Sei $\mathfrak{G}^*$ die Menge aller Mengen $M_n + U_n$. Wir setzen $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}^* + \mathfrak{G}$. Es genügt zu beweisen dass $\mathfrak{A}$ abgeschlossen ist. Dies wird bewiesen, wenn man zeigt, dass die Häufungselemente von $\mathfrak{G}^*$ in $\mathfrak{G}$ liegen. Ist $Z$ ein solches Häufungselement, so ist für eine gewisse Folge $\{n_k\}$:

$$\lim_{k\to\infty} \varrho_1 (M_{n_k} + U_{n_k}, Z) = 0 \tag{22}$$

also wegen (21) auch

$$\lim_{k\to\infty} \varrho_1 (U_{n_k}, Z) = 0 \tag{23}$$

d. h. $Z$ ist Häufungselement von $\mathfrak{G}$, und da $\mathfrak{G}$ abgeschlossen: $Z \in \mathfrak{G}$ w. z. b. w.

24/III 1934.
Konstancin. Dom Kasy im Mianowskiego.

---

# Sur les superpositions des fonctions représentables analytiquement [1]).

Par

**Adolphe Lindenbaum** (Varsovie).

**1.** $X$, $Y$, $Z$ étant des ensembles quelconques, soit $f_1$ une fonction définie pour tous les éléments de l'ensemble $X$ (ensemble des arguments [2]), *domaine* [3])) et telle que ses valeurs (dont l'ensemble constitue le *contredomaine* [3])) appartiennent à $Y$; soit ensuite $f_2$ une fonction dont le domaine est $Y$ et telle que ses valeurs appartiennent à $Z$. Alors, la fonction $f(x) = f_2[f_1(x)]$ sera définie pour tout $x$ de $X$: elle sera appelée *superposition* (composition) des fonctions $f_1$ et $f_2$ [4]) et désignée par: $f = f_2 \bigcirc f_1$.

Pour deux classes (familles) de fonctions, $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, soit $\mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_1$ la classe de toutes les fonctions $f = f_2 \bigcirc f_1$ telles que $f_2 \in \mathcal{F}_2$, $f_1 \in \mathcal{F}_1$. Les opérations $\bigcirc$ et $\times$ sont associatives:

$$f_3 \bigcirc (f_2 \bigcirc f_1) = (f_3 \bigcirc f_2) \bigcirc f_1; \qquad \mathcal{F}_3 \times (\mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_1) = (\mathcal{F}_3 \times \mathcal{F}_2) \times \mathcal{F}_1$$

(en supposant l'existence de toutes ces superpositions); donc, on peut parfois se passer de l'emploi des parenthèses

[1]) Une partie des resultats de ce travail a été l'objet de ma communication à la séance de la Soc. Polonaise de Math. (Section de Varsovie), le 10 mars 1933, et d'une note préliminaire dans les C. R. de Paris, le 15 mai 1933 (v. notre liste bibliographique, p. 35—37: Lindenbaum [2]), où cependant se sont glissées quelques erreurs: 1° dans la définition des classes $\mathcal{U}_\alpha$ et $\mathcal{L}_\alpha$, p. 1455; 2° dans la définition de la fonction $\lambda$, p. 1457; 3° dans l'indication sur le cas $b$ du théorème II'', p. 1457.

[2]) Kuratowski [1], p. 11.

[3]) Banach [1], p. 15—16.

[4]) Baire [2], II, p. 128 — emploie cette dénomination pour une notion tout à fait différente.

**2.** Le cas le plus important est celui, où le contre domaine est contenu dans le domaine. $n$ étant un entier positif, $f^n$ sera la fonction $f_1$ itérée $n$ fois, c.-à.-d. $f^n = f \bigcirc f \bigcirc f \ldots \bigcirc f$ ($n$ fois). Si $f$ est une fonction biunivoque, „$f^{-1}$" désigne la fonction inverse, c.-à-d.: $y = f^{-1}(x)$, lorsque $x = f(y)$.

Si, de plus, le domaine est un espace pour lequel la notion de limite est définie, on peut considérer aussi des superpositions infinies. Donc, p. ex. si la suite des fonctions $\{g_n\}$: $g_1 = f_1, \ldots,$ $g_{n+1} = f_{n+1} \bigcirc g_n$, — est convergente vers la fonction $f$, on définit:

$$f = \ldots \bigcirc f_i \bigcirc \ldots \bigcirc f_2 \bigcirc f_1,$$

et d'une façon analogue, on définit la classe: $\ldots \times \mathcal{F}_i \times \ldots \times \mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_1$ [5]; cela permet de passer ensuite aux superpositions d'ordre $\alpha > \omega$ [6].

**3.** Dans tout ce qui suit, nous nous bornons aux fonctions réelles d'une variable réelle ($-\infty < x < +\infty$), c.-à-d. aux fonctions (bornées ou non) dont le champ est l'ensemble de tous les nombres réels finis (dont le domaine est cet ensemble et dont le contredomaine y est contenu) Mais pour certaines démonstrations nous nous servons aussi d'autres genres de fonctions, ce qui est chaque fois expressément signalé. Nous laissons de côté la question quels sont les champs abstraits, sur lesquels nos résultats pourraient encore être étendus [7].

**4.** Désignons par $\mathcal{C}$ la classe des fonctions (partout) continues et posons $\mathcal{B}_0 = \mathcal{C}$. Nous obtiendrons la classification de Baire des fonctions représentables analytiquement, en posant: $\mathcal{B}_\alpha$ (pour $0 < \alpha < \Omega$) = la classe de toutes les fonctions $f = \lim\limits_{n=\infty} f_n$, $f_n$ étant une fonction de $\mathcal{B}_{\zeta_n}$ ($\zeta_n < \alpha$) [8]; il est plus convenable de ne pas traiter les classes de Baire comme disjointes, mais comme croissantes.

Une autre classification à été donnée par M. W. H. Young [9]: Soit $\mathcal{U}_0 = \mathcal{L}_0 = \mathcal{C}$. Alors $\mathcal{U}_\alpha$ ($0 < \alpha < \Omega$) est la classe de toutes les fonctions $f = \lim\limits_{n=\infty} f_n$, où les $f_n$, appartenant à $\mathcal{L}_{\zeta_n}$ ($\zeta_n < \alpha$), forment

[5]) Cf. Sierpiński [9].
[6]) V. Bary [2]; cf. aussi Sierpiński [2], Lavrentieff [1].
[7]) Cf. Banach [2]; Kuratowski [1]: § 27, IX.
[8]) Cf. Baire [1], p. 69–70.
[9]) Young [2]; cf. aussi Young [1]; Hahn [1]: Chap. V, §§ 3, 5, 6.



une suite non-croissante; $\mathcal{L}_\alpha$ — la classe de toutes les fonctions $f = \lim\limits_{n=\infty} f_n$, où les $f_n$, appartenant à $\mathcal{U}_{\zeta_n}$ ($\zeta_n < \alpha$), forment une suite non-décroissante. Les fonctions semicontinues supérieurement constituent la classe $\mathcal{U}_1$, celles semi-continues inférieurement — la classe $\mathcal{L}_1$.

Enfin, la troisième classification est due à M. Sierpiński [10]): $\mathcal{S}_0 = \mathcal{C}$; $\mathcal{S}_\alpha$ ($0 < \alpha < \Omega$) est la classe de toutes les fonctions qui sont sommes de séries absolument convergentes $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ de fonctions $f_n$ de classe $\mathcal{S}_{\zeta_n}$ ($\zeta_n < \alpha$).

**5.** Nous supposons au lecteur de nos considérations la connaissance de la théorie des fonctions de Baire, Young et Sierpiński [11]). Ici, nous rappelons seulement les faits suivants:

**5·1.** $$\mathcal{U}_\alpha \subset \mathcal{S}_\alpha \subset \mathcal{B}_\alpha \subset \mathcal{U}_{\alpha+1}$$

**5·2.** $$\mathcal{L}_\alpha \subset \mathcal{S}_\alpha \subset \mathcal{B}_\alpha \subset \mathcal{L}_{\alpha+1}$$

**5·3.** $$\mathcal{B}_\alpha = \mathcal{U}_{\alpha+1} \cdot \mathcal{L}_{\alpha+1}$$

($X \cdot Y$ est la partie commune des ensembles $X$ et $Y$).

**5·4.** Pour qu'une fonction appartienne à $\mathcal{S}_\alpha$, il faut et il suffit qu'elle soit une différence de deux fonctions de classe $\mathcal{U}_\alpha$ (resp. $\mathcal{L}_\alpha$).

**5·5.** $$\mathcal{S}_1 \neq \mathcal{B}_1 \text{ [12])}.$$

**5·6.** Une fonction-limite d'une suite uniformément convergente de fonctions de classe $\mathcal{U}_\alpha$, resp. $\mathcal{L}_\alpha$. resp. $\mathcal{B}_\alpha$ — est une fonctions $\mathcal{U}_\alpha$, resp. $\mathcal{L}_\alpha$, $\mathcal{B}_\alpha$.

**5·7.** Chaque fonction de classe $\mathcal{B}_\alpha$, les valeurs de laquelle forment un ensemble isolé, appartient à $\mathcal{S}_\alpha$.

**5·8.** Chaque fonction de classe $\mathcal{B}_\alpha$ est égale partout à $\varepsilon$ près à une fonction de $\mathcal{S}_\alpha$, ne prenant que des valeurs multiples de $\varepsilon$ (*Treppenfunktion*).

[10]) Sierpiński [3], p. 27; cf. Kempisty [1], p. 64.
[11]) V. Hausdorff [2]: §§ 41. 43; Hahn [2]: Chap. IV; de la Vallée Poussin [1]: Chap. VIII; Hahn [1]: Chap. V; Sierpiński [1]: Chap. III; Kuratowski [1]: § 27; Kempisty [3] etc.
[12]) Sierpiński [3], Mazurkiewicz [1].

**6.** Désignons par $\mathcal{N}eg$ la classe dont l'unique élément est la fonction $f(x) = -x$.

On a les suivants théorèmes élémentaires [13]):

$$\left.\begin{array}{ll}
6{\cdot}01. & \mathcal{N}eg \times \mathcal{U}_\alpha = \mathcal{L}_\alpha; \quad \mathcal{N}eg \times \mathcal{L}_\alpha = \mathcal{U}_\alpha \\
6{\cdot}02. & \mathcal{N}eg \times \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\alpha; \quad \mathcal{N}eg \times \mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}_\alpha \\
6{\cdot}03. & \mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{C} = \mathcal{U}_\alpha; \quad \mathcal{L}_\alpha \times \mathcal{C} = \mathcal{L}_\alpha \\
6{\cdot}031. & \mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{N}eg = \mathcal{U}_\alpha; \quad \mathcal{L}_\alpha \times \mathcal{N}eg = \mathcal{L}_\alpha \\
6{\cdot}04. & \mathcal{S}_\alpha \times \mathcal{C} = \mathcal{S}_\alpha; \quad \mathcal{B}_\alpha \times \mathcal{C} = \mathcal{B}_\alpha \\
6{\cdot}05. & \mathcal{C} \times \mathcal{U}_\alpha = \mathcal{C} \times \mathcal{L}_\alpha \subset \mathcal{C} \times \mathcal{S}_\alpha \subset \mathcal{C} \times \mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}_\alpha
\end{array}\right\} \; 0 \leqslant \alpha < \Omega$$

$$\left.\begin{array}{ll}
6{\cdot}06. & \mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{U}_\beta = \mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{L}_\beta \subset \mathcal{U}_{\beta+\alpha} \\
6{\cdot}07. & \mathcal{L}_\alpha \times \mathcal{L}_\beta = \mathcal{L}_\alpha \times \mathcal{U}_\beta \subset \mathcal{L}_{\beta+\alpha} \\
6{\cdot}08. & \mathcal{B}_\alpha \times \mathcal{B}_\beta \subset \mathcal{B}_{\beta+\alpha}
\end{array}\right\} \; \begin{array}{l} 0 < \alpha < \Omega \\ 0 \leqslant \beta < \Omega \end{array}$$

6·09. $\dots \times \mathcal{B}_{\alpha_i} \times \dots \mathcal{B}_{\alpha_2} \times \mathcal{B}_{\alpha_1} \subset \mathcal{B}_{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_i+\dots} \quad (0 < \alpha_i < \Omega)$

6·10. Si $f_1 \in \begin{smallmatrix}\mathcal{U}_\alpha \\ \mathcal{L}_\alpha\end{smallmatrix}$ $(0<\alpha<\Omega)$ et $f_2$ est une fonction non-décroissante semicontinue $\begin{smallmatrix}\text{supérieurement } (f_2 \in \mathcal{U}_1), \\ \text{inférieurement } (f_2 \in \mathcal{L}_1),\end{smallmatrix}$ alors la fonction $f_2 \bigcirc f_1$ appartient à $\begin{smallmatrix}\mathcal{U}_\alpha \\ \mathcal{L}_\alpha\end{smallmatrix}$ [14]).

**7.** M. Lusin a démontré en 1921 [15]) que toute fonction de classe 2 de Baire est une superposition de deux fonctions de classe 1, donc que $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$; la démonstration m'est inconnue et ne fut pas publiée. A ce propos, M. Lusin (1924) a posé le problème suivant [16]): *Une fonction de classe 3 de Baire est-elle toujours une superposition de trois fonctions de classe 1?*

M. Sierpiński (1932) a trouvé une méthode qui lui a permis de s'approcher à la solution du problème de M. Lusin: à savoir, M. Sierpiński a obtenu le théorème suivant [17]):

[13]) V. Lebesgue [1]: p. 153; Hahn [2]: § 35·4; Kuratowski [1]: § 27, III.

[14]) Cf. Bureau [1], p. 14—15. La restriction qui s'y trouve pour $f_2$, d'être fonction-limite d'une suite non-croissante de fonctions continues *non-décroissantes*, est superflue.

[15]) Cf. Bary [2], p. 370.

[16]) Lusin [1], p. 337.

[17]) Sierpiński [8].



*Il existe un ensemble $E$ et une fonction $\varphi$ dont le domaine est $E$, de classe 1 de Baire sur $E$ et telle que pour toute fonction $f$ de classe $\mathcal{B}_{\alpha+1}$ $(0<\alpha<\Omega)$ il existe une fonction $g$ de classe $\mathcal{B}_\alpha$, dont le contredomaine est contenu dans $E$ et telle que $f = \varphi \bigcirc g$.* Donc, pour tout $f$ de classe $\mathcal{B}_3$, on a la représentation: $f = \varphi \bigcirc (\varphi \bigcirc g)$ [18]), où les contredomaines de $g$ et de $\varphi \bigcirc g$ sont contenus dans $E$. Mais quand une fonction $\varphi$ est de classe 1 sur un ensemble $E$, il n'est nullement nécassaire qu'elle puisse être prolongée (*erweitert*) partout, en restant de classe 1 $(\mathcal{B}_1)$.

En outre, M. Sierpiński à démontré [19]) que

$$\dots \times \mathcal{C} \times \dots \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \neq \mathcal{B}_1.$$

Dans cet ordre d'idées, nous avons posé avec M. Szpilrajn [20]) la question si

$$\dots \times \mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_\omega.$$

**8.** Dans ce qui suit, nous démontrons des théorèmes qui donnent la *solution* de ces problèmes, et même *des problèmes beaucoup plus généraux.*

En particulier, soit $0<\alpha<\Omega$, $0 \leqslant \beta < \Omega$: alors

$$V_\alpha \times W_\beta = V_{\beta+\alpha},$$

si l'on pose à la place de „$V$" et „$W$" deux quelconques des symboles $\mathcal{U}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{B}$. De plus, dans certains cas on peut obtenir une sorte d'uniformisation [21]), p. ex.

(§ 19): il existe une fonction $\nu$ de classe 1 de Baire, telle que chaque fonction $f$ de classe $\beta+1$ de Baire $(0<\beta<\Omega)$ peut être représentée sous la forme: $f = \nu \bigcirc g$, où la fonction $g$ est convenablement choisie dans la classe $\beta$ de Baire.

Les théorèmes qui suivent mettent en lumière quelques *liens* jusqu'ici inconnus *entre les trois classifications*:

(§ 12): Il existe une fonction $\pi$, continue sur l'ensemble des nombres irrationnels et telle que chaque fonction $f$ de classe $\beta$ de

[18]) Ici, il serait incorrect d'écrire: $f = (\varphi \bigcirc \varphi) \bigcirc g$, car le contredomaine de $\varphi$ n'est pas contenu dans le domaine $E$.

[19]) Sierpiński [9].

[20]) L. c. [19]).

[21]) Ce qui avait lieu aussi chez M. Sierpiński [8].

Baire $(0 < \beta < \Omega)$ peut être représentée sous la forme: $f = \pi \bigcirc g$, $g \in \mathfrak{L}_\beta$ (resp. $\mathfrak{U}_\beta$); $g$ ne prend que des valeurs irrationnelles.

(§ 16): Il existe une fonction partout continue $\xi$, telle que chaque fonction $f$ de classe $\mathfrak{S}_\beta$ $(0 < \beta < \Omega)$ peut être representée sous la forme: $f = \xi \bigcirc g$, $g \in \mathfrak{L}_\beta$ (resp. $\mathfrak{U}_\beta$).

Quant aux superpositions infinies, nous obtenons p. ex. le théorème (§ 23):

$$\ldots \times \mathfrak{B}_{\alpha_n} \times \ldots \mathfrak{B}_{\alpha_2} \times \mathfrak{B}_{\alpha_1} = \mathfrak{B}_{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots} \qquad (0 < \alpha_n < \Omega).$$

Il importe de remarquer que toutes les fonctions construites dans le texte sont définies effectivement (ou, du moins, on voit immédiatement qu'elles peuvent l'être); on n'emploie pas l'axiome du choix.

L'idée mentionnée (§ 7), due à M. Sierpiński, de remplacer la limite d'une suite par une fonction du nombre rattaché à cette suite — a joué dans nos recherches un rôle considérable [22]).

En tenant compte de la dualité (v. §§ 5—6) entre les notions des classes $\mathfrak{U}_\alpha$ et $\mathfrak{L}_\alpha$ de M. Young, nous énonçons souvent nos théorèmes seulement pour l'une de ces classes symétriques.

9. ***Théorème.*** *Il existe une fonction $\lambda$ semi-continue inférieurement, telle que, pour tout nombre ordinal $\beta$ $(0 < \beta < \Omega)$, chaque fonction $f$ de classe $\mathfrak{L}_{\beta+1}$ peut être representée sous la forme:*

$$f = \lambda \bigcirc g,$$

*la fonction $g$ (ne prenant que des valeurs irrationnelles) étant convenablement choisie dans $\mathfrak{L}_\beta$.*

Démonstration. Nous dirons que $x \in D'$, si

$$(\times) \quad x = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n-\frac{k_n}{2^n}}, \ \{k_n\} \text{ étant une suite infinie de nombres entiers}$$

pour laquelle la suite $\left\{\frac{k_n}{2^n}\right\}$ est non-décroissante et convergente.

[22]) Citons les travaux sur les superpositions des autres classes de fonctions: tout d'abord les belles recherches de M-lle Bary: [1] — sur les superpositions des fonctions absolument continues (qui ont été aussi étudiées par M. Todd), [2] — sur celles des fonctions à variation bornée; ensuite, quant aux fonctions continues ou „presque" continues, v. Sierpiński [9], [11]; fonctions mesurables $(L)$: Ruziewicz et Sierpiński [1], Eilenberg [1]; fonctions jouissant de la propriété de Baire: Sierpiński [13]. Enfin (en rapport avec le 13-me problème de Hilbert) sur les fonctions arbitraires: Bieberbach [1], Lindenbaum [1]: § 8, Sierpiński [12].



Alors, la suite $\left\{n + \frac{k_n}{2^n}\right\}$ sera croissante vers $+\infty$; on voit aisément que pour un $x$ déterminé — il n'existe jamait deux suites différentes $\{k_n\}$ remplissant la condition $(\times)$. Donc, si $x \in D'$, nous pouvons désigner par $k_n(x)$ le nombre $k_n$ rattaché au nombre $x$ par la formule $(\times)$ [23]).

Pour $x \in D'$, posons $\lambda_0(x) = \lim\limits_{n=\infty} \frac{k_n(x)}{2^n}$.

Dans l'ensemble $D'$, le nombre $k_n(x)$ est une fonction continue du nombre $x$; $\left\{\frac{k_n(x)}{2^n}\right\}$ forme donc une suite non-décroissante et convergente de fonctions continues sur $D'$. Par conséquent, $\lambda_0$ est une fonction semicontinue inférieurement sur $D'$, et — de plus — on a: $\lambda_0(x) \geqslant k_0(x)$.

— $k_0(x)$ est — pour $x \in D'$ — le plus grand nombre entier non supérieur à $\log_3 x$, d'où [24]):

$$k_0(x) = -E \log_3 x.$$

La fonction $-E \log_3 x$ est semicontinue inférieurement; elle est définie partout pour $x > 0$, et sur $D'$ elle est $\leqslant \lambda_0(x)$.

Ceci entraîne l'existence d'une fonction $\lambda'$ semicontinue inférieurement, déterminée et finie pour tout $x > 0$, et identique à $\lambda_0$ pour $x \in D'$ [25]).

Ensuite, on pose $\lambda''(x) = \lambda'(e^x)$. Ainsi, $\lambda''$ est une fonction semicontinue inférieurement définie pour tout $x$ réel.

Soit maintenant $f$ une fonction de classe $\mathfrak{L}_{\beta+1}$ $(\beta > 0)$. Il existe évidemment une suite $\{k_n(x)\}$ de fonctions de classe $\mathfrak{U}_\beta$, ne prenant que des valeurs entières, telle que

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \frac{k_n(x)}{2^n}$$

et que les fonctions $\frac{k_n(x)}{2^n}$ ne décroissent pas avec $n$ [26]).

[23]) On démontre que l'ensemble $D'$ est un $F_{\sigma\delta}$. Cf. Hausdorff [1]: p. 397; Sierpiński [5]: p. 41; Kuratowski [1]: p. 11, 170; Sierpiński [8], p. 174.

[24]) $Ez$ désigne le plus grand entier $z_1$ pour lequel $z_1 \leqslant z$.

[25]) Cf. Alexits [1], p. 53. Ayant prolongé la fonction $\lambda_0$ de façon que la fonction prolongée $\lambda_1$, pouvant provisoirement prendre la valeur $-\infty$, soit définie et semicontinue inférieurement pour tout $x > 0$, on pose:

$$\lambda'(x) = \max\ [\lambda_1(x), -E \log_3 x].$$

[26]) Si $f(x) = \lim\limits_{n=\infty} h_n(x)$ $(h_n(x) \leqslant h_{n+1}(x);\ h_n \in \mathfrak{U}_\beta)$, on pose: $k_n(x) = E 2^n h_n(x)$ [cf. § 6·10].

Si l'on définit:

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n-\frac{k_n(x)}{2^n}}$$

on a pour tout $x$: $g'(x) \in D'$. Puisque $g'$ est somme d'une série uniformément convergente de fonctions de classe $\mathfrak{L}_\beta$, on a (§ 5·6):

$$g' \in \mathfrak{L}_\beta$$

et

$$f(x) = \lambda'[g'(x)],$$

d'où:

$$f(x) = \lambda'[e^{\log g'(x)}] = \lambda''[\log g'(x)]$$

Introduisons encore la fonction $g''(x) = \log g'(x)$. Alors:

$$f(x) = \lambda''[g''(x)].$$

$g''$ appartient aussi à $\mathfrak{L}_\beta$, et l'ensemble $D''$ des valeurs prises par $g''$ est contenu dans l'ensemble des logarythmes des nombres de $D'$. On remarque que $D'$, donc aussi $D''$, est un ensemble 0-dimensionnel; il existe donc une fonction croissante et continue $\chi$ ayant l'ensemble des nombres réels comme domaine et comme contredomaine, et telle que tous les nombres de $D''$ soient transformés en nombres irrationnels. Si l'on pose enfin: $\lambda = \lambda'' \bigcirc \chi^{-1}$ et $g = \chi \bigcirc g''$ (cf. § 6·10 et 6·03), on aura: $f = \lambda \bigcirc g$, et notre théorème sera démontré.

10. ***Théorème.*** *$f$ étant une fonction de classe $\mathfrak{L}_{\beta+\alpha}$ $(0 < \alpha < \Omega$, $0 < \beta < \Omega)$, il existe des fonctions $h$ et $g$ telles que:*

$$f = h \bigcirc g,$$

$$g \in \mathfrak{L}_\beta, \quad h \in \mathfrak{L}_\alpha$$

*[$g$ ne prend que des valeurs irrationnelles]* [27]).

D é m o n s t r a t i o n. Pour $\alpha = 1$ — le théorème résulte du th. 9; on l'obtient pareillement pour tout $\alpha < \omega$: la fonction $h$ sera tout simplement une itération de $\lambda$.

Mais pour $\alpha \geqslant \omega$, il faut compléter la démonstration. Tout se réduit au cas de nombres $\alpha$ de deuxième espèce. Supposons donc

[27]) On pourrait assujettir les fonctions $h$ à la condition de parcourir seulement une petite famille de fonctions; mais, pour $\alpha \geqslant \omega$, un théorème complètement analogue au th. 9 (où $h$ est uniformisé totalement) n'est pas vrai.



que notre théorème est démontré pour tous les indices $\alpha$ inférieurs à un $\alpha$ de deuxième espèce, et envisageons une fonction $f$ de classe $\mathfrak{L}_{\beta+\alpha}$. On a alors:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} p_n(x),$$

où $\quad p_n(x) \leqslant p_{n+1}(x); \; p_n \in \mathfrak{L}_{\beta+\alpha_n}; \; \alpha_n \leqslant \alpha_{n+1} < \alpha; \; \alpha = \lim_{n<\omega} \alpha_n.$

Il existe donc des fonctions $h_n$ et $g_n$ telles que:

$$p_n = h_n \bigcirc g_n,$$

$$g_n \in \mathfrak{L}_\beta, \quad h_n \in \mathfrak{L}_{\alpha_n},$$

$$g_n(x) \in N;$$

$N$ va désigner toujours l'ensemble des nombres irrationnels.

L'ensemble des suites $\{u_n\}$ $\{u_n \in N\}$ pris comme l'espace $N^{\aleph_0}$ [28]) est homéomorphe à l'ensemble $N$ [29]).

Appelons $\theta$ l'homéomorphie qui transforme $N^{\aleph_0}$ en $N$; alors, il existe une suite des fonctions *continues* $\{\pi_n\}$ définies sur $N$ et telles que:

$$\pi_j[\theta(\{u_n\})] = u_j \quad (j = 1, 2, 3 \ldots)$$

La fonction $k_n = h_n \bigcirc \pi_n$, définie sur $N$, est sur cet ensemble de classe $\mathfrak{L}_{\alpha_n}$. Envisageons l'ensemble $Z$ de tous les $z$ de $N$ pour lesquels la suite $\{k_n(z)\}$ est non-décroissante et possède une limite finie; sur cet ensemble $Z$, nous posons:

$$k(z) = \lim_{n=\infty} k_n(z).$$

$k(z)$ est *sur* $Z$ de classe $\mathfrak{L}_\alpha$; en outre, $k(z) \geqslant h_1[\pi_1(z)]$.

$\pi_1$, définie sur $N$, se laisse définir *partout* comme fonction finie $\pi_1^*$ de classe $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{L}_2$ [30]). En posant: $m = h_1 \bigcirc \pi_1^*$, on obtient

$$k(z) \geqslant m(z) \quad \text{pour} \quad z \in Z,$$

et, de plus, la fonction $m$ finie partout est de classe $\mathfrak{L}_{2+\alpha_1}$

Par conséquent, $k$ se laisse prolonger en une fonction $k^*$ finie partout, de classe $\mathfrak{L}_\alpha$ [31]).

[28]) K u r a t o w s k i [1], p. 79—80.

[29]) K u r a t o w s k i [1], p. 148.

[30]) V. § 5·2, S i e r p i ń s k i [6].

[31]) Raisonnement analogue à celui du th. 9 [25]).

La suite $\{g_n\}$ étant composée des fonctions de classe $\mathfrak{L}_\beta\,(\subset \mathfrak{B}_\beta)$ pour lesquelles $g_n(x)\in N$, la fonction:

$$g'(x)=\theta(\{g_n(x)\})$$

est de classe $\mathfrak{B}_\beta$ [32]) (d'ailleurs, on ne peut pas affirmer qu'elle est $\mathfrak{L}_\beta$); on a toujours: $g'(x)\in N$. Il en résulte que:

$$p_j(x)=h_j[g_j(x)]=h_j[\pi_j[\theta(\{g_n(x)\})]]=h_j[\pi_j[g'(x)]]=k_j[g'(x)],$$

d'où:

$$f(x)=\lim_{j=\infty}p_j(x)=\lim_{j=\infty}k_j[g'(x)]=k[g'(x)]=k^*[g'(x)].$$

Nous avons représenté la fonction $f$ comme superposition des fonctions: $k^*$ de classe $\mathfrak{L}_\alpha$ et $g'$ de classe $\mathfrak{B}_\beta$. Or, on a $\mathfrak{B}_\beta\subset\mathfrak{L}_{\beta+1}$ (§ 5·2), donc, d'après le th. 9:

$$g'=\lambda\bigcirc g,$$

où $\lambda\in\mathfrak{L}_1,\quad g\in\mathfrak{L}_\beta,\quad g(x)\in N.$

Il s'en suit que $f(x)=k^*[\lambda[g(x)]]$. En désignant $k^*\bigcirc\lambda$ par $h$, nous aurons: $h\in\mathfrak{L}_{1+\alpha}$ (§ 6·07); mais $1+\alpha=\alpha$ et le th. 10 est complètement démontré.

**11.** ***Corollaire.*** a) $\mathfrak{L}_\alpha\times\mathfrak{L}_\beta=\mathfrak{L}_{\beta+\alpha}$
b) $\mathfrak{U}_\alpha\times\mathfrak{U}_\beta=\mathfrak{U}_{\beta+\alpha}$
c) $\mathfrak{L}_\alpha\times\mathfrak{U}_\beta=\mathfrak{L}_{\beta+\alpha}$
d) $\mathfrak{U}_\alpha\times\mathfrak{L}_\beta=\mathfrak{U}_{\beta+\alpha}$
$\begin{pmatrix}0<\alpha<\Omega\\0\leqslant\beta<\Omega\end{pmatrix}$

C'est une conséquence des théorèmes du § 6 et 10. P. ex.:

a) résulte de 6·07 et 10.

c): $\mathfrak{L}_\alpha\times\mathfrak{U}_\beta=\mathfrak{L}_\alpha\times(\mathfrak{Neg}\times\mathfrak{L}_\beta)=(\mathfrak{L}_\alpha\times\mathfrak{Neg})\times\mathfrak{L}_\beta=\mathfrak{L}_\alpha\times\mathfrak{L}_\beta=\mathfrak{L}_{\beta+\alpha}$ [6·0], 6·031, 11a].

**12.** ***Théorème.*** *Il existe une fonction $\pi$, continue sur l'ensemble des nombres irrationnels et telle que, pour tout nombre ordinal $\beta$ $(0<\beta<\Omega)$, chaque fonction $f$ de classe $\mathfrak{B}_\beta$ peut être représentée sous la forme:*

$$f=\pi\bigcirc g,$$

[32]) V. Kuratowski [1], p. 182, 183, 187.



*où la fonction $g$, ne prenant que des valeurs irrationnelles, est convenablement choisie dans $\mathfrak{L}_\beta$.*

Démonstration: Soit $E'$ l'ensemble de tous les nombres entiers positifs; l'ensemble de toutes les suites infinies $\{e_0,e_1,\dots,e_n,\dots\}$ $(e_n\in E')$ pris comme l'espace $E'^{\aleph_0}$ est homéomorphe [33]) à un ensemble linéaire. Soit notamment

$$\tau(\{e_0,e_1,\dots\})=\frac{1\,|}{|e_0+2}-\frac{1\,|}{|e_1+2}-\frac{1\,|}{|e_2+2}-\frac{1\,|}{|e_3+2}\cdots$$

Appelons $M$ l'ensemble de toutes les valeurs prises par la fonction $\tau$. $M$, composé de certains nombres irrationnels, est fermé dans $N$. Il existe des fonctions continues $\{\varrho_j\}$ et $\{\sigma_j\}$ définies sur $M$ et telles que:

$$\left.\begin{aligned}\varrho_j[\tau(\{r_0,s_0,r_1,s_1,r_2,s_2,\dots\})]&=r_j\\ \sigma_j[\tau(\{r_0,s_0,r_1,s_1,r_2,s_2,\dots\})]&=s_j\end{aligned}\right\}\ (j=0,1,2,\dots)$$

Soit $\delta$ une fonction continue telle que pour $x=0,\pm1$: $\delta(x)=x$ et que l'on ait partout: $|\delta(x)|\leqslant1$. Définissons une fonction $\pi'$ sur le domaine $M$:

$$\pi'(x)=[\varrho_0(x)-\sigma_0(x)]+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta[\varrho_n(x)-\sigma_n(x)]}{2^n}.$$

Ainsi, la fonction $\pi'$ est somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues sur $M$, donc $\pi'$ est continue sur $M$. Comme $M$ est fermé dans $N$, il existe même [34]) une fonction $\pi$, identique sur $M$ à $\pi'$ et continue sur $N$ [35]) (au delà de $N$, nous la définissons arbitrairement).

D'autre part, soit $f\in\mathfrak{B}_\beta$ $(\beta>0)$. Alors, d'après les théorèmes sur l'approximation des fonctions de Baire, $f$ est somme d'une série uniformément convergente $\sum_{n=0}^{\infty}f_n$, telle que:

$$f_n\in\mathfrak{B}_\beta,$$

$f_0$ ne prend que des valeurs entières,

pour $n>0$, $f_n$ ne prend que les valeurs $0,\ \frac{1}{2^n},\ -\frac{1}{2^n}$.

[33]) Kuratowski [1], p 80

[34]) Kuratowski [1], p. 211–212.

[35]) Relativement à $N$.

Chacune de fonctions $f_n$ $(n \geqslant 0)$, comme une *Treppenfunktion* [36]), est différence de deux fonctions:

$$f_n(x) = r_n^*(x) - s_n^*(x) = \frac{r_n(x) - s_n(x)}{2^n},$$

où $r_n$ et $s_n$ appartiennent à $\mathfrak{U}_\beta$ et ne prennent que des valeurs entières positives [37]).

Soit:

$$(\dagger) \qquad g(x) = \frac{1\,|}{|\,r_0(x)+2} - \frac{1\,|}{|\,s_0(x)+2} - \frac{1\,|}{|\,r_1(x)+2} - \frac{1\,|}{|\,s_1(x)+2} \cdots$$
$$\cdots - \frac{1\,|}{|\,r_n(x)+2} - \frac{1\,|}{|\,s_n(x)+2} \cdots$$

$-g(x)$ est fonction-limite d'une suite décroissante de fonctions de classe $\mathfrak{U}_\beta$, donc elle appartient à $\mathfrak{U}_\beta$. Par conséquent, $g \in \mathfrak{L}_\beta$; en outre, $g$ ne prend que des valeurs de l'ensemble $M$, qui sont toutes irrationnelles.

On a:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n(x) - s_n(x)}{2^n} = [r_0(x) - s_0(x)] +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta[r_n(x) - s_n(x)]}{2^n} = \pi'[\tau(\{r_0(x), s_0(x), r_1(x), s_1(x), \ldots\})] =$$
$$= \pi'[g(x)] = \pi[g(x)], \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Remarque: On voit aisément que si $g \in \mathfrak{L}_\beta$, $g$ ne prend que des valeurs irrationnelles, $f = \pi \bigcirc g$, on a toujours: $f \in \mathfrak{B}_\beta$ $(\beta > 0)$.

**13.** ***Lemme.*** *Si $h$ est une fonction absolument continue, $g \in \mathfrak{S}_\beta$ et $f = h \bigcirc g$, alors $f \in \mathfrak{S}_\beta$ $(\beta < \Omega)$.*

Démonstration. On peut supposer $\beta > 0$. La fonction $g$ se laisse développer en une série absolument convergente de fonctions de classe $< \beta$ de Baire:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x).$$

[36]) Hausdorff [2], 246.

[37]) On peut ajouter cette condition au théorème connu, comme le montre p. ex. une simple analyse de la démonstration de M. Hausdorff: [2], p. 246.



La série

$$h[g_1(x)] + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ h\left[\sum_{n=1}^{k+1} g_n(x)\right] - h\left[\sum_{n=1}^{k} g_n(x)\right] \right]$$

est une série de fonctions de classe $< \beta$ de Baire et elle est aussi absolument convergente [38]), sa somme appartient donc à $\mathfrak{S}_\beta$; mais cette somme est égale à $h[\lim \sum_{n=1}^{k} g_n(x)] = h[g(x)] = f(x)$ — et le lemme est démontré.

**14.** ***Théorème.*** *Si $h$ est une fonction continue, $g \in \mathfrak{S}_\beta$ et $f = h \bigcirc g$, alors $f \in \mathfrak{S}_\beta$ $(\beta < \Omega)$.* Autrement dit $\mathfrak{C} \times \mathfrak{S}_\beta = \mathfrak{S}_\beta$.

Démonstration: D'aprés un théorème de M-lle Bary [39]), toute fonction continue $h$ est la somme de trois fonctions dont chacune est une superposition de deux fonctions absolument continues:

$$h(x) = h_1[h_2(x)] + h_3[h_4(x)] + h_5[h_6(x)]$$

Donc, on a:

$$f(x) = h[g(x)] = h_1[h_2[g(x)]] + h_3[h_4[g(x)]] + h_5[h_6[g(x)]].$$

D'après le lemme 13 (appliqué six fois) les termes du second membre sont fonctions de classe $\mathfrak{S}_\beta$, donc aussi leur somme $f$, c. q. f. d.

**15.** ***Lemme.*** $\mathfrak{C} \times \mathfrak{L}_\beta \subset \mathfrak{S}_\beta$; $\mathfrak{C} \times \mathfrak{U}_\beta \subset \mathfrak{S}_\beta$ $(\beta < \Omega)$ [5·1, 5·2, 14].

La comparaison du th. 12 avec le lemme montre que dans le th. 12 — la continuité sur l'ensemble $N$ ne se laisse pas remplacer par la continuité partout, parce que p. ex. $\mathfrak{S}_1$ n'est qu'un vrai sous-ensemble de $\mathfrak{B}_1$ (§ 5·5), et probablement il en est de même pour $\beta > 1$ [40]).

**16.** ***Théorème.*** *Il existe une fonction $\xi$, partout continue et telle que, pour tout nombre ordinal $\beta$ $(0 < \beta < \Omega)$, chaque fonction $f$ de classe $\mathfrak{S}_\beta$ peut être représentée sous la forme:*

$$f = \xi \bigcirc g,$$

*la fonction $g$ (ne prenant que des valeurs irrationnelles) étant convenablement choisie dans $\mathfrak{U}_\beta$.*

[38]) Cf. Hahn [1], p. 525.

[39]) Bary [1]. II, p. 611.

[40]) V. le problème de M. Kempisty: [1], p. 72—73.

Démonstration. $z$ étant un nombre réel, posons [24]):

$$z = Ez + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^2} + \dots + \frac{c_n}{2^n} + \dots \qquad (c_n = 0 \text{ ou } 1);$$

dans le cas, où deux développements sont possibles [41]), nous ne nous intéressons que de celui pour lequel $c_n = 1$, à partir d'un indice $n_0$.

Il existe [42]) deux ensembles $\widehat{A}$ et $B$ tels que tout nombre entier $k$ se laisse représenter, et d'une seule façon, sous la forme:

$$k = a + b, \quad \text{où} \quad a \in \widehat{A},\ b \in \widehat{B};$$

et que chacun de ces ensembles ordonné suivant la grandeur de ses éléments est de type $\omega^* + \omega$ [43]); on en déduit qu'il existe deux fonctions croissantes $\varkappa_A$ et $\varkappa_B$ qui transforment l'ensemble des nombres entiers en $\widehat{A}$ resp en $\widehat{B}$.

Posons ensuite:

$$(*) \qquad \begin{aligned} \psi_1(z) &= \varkappa_A(Ez) + \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^3} + \dots + \frac{c_n}{3^{2n-1}} + \dots \\ \psi_2(z) &= \varkappa_B(Ez) + \frac{c_1}{3^2} + \frac{c_2}{3^4} + \dots + \frac{c_n}{3^{2n}} + \dots \end{aligned}$$

Les fonctions $\psi_1$ et $\psi_2$ sont croissantes et semicontinues supérieurement.

Lorsque $f \in \mathcal{S}_\beta$, nous avons (§ 5·4):

$$f(x) = u_1(x) - u_2(x), \quad \text{où} \quad u_1,\ u_2 \in \mathcal{U}_\beta.$$

Il s'en suit (§ 6·10) que les fonctions $\psi_1 \bigcirc u_1$ et $\psi_2 \bigcirc u_2$ appartiennent à $\mathcal{U}_\beta$, donc aussi la fonction:

$$g(x) = \psi_1[u_1(x)] + \psi_2[u_2(x)].$$

Si $t = \psi_1(t_1) + \psi_2(t_2) = k +$ un nombre inférieur à $\frac{1}{2}$, nous allons poser: $\xi_1'(t) = t_1$. Il n'y a qu'un seul $t_1$ pour un $t$ donné [44]),

[41]) C. à d. pour $z = \frac{l}{2^n}$, non entier.

[42]) Lindenbaum [1], p. 14—15.

[43]) Hausdorff [2], p. 44.

[44]) Cf. Lindenbaum [1], p. 27.



et de cette manière la fonction $\xi_1'$ est définie et continue sur un certain ensemble; or, on voit aisément qu'elle peut être prolongée en une fonction $\xi_1$ continue partout [45]).

Selon ces conventions, on a: $u_1(x) = \xi_1'[g(x)] = \xi_1[g(x)]$.

D'une façon analogue, nous construisons une fonction continue partout, $\xi_2$, telle que $u_2(x) = \xi_2[g(x)]$. On constate donc que:

$$f(x) = u_1(x) - u_2(x) = \xi_1[g(x)] - \xi_2[g(x)] = \xi[g(x)],$$

où

$$\xi(x) = \xi_1(x) - \xi_2(x).$$

Le théorème est démontré.

**17. *Corollaire.*** $\mathcal{C} \times \mathcal{L}_\beta = \mathcal{C} \times \mathcal{U}_\beta = \mathcal{S}_\beta \quad (\beta < \Omega)$
[15, 16, 6·05].

**18. *Corollaire.*** a) $\mathcal{S}_\alpha \times \mathcal{L}_\beta = \mathcal{S}_\alpha \times \mathcal{U}_\beta = \mathcal{S}_{\beta+\alpha}$

b) $\mathcal{L}_\alpha \times \mathcal{S}_\beta = \mathcal{L}_{\beta+\alpha}$

c) $\mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{S}_\beta = \mathcal{U}_{\beta+\alpha}$ $\quad \left(\begin{matrix} 0 < \alpha < \Omega \\ 0 \leqslant \beta < \Omega \end{matrix}\right)$

d) $\mathcal{S}_\alpha \times \mathcal{S}_\beta = \mathcal{S}_{\beta+\alpha}$.

[a): 17, 11 a, 11 c; b): 17, 6·03, 11 a; c): 17, 6·03, 11 b; d): 17, 18 b];

**19. *Théorème.*** *Il existe une fonction $\nu$, de classe 1 de Baire et telle que, pour tout nombre ordinal $\beta$ $(0 < \beta < \Omega)$, chaque fonction $f$ de classe $\mathcal{B}_{\beta+1}$ peut être représentée sous la forme:*

$$f = \nu \bigcirc g,$$

*la fonction $g$ (ne prenant que des valeurs irrationnelles) étant convenablement choisie dans $\mathcal{L}_\beta$.*

La démonstration ressemble à celle du th. 12 [46]).

Soit $\theta$ (comme dans la dém. du th. 10) l'homéomorphie qui transforme l'espace des suites $N^{\aleph_0}$ en $N$. Il existe des fonctions continues $\{\varrho_j'\}$ et $\{\sigma_j'\}$ définies sur $N$ et telles que:

$$\left.\begin{aligned} \varrho_j'[\theta(\{r_0', s_0', r_1', s_1', \dots\})] &= r_j' \\ \sigma_j'[\theta(\{r_0', s_0', r_1', s_1', \dots\})] &= s_j' \end{aligned}\right\} \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

[45]) C'est pour cela qu'il a fallu mettre dans les dénominateurs de la formule (*) 3, au lieu de 2.

[46]) S'il était possible (comp. th. 9) de trouver une telle fonction $\bar{\lambda}$ de classe 1 de Baire, ne prenant que des valeurs irrationnelles, que chaque fonction $f$ de classe $\mathcal{L}_{\beta+1}$ ne prenant que des valeurs irrationnelles se laisse représenter sous la forme: $f = \bar{\lambda} \bigcirc g$, $g \in \mathcal{L}_\beta$, alors on pourrait démontrer le th. 19 d'une façon beaucoup plus simple, à l'aide du th. 12.

Soit $\delta$ la fonction définie dans la démonstration du th. 12, et $\lambda$ — celle du th. 9; soit enfin — pour $x \in N$:

$$\nu'(x) = [\lambda[\varrho_0'(x)] - \lambda(\sigma_0'(x))] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta[\lambda[\varrho_n'(x)] - \lambda[\sigma_n'(x)]]}{2^n}.$$

Ainsi, la fonction $\nu'$ est somme d'une série uniformément convergente de fonctions de classe 1 de Baire sur $N$, donc $\nu'$ est de classe 1 de Baire sur $N$. Puisque l'ensemble $N$ est un $G_\delta$, la fonction $\nu'$ peut être prolongée, en conservant sa classe, en une fonction $\nu''$ définie pour tout $x$ réel [47].

D'autre part, soit $f \in \mathcal{B}_{\beta+1}$ $(\beta > 0)$. Alors $f$ est somme d'une série uniformément convergente $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$, telle que:

$$f_n \in \mathcal{B}_{\beta+1},$$

$$f_0 \text{ ne prend que des valeurs entières,}$$

$$\text{pour } n > 0,\ f_n \text{ ne prend que les valeurs } 0,\ \frac{1}{2^n},\ -\frac{1}{2^n}.$$

Chacune de fonctions $f_n$ $(n \geqslant 0)$, étant une *Treppenfunktion*, est différence de deux fonctions:

$$f_n(x) = r_n^*(x) - s_n^*(x) = \frac{r_n(x) - s_n(x)}{2^n},$$

ou $r_n$ et $s_n$ appartiennent à $\mathcal{L}_{\beta+1}$ (§ 5·4, 5·7).

D'après le th. 9, on a: $r_n = \lambda \bigcirc r_n'$ et $s_n = \lambda \bigcirc s_n'$, où les fonctions $r_n'$ et $s_n'$ appartiennent à $\mathcal{L}_\beta$ et ne prennent que des valeurs irrationnelles.

La fonction

$$q(x) = \theta(\{r_0'(x), s_0'(x), r_1'(x), s_1'(x), \ldots\})$$

est de classe $\mathcal{B}_\beta$ [32]); de plus, $q(x) \in N$.

Or, on a:

$$r_n(x) = \lambda[r_n'(x)] = \lambda[\varrho_n'[q(x)]]$$
$$s_n(x) = \lambda[s_n'(x)] = \lambda[\sigma_n'[q(x)]].$$

Il en résulte que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n(x) - s_n(x)}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda[\varrho_n'[q(x)]] - \lambda[\sigma_n'[q(x)]]}{2^n} =$$
$$= \nu'[q(x)] = \nu''[q(x)].$$

[47]) Hausdorff [2]: p. 244; Kuratowski [1]: p. 219



En vertu du th. 12, la fonction $q$ peut être représentée sous la forme: $q = \pi \bigcirc g$, où $\pi$ est continue sur $N$, $g \in \mathcal{L}_\beta$, et on a toujours: $g(x) \in N$.

Par suite:

$$f(x) = \nu''[q(x)] = \nu''[\pi[g(x)]].$$

La fonction $\nu''' = \nu'' \bigcirc \pi$ est de classe 1 de Baire sur l'ensemble $N$, donc [47]) il en existe un prolongement $\nu$ de classe 1 (défini partout) et on a: $f = \nu''' \bigcirc g = \nu \bigcirc g$, c. q. f. d.

**20. *Théorème.*** *$f$ étant une fonction de classe $\mathcal{B}_{\beta+\alpha}$ $(0 < \alpha < \Omega$, $0 < \beta < \Omega)$, il existe des fonctions $h$ et $g$ telles que:*

$$f = h \bigcirc g,$$

$$g \in \mathcal{L}_\beta, \quad h \in \mathcal{B}_\alpha,$$

*[$g$ ne prend que des valeurs irrationnelles].*

Démonstration analogue à la précédente: au lieu du th. 9, on a à appliquer le th. 10.

**21. *Corollaire.*** a) $\mathcal{B}_\alpha \times \mathcal{L}_\beta = \mathcal{B}_\alpha \times \mathcal{U}_\beta = \mathcal{B}_{\beta+\alpha}$

b) $\mathcal{B}_\alpha \times \mathcal{B}_\beta = \mathcal{B}_{\beta+\alpha}$

c) $\mathcal{B}_\alpha \times \mathcal{S}_\beta = \mathcal{B}_{\beta+\alpha}$

d) $\mathcal{L}_\alpha \times \mathcal{B}_\beta = \mathcal{L}_{\beta+\alpha}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 < \alpha < \Omega \\ 0 \leqslant \beta < \Omega \end{pmatrix}$

e) $\mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{B}_\beta = \mathcal{U}_{\beta+\alpha}$

f) $\mathcal{S}_\alpha \times \mathcal{B}_\beta = \mathcal{S}_{\beta+\alpha}$.

Les thèses a), b) et c) se déduisent aisément du th. 20 et des théorèmes des §§ 5 et 6. Les démonstrations de d), e) et f) sont semblables l'une à l'autre: prenons à titre d'exemple d).

D'après 18 b et 5·1 on a: (i) $\mathcal{L}_\alpha \times \mathcal{B}_\beta \supset \mathcal{L}_\alpha \times \mathcal{S}_\beta = \mathcal{L}_{\beta+\alpha}$.

D'autre part, soit $f \in \mathcal{L}_\alpha \times \mathcal{B}_\beta$; donc $f = h \bigcirc g$, $h \in \mathcal{L}_\alpha$, $g \in \mathcal{B}_\beta$; on aura $h = \lim\limits_{n=\infty} h_n$, $h_n \leqslant h_{n+1}$, $h_n \in \mathcal{B}_{\zeta_n}$ $(\zeta_n < \alpha)$, d'où: $h_n \bigcirc g \in \mathcal{B}_{\beta+\zeta_n}$, $h_n \bigcirc g \leqslant h_{n+1} \bigcirc g$ et $f = \lim\limits_{n=\infty} h_n \bigcirc g$, donc $f \in \mathcal{L}_{\beta+\alpha}$. Ainsi, (ii) $\mathcal{L}_\alpha \times \mathcal{B}_\beta \subset \mathcal{L}_{\beta+\alpha}$; les inclusions (i) et (ii) entraînent: $\mathcal{L}_\alpha \times \mathcal{B}_\beta = \mathcal{L}_{\beta+\alpha}$, c. q. f. d. (On peut donner une autre démonstration basée sur le th. 12).

**22. Théorème** [48]. *Il existe une suite $\{\Phi_n\}$ de fonctions de classe 1 de Baire, telle que chaque fonction $f$ de classe $\mathcal{B}_{\alpha+\omega}$ $(0<\alpha<\Omega)$ peut être représentée sous la forme:*

$$f = \ldots \bigcirc \Phi_n \bigcirc \ldots \bigcirc \Phi_2 \bigcirc \Phi_1 \bigcirc F_0,$$

*où la fonction $F_0$ est une fonction convenablement choisie de classe $\mathcal{B}_\alpha$.*

Démonstration. $x$ étant un nombre positif arbitraire, on a le développement infini:

$$x = [e_0(x) - 1] - \frac{1 \,|}{|e_1(x)} - \frac{1 \,|}{|e_2(x)} - \ldots = {}_k\|\ldots, e_k(x), \ldots\|,$$

où les $e_k(x)$ sont des entiers $\geqslant 2$. Tous les $e_k$, comme fonctions du nombre $x$, sont de classe 1 de Baire.

Supposons pour le moment que nous avons une fonction $f'$, de classe $\alpha+\omega$ de Baire sur l'ensemble des nombres positifs $P$ et ne prenant que des valeurs positives. Alors:

$$f'(x) = \lim_{n=\infty} p_n(x),$$

où $p_n$ est de classe $\alpha+n$ sur l'ensemble $P$ et ne prend que des valeurs positives $(n=1,2,3,\ldots)$

En s'appuyant sur le théorème 19 convenablement modifié, on aura:

$$p_n = \nu_*^{n-1} \bigcirc g_n \quad (n=1,2,3,\ldots)$$

où $\nu_*$ et $g_n$ ont pour domaine $P$ et leurs contredomaines sont contenus dans $P$; $\nu_*$ est de classe 1 sur $P$, les $g_n$ y sont de classe $\alpha$ (de Baire).

Nous définirons maintenant une suite de fonctions $\{F_n'\}$ (dans le champ $P$):

$$F_1'(x) = [e_0[g_1(x)] - 1] - \frac{1 \,|}{|e_1^{(1)}(x)} - \ldots - \frac{1 \,|}{|e_n^{(1)}(x)} - \ldots,$$

où
$$e^{(1)}_{2^k(2l-1)}(x) = e_k[g_l(x)] \qquad \begin{pmatrix} k = 0, 1, 2, \ldots \\ l = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}.$$

[48]) Solution du problème que nous avons posé avec M. Szpilrajn: V. Sierpiński [9].



Une évaluation grossière montre déjà que $F_1'$ est de classe $\alpha+2$ de Baire [49]).

Soit $d_m(x) = {}_k\|\ldots, e_{m-1+2^k(2m+1)}(x), \ldots\|$. $(m=0,1,2,\ldots)$.

Nous posons:

$$F'_{m+1}(x) = [e_0[\nu_*^m[d_m(x)]] - 1] - \frac{1 \,|}{|e_1[\nu_*^m[d_m(x)]]} \cdots - \frac{1 \,|}{|e_m[\nu_*^m[d_m(x)]]} - \frac{1 \,|}{|e_1^{(m+1)}(x)} - \ldots - \frac{1 \,|}{|e_n^{(m+1)}(x)} - \ldots,$$

où
$$e_n^{(m+1)}(x) = e_{m+n-1}(x).$$

$d_m$ est en tout cas de classe 2 de Baire, $\nu_*^m \bigcirc d_m$ — de classe $m+2$, $e_i \bigcirc \nu_*^m \bigcirc d_m$ — de classe $m+3$, donc $F'_{m+1}$ est de classe $m+4$ [49]).

On voit de plus que le nombre $f'_{m+1}(x) = F'_{m+1}(F'_m(\ldots(F'_1(x))\ldots))$ donne un développement (en fraction continue ${}_k\|\ldots, e_k[f'_{m+1}(x)], \ldots\|$) dont les $m+1$ premiers termes ne diffèrent pas de ceux du développement du nombre $\nu_*^m[g_{m+1}(x)] = p_{m+1}(x)$. On en conclut [50]) que

$$|f'_{m+1}(x) - p_{m+1}(x)| < \frac{1}{m+1},$$

ce qui entraîne l'égalité:

$$\lim_{m=\infty} f'_m(x) = f'(x).$$

Observons que seulement la fonction $F_1'$ dépend de $f'$; toutes les autres fonctions $F_m'$ en sont indépendantes.

Si nous transformons maintenant par une homéomorphie $\theta_*$ l'ensemble $P$ des nombres positifs en l'ensemble de tous les nombres réels, nous pouvons affirmer en tenant compte du résultat déjà obtenu et en posant

$$f' = \theta_*^{-1} \bigcirc f \bigcirc \theta_* \quad \text{et} \quad F_m = \theta_* \bigcirc F_m' \bigcirc \theta_*^{-1}$$

pour un $f$ de classe $\mathcal{B}_{\alpha+\omega}$: qu'il existe une suite de fonctions $\{F_m\}$ $(F_m \in \mathcal{B}_{m+3}$ pour $m>1$; $F_1 \in \mathcal{B}_{\alpha+2})$, parmi lesquelles seulement $F_1$ dépend de $f$, telles que

$$f = \ldots \bigcirc F_{m+1} \bigcirc \ldots \bigcirc F_2 \bigcirc F_1.$$

[49]) On pourrait améliorer cette évaluation.

[50]) V. p. ex. Pringsheim [1], p. 805, 813, 819.

En vertu du th. 19, chaque fonction $F_m (m>1)$ peut être représentée comme une superposition de $m+3$ fonctions de classe 1; pour arriver, en suivant cette voie, à l'énoncé du th. 22, il est nécessaire de préciser le th. 12, de façon à y soustraire la fonction $g$ à la condition:

$$|g(x)-x|<\varepsilon,$$

$\varepsilon$ étant un nombre positif arbitrairement fixé d'avance: or, on voit aisément que ceci est possible [51]), ce qui mène à la même conséquence pour le th. 19 (et 20). Nous appliquons le th. 12, ainsi précisé pour $\varepsilon=\dfrac{1}{m(m+2)}$, à la fonction $F_m$, ce qui permet de la mettre sous la forme d'une superposition de $m+3$ [52]) fonctions de classe 1:

$$F_m = F_m^{(m+3)} \bigcirc F_m^{(m+2)} \bigcirc \ldots \bigcirc F_m^{(1)};$$

seulement, $F_1^{(1)}$ sera de classe $\alpha$ et dépendra de $f$; toutes les autres fonctions seront de nouveau indépendantes et on aura:

$$(0) \qquad |F_m^{(i)}(F_m^{(i-1)}(\ldots F_m^{(1)}(x)\ldots))-x|<\frac{1}{m} \qquad (i=1,2,\ldots,m+2).$$

On a:

$$f(x)=\lim_{m=\infty} F_m^{(m+3)}(\ldots F_m^{1}(F_{m-1}^{(m+2)}(\ldots F_{m-1}^{(1)}(\ldots F_1^{(1)}(x)\ldots)\ldots))\ldots),$$

[51]) Il suffit de modifier la définition de la fonction $g$ dans la démonstration du th. 12: il existe sans doute une suite finie de fonctions semicontinues supérieurement $q_i$ $(i=0,1,\ldots,Q)$ ne prenant que des valeurs entières, et — pour $i>0$ — supérieures à 1, telles que

$$\left|-x-\left(q_0(x)-\frac{1\ |}{|q_1(x)}-\frac{1\ |}{|q_2(x)}\cdots-\frac{1\ |}{|q_Q(x)}\right)\right|<\varepsilon_1;$$

au lieu de la formule (†) du § 12, nous poserons:

$$-g(x)=q_0(x)-\frac{1\ |}{|q_1(x)}-\ldots-\frac{1\ |}{|q_Q(x)}-\frac{1\ |}{|r_0(x)+2}-\frac{1\ |}{|s_0(x)+2}-\ldots$$
$$\ldots-\frac{1\ |}{|r_n(x)+2}-\frac{1\ |}{|s_n(x)+2}-\ldots$$

A ceci vont correspondre de légères modifications des définitions de $M$ et de $\pi'$ (donc aussi de $\pi$).

[52]) Pour $m=1$, il suffirait d'ailleurs de prendre 3 fonctions.



donc on aura aussi, en vertu de (0):

$$f(x)=\lim_{n=\infty}\Phi_n(\Phi_{n-1}(\ldots\Phi_0(x)\ldots)),$$

où $\Phi_0=F_1^{(1)},\ \Phi_1=F_1^{(2)},\ldots\Phi_4=F_2^{(1)},\ \Phi_5=F_2^{(2)},\ldots;\ \Phi_{n-1}=F_{m+1}^{(i)}$, lorsque $n=\dfrac{m(m+7)}{2}+i$. Puisque $\Phi_0$ dépend de $f$, nous l'avons nommé $F_0$ dans l'énoncé du théorème.

**23. *Théorème.*** $\ldots\times\mathfrak{B}_{\alpha_n}\times\ldots\times\mathfrak{B}_{\alpha_2}\times\mathfrak{B}_{\alpha_1}=\mathfrak{B}_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\ldots}$ $(0<\alpha_n<\Omega)$.

Démonstration analogue à la précédente.

**24. *Théorème.*** *Il existe une suite $\{\Gamma_n\}$ de fonctions de classe $\mathfrak{L}_1$, telle que chaque fonction $f$ de classe $\mathfrak{L}_{\alpha+\omega}$ $(0<\alpha<\Omega)$ peut être représentée sous la forme*

$$f=\ldots\bigcirc\Gamma_n\bigcirc\ldots\bigcirc\Gamma_1\bigcirc F_0,$$

*où la fonction $F_0$ est convenablement choisie dans la classe $\mathfrak{L}_\alpha$, et la suite $\{\Gamma_n\bigcirc\ldots\bigcirc\Gamma_1\bigcirc F_0\}$ est non décroissante.*

Démonstration analogue à celle du th. 22, mais on doit changer un peu les définitions des fonctions $F'_m$, en intercalant (avant $e_1^{(m)}$): $e_0^{(m)}=2$, en augmentant de 1 le dénominateur $e_m[\nu_*^m[d_m(x)]]$, en posant: $d_m(x)=_k\|\ldots,e_{m+2^k(2m+1)}(x),\ldots\|$ et $e_n^{(m+1)}=e_{m+n}$, et enfin — en s'assurant que l'on ait aussi: $g(x)\geqslant x$ dans le th. 9 modifié.

**25.** Pour $\mathfrak{L}_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots}$ on peut formuler un théorème analogue au th. 23 (en ajoutant que la suite correspondante de fonctions soit non-décroissante).

## Bibliographie.

### A. Livres.


Banach, S. [1] *Théorie des opérations linéaires* (1932).

Hahn, H. [1] *Theorie der reellen Funktionen.* I (1921).

— [2] *Reelle Funktionen.* I (1932).

Hausdorff, F. [1] *Grundzüge der Mengenlehre* (1914).

— [2] *Mengenlehre* (1927).

Kuratowski, C. [1] *Topologie.* I (1933).

Pringsheim, A. [1] *Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre.* I 3 (1921).

Sierpiński, W. [1] *Funkcje przedstawialne analitycznie* (1925).

De la Vallée Poussin, C. [1] *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire* (1916).

### B. Mémoires et notes.

v. Alexits, G. [1] *Über die Erweiterung einer Baireschen Funktion*. Fund. Math. 15 (1930).

Baire, R. [1] *Sur les fonctions de variables réelles*. Ann. di Mat. (3) 3 (1899).

— [2] *Sur la représentation des fonctions discontinues*. I — Acta Math. 30 (1906); II — Acta Math. 32 (1909).

Banach, S. [2] *Über analytisch darstellbare Operationen in abstrakten Räumen*. Fund. Math. 17 (1931).

Bary, N. [1] *Mémoire sur la représentation finie des fonctions continues*. I/II. Math. Ann. 103 (1930).

— [2] *Sur une classification des fonctions continues à partir des fonctions à variation bornée*. Mat Sbornik 40 (1933).

Bieberbach, L. [1] *Bemerkungen zum dreizehnten Hilbertschen Problem*. Journ. f. Math 165 (1931).

Bureau, F. [1] *Sur l'approximation des fonctions de classe $\alpha$*. Mém. Soc. Roy. Sc. Liége (3) 17 (1932).

Eilenberg, S. [1] *Remarques sur les ensembles et les fonctions relativement mesurables*. C. R. Soc. Sc. Varsovie 25 (1932).

Kempisty, S. [1] *Sur les séries itérées des fonctions continues*. Fund. Math. 2 (1921).

— [2] *Sur l'approximation des fonctions de première classe*. Fund. Math. 2 (1921).

— [3] *Sur les trois classifications des fonctions représentables analytiquement*. Ann. Soc. Pol. Math. 1 (1922).

Lavrentieff, M. [1] *Sur la représentation des fonctions mesurables B par les séries transfinies de polynomes*. Fund. Math. 5 (1924).

Lebesgue, H. [1] *Sur les fonctions représentables analytiquement*. Journ. de Math. (6) 1 (1905).

Lindenbaum, A. [1] *Sur les ensembles dans lesquels toutes les équations*... etc. Fund. Math. 20 (1933).

— [2] *Sur les superpositions des fonctions représentables analytiquement*. C. R. Paris 196 (1933).

Lusin, N. [1] Problème 26. Fund. Math. 5 (1924).

Mazurkiewicz, S. [1] *Sur les fonctions de classe 1*. Fund. Math. 2 (1921).

Ruziewicz, S. et Sierpiński, W. [1] *Un théorème sur les familles de fonctions*. Mathematica 7 (1933).

Sierpiński, W. [2] *Sur les suites transfinies convergentes de fonctions de Baire*. Fund. Math. 1 (1920).

— [3] *Sur les fonctions développables en séries absolument convergentes de fonctions continues*. Fund. Math. 2 (1921).

— [4] *Démonstration d'un théorème sur les fonctions de première classe*. Fund. Math. 2 (1921).

— [5] *Sur l'ensemble des points de convergence d'une suite des fonctions continues*. Fund. Math. 2 (1921).

— [6] *Sur l'extension des fonctions de Baire definies sur les ensembles linéaires quelconques*. Fund Math. 16 (1930).

— [7] *Sur les anneaux de fonctions*. Fund. Math. 18 (1932).

— [8] *Sur la superposition des fonctions de Baire*. Fund Math. 20 (1933).



Sierpiński, W. [9] *Remarque sur les superpositions de fonctions continues*. C. R. Soc. Sc. Varsovie 26 (1933).

— [10] *Sur un problème de M. Ruziewicz concernant les superpositions des fonctions mesurables*. C. R. Soc. Sc. Varsovie 26 (1933)

— [11] *Sur une propriété des fonctions qui n'ont que des discontinuités de première espèce*. Bull. Ac. Roumaine 16 (1933).

— [12] *Remarques sur les fonctions de plusieurs variables réelles*, Prace Mat.-Fiz. 41 (1933).

— [13] *Sur la superposition de fonctions qui jouissent de la propriété de Baire*. Fund. Math. 22 (1934).

Viola, T. [1] *Sulle funzioni di prima e di seconda classe di Baire*. Rend. Acc. dei Lincei (6) 18 (1933)

Young, W. H. [1] *On a new method in the theory of integration*. Proc. Lond. Math. Soc. (2) 9 (1910).

— [2] *On functions and their associated sets of points*. Proc. Lond. Math. Soc. (2) 12 (1912).