_1,\ldots,n_k}$ (den Punkt x_0 inbegriffen) und den Grenzpunkten der Folgen $(x_{n_1}, x_{n_1,n_2}, x_{n_1,n_2,n_3}, \ldots)$ (D ist eine Teilmenge von X^*, aber im allgemeinen keine Teilmenge von X) und sei E die analog in Y^* gebildete Menge. Dann sind, wie wir oben festgestellt haben, die Mengen D und E homöomorph auf das Cantorsche Diskontinuum C bezogen, wobei den Punkten $x_{n_1,\ldots,n_k}$ und $y_{n_1,\ldots,n_k}$ derselbe Punkt von C zugeordnet ist.

Es liegt also zugleich eine homöomorphe Abbildung h von D auf E vor, bei der $h(x_{n_1,\dots,n_k}) = y_{n_1,\dots,n_k} = f(x_{n_1,\dots,n_k})$, dann hat man aber notwendig in allen Punkte von $D \cdot X$ die Übereinstimmung $h(x) = f(x)$ [10]. Die Abbildung f ist also auf $D \cdot X$ eine Homöomorphie. Nun ist D als dyadisches Diskontinuum in sich kompakt und folglich abgeschlossen in X^*; daher ist $D \cdot X$ abgeschlossen in X; ferner ist $D \cdot X$ insichdicht, da die insichdichte Menge der Punkte $x_{n_1,\dots,n_k}$ in $D \cdot X$ dicht ist. Also ist $D \cdot X$ in X perfekt. Damit ist das Theorem bewiesen.

[10]) Eine stetige Abbildung einer Menge M wird nämlich durch ihre Werte auf einer in M dichten Menge eindeutig bestimmt.

La nozione di »dominio deduttivo« e la sua importanza in taluni argomenti relativi ai fondamenti dell'analisi.

Di

Beppo Levi (Bologna).

Grato all'ospitalità della Direzione dei *Fundamenta Mathematicae*, vorrei presentare ai lettori dell'apprezzato periodico un ordine di considerazioni esposto già da me parecchi anni addietro in due successive pubblicazioni [1]) le quali non poterono forse essere sufficientemente rilevate anzitutto per la loro brevità in qualche riguardo forse eccessiva ed inoltre, almeno per una di esse, per la poca diffusione del volume che la contiene. L'occasione a ritornare su di esse mi si presenta ora perchè il Dr. Tullio Viola ha ripreso da alcuni anni questo ordine di vedute, illustrandolo con varie applicazioni alla discussione dei fondamenti della teoria delle funzioni e degli aggregati [2]); e precisamente un suo lavoro su tale argomento è pubblicato al seguito del presente articolo.

1-Si tratta, nelle considerazioni che intendo esporre, di osservazioni di portata molto generale nel campo della metamatematica; tuttavia, a cagion di chiarezza, mi pare conveniente di cominciare con riflessioni che riguardano strettamente l'aritmetica.

Ricordo come l'ultimo ventennio del 1800 abbia considerato come uno dei più notevoli contributi all'analisi della nozione di „numero reale" la riduzione di essa alle „classi di numeri razionali": avvenga

[1]) B. Levi, *Riflessioni sopra alcuni principii della teoria degli aggregati e delle funzioni* in Scritti matematici offerti a Enrico D'Ovidio-Torino, Bocca, 1918. *Sui procedimenti infiniti.* Math. Ann. Bd. 90. 1923.

[2]) T. Viola, *Riflessioni intorno ad alcune applicazioni del postulato della scelta.* (Boll. dell'Unione Mat. Ital., X, 1931) *Sul principio di approssimazione di B. Levi nella teoria della misura* ecc. (ibid. XI, 1932).