Posons

$$f_k(x) = 2^{2k-2}(x - c_{n_1 \ldots n_k}^{j_1 \ldots j_k}) \quad \text{pour} \quad c_{n_1 \ldots n_k}^{j_1 \ldots j_k} \leqq x < \varphi(c_{n_1 \ldots n_k}^{j_1 \ldots j_k}) \tag{7}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad \text{pour} \quad 0 \leqq x < 1. \tag{8}$$

Pour $0 \leqq x < 1$ $f_k(x)$ est continue à droite et il en est de même pour $f(x)$, la série (8) étant uniformément convergente d'après l'inégalité:

$$0 \leqq f^k(x) \leqq \frac{1}{2^{n_1+n_2+\ldots+n_k+(k-1)(k-2)}} \leqq \frac{1}{2^{k(k-1)+1}}. \tag{9}$$

Posons: $\psi_k(x) = \sum_{l=k+1}^{\infty} f_l(x)$. Considérons un point x' tel que $0 \leqq x' < 1$. Il existe deux suites: $\{p_k\}$, $\{q_k\}$ telles que:

$$c_{p_1 \ldots p_k}^{q_1 \ldots q_k} \leqq x' < \varphi(c_{p_1 \ldots p_k}^{q_1 \ldots q_k}) \quad k = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Soit: $x'_k = c_{p_1 \ldots p_{k+1}+2}^{q_1 \ldots q_k, 1}$; on aura les inégalités:

$$x'_k - x' \geqq c_{p_1 \ldots p_{k+1}+2}^{q_1 \ldots q_k, 1} - c_{p_1 \ldots p_{k+1}+1}^{q_1 \ldots q_k, 1} = \frac{1}{2^{p_1+\ldots+p_{k+1}+k(k-1)+1}} \tag{11}$$

$$x'_k - x' \leqq c_{p_1 \ldots p_{k+1}+2}^{q_1 \ldots q_k, 1} - c_{p_1 \ldots p_{k+1}}^{q_1 \ldots q_k, 1} = \frac{3}{2^{p_1+\ldots+p_{k+1}+k(k-1)+1}} \tag{12}$$

Donc $\lim_{k \to \infty} x'_k = x'$. D'après (6), (7) pour $i \leqq k$, $f_i(x)$ est linéaire et croissante dans l'intervalle $x' \leqq x \leqq x'_k$. Donc, en tenant compte de (9), (11) on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{f(x'_k) - f(x')}{x'_k - x'} &\geqq \frac{f_k(x'_k) - f_k(x')}{x'_k - x'} - \left| \frac{\psi_k(x'_k) - \psi_k(x')}{x'_k - x'} \right| \geqq \\ &\geqq 2^{2k-2} - \frac{2}{\dfrac{1}{2^{p_1+\ldots+p_{k+1}+k(k-1)+1}}} \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{p_1+\ldots+p_l+(l-1)(l-2)}} \geqq \\ &\geqq 2^{2k-2} - 4 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^l} = 2^{2k-2} - 8. \end{aligned} \tag{13}$$

Donc:

$$\bar{f}^{+}(x) \geqq \lim_{k \to \infty} \frac{f(x_k) - f(x')}{x'_k - x'} = +\infty \quad \text{c. q. f. d.} \tag{14}$$

Varsovie, 21/II 1934

Ein Zerlegungssatz.

Von

Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

Sei R ein metrischer, kompakter Raum, 2^R der Raum der abgeschlossenen Teilmengen von R. Wir bezeichnen mit ϱ, δ — Entfernung und Durchmesser in R, mit ϱ_1, δ_1, — in 2^R.

Satz. *Es existiert eine abgeschlossene, nulldimensionale Menge* $\mathfrak{A} \subset 2^R$ *derart dass:* 1) *jedes* $U \epsilon \mathfrak{A}$ *ist abzählbar*; 2) $\sum_{U \epsilon \mathfrak{A}} U = R$.

Sind $V, W \epsilon 2^R$, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{Z}(V, W)$ die Menge aller Mengen $Z + W$, wo $Z \epsilon 2^V$. Offenbar ist $\mathfrak{Z}(V, W)$ eine abgeschlossene Teilmenge von 2^R, und es besteht die Ungleichung:

$$\delta_1(\mathfrak{Z}(V, W)) \leqq \delta(V). \tag{1}$$

Hilfssatz. Sei $A \subset R$ perfekt; $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$; $A_i \epsilon 2^A$; $\delta(A_i) < \delta(A)$; $D \subset A$ eine endliche Menge. Es existieren n endliche Mengen $B_i \subset A$, $i = 1, 2 \ldots n$, derart dass für $i \neq j$:

$$\mathfrak{Z}(A_i, B_i + D) \cdot \mathfrak{Z}(A_j, B_j + D) = 0 \tag{2}$$

Wir bestimmen $2n$ verschiedene Punkte $b_i, c_i \epsilon A - D$, $i = 1, 2 \ldots n$ derart dass $\varrho(b_i, c_i) > \mathrm{Max} \cdot \delta(A_k)$, was offenbar möglich ist. Das Punktepaar (b_i, c_i) bezeichnen wir mit B_i. Sei $j \neq i$. Wegen $B_i(B_j + D) = 0$ und $\delta(B_i) = \varrho(b_i, c_i) > \delta(A_j)$ ist B_i in $A_j + B_j + D$ nicht enthalten. Also ist B_i in keiner Menge aus $\mathfrak{Z}(A_j, B_j + D)$ enthalten. Da andrerseits jede Menge aus $\mathfrak{Z}(A_i, B_i + D)$. Die Menge B_i enthält, so hat man (2) und der Hilfssatz ist bewiesen.

Sei P der in sich dichte Kern von R (wäre R nulldimensional und à fortiori zerstreut, so wäre der Satz trivial).

Wir bestimmen ein Mengensystem $\{P(s_1,\dots,s_k)\}$; $k=1,2\dots$; $s_k=1,2\dots n_k$ mit folgenden Eigenschaften:

(3) $$P(s_1\dots s_k) \text{ ist perfekt;}$$

(4) $$P=\sum_{s_1=1}^{n_1} P(s_1);\ P(s_1\dots s_k)=\sum_{s_{k+1}=1}^{n_{k+1}} P(s_1\dots s_k,\ s_{k+1});$$

(5) $$\delta(P(s_1))\leqq\frac{1}{2}\delta(P);\ \delta(P(s_1\dots s_k,\ s_{k+1}))\leqq\frac{1}{2}\delta(P(s_1\dots s_k)).$$

Nach dem Hilfssatz können wir ein System *endlicher* Mengen $\{D(s_1\dots s_k)\}$, $k=1,2\dots$; $s_k=1,2\dots n_k$ bestimmen mit folgenden Eigenschaften: *erstens* ist:

(6) $$D(s_1)\subset P;\ D(s_1\dots s_k,\ s_{k+1})\subset P(s_1\dots s_k).$$

Zweitens, setzt man

(7) $$\mathfrak{h}(s_1\dots s_k)=\mathfrak{h}[P(s_1\dots s_k),\ D(s_1)+D(s_1,\ s_2)+\dots+D(s_1\dots s_k)]$$

so ist für $s'_k\neq s''_k$:

(8) $$\mathfrak{h}(s_1\dots s_{k-1},\ s'_k)\cdot\mathfrak{h}(s_1\dots s_{k-1},\ s''_k)=0$$

Wegen (4), (6) hat man

(9) $$\mathfrak{h}(s_1)\subset 2^P;\ \mathfrak{h}(s_1\dots s_k,\ s_{k+1})\subset\mathfrak{h}(s_1\dots s_k)$$

wegen (1), (5):

(10) $$\delta_1(\mathfrak{h}(s_1\dots s_k))\leqq\frac{1}{2^k}\delta(P).$$

Wegen (8), (9), (10) ist $\{\mathfrak{h}(s_1\dots s_k)\}$, $k=1,2\dots$, $s_k=1,2\dots n_k$ ein determinierendes System einer *abgeschlossenen, nulldimensionalen* Menge $\mathfrak{G}\subset 2^P$.

Sei $U\in\mathfrak{G}$; dann existiert eine Folge $\{s'_k\}$, $1\leqq s'_k\leqq n_k$ derart dass:

(11) $$U\in\mathfrak{h}(s'_1,\ s'_2\dots s'_k)\quad k=1,2\dots$$

Für jedes k ist also:

(12) $$U\subset P(s'_1\dots s'_k)+D(s'_1)+D(s'_1,\ s'_2)+\dots D(s'_1\dots s'_k).$$

Da aber $D(s'_1)+D(s'_1,\ s'_2)+\dots D(s'_1\dots s'_k)$ eine endliche Menge ist, so folgt unter Berücksichtigung von (5):

(13) $$U'\subset P(s'_1\dots s'_k).$$

(14) $$\delta(U')\leqq\frac{1}{2^k}\delta(P)$$

also $\delta(U')=0$, d. h. U' reduziert sich auf einen Punkt und U *ist abzählbar*.

Sei $x\in P$ Dann existiert wegen (4) eine Folge $\{s''_k\}$, $1\leqq s''_k\leqq n_k$ für die:

(15) $$x\in\prod_{k=1}^{\infty}P(s''_1\dots s''_k).$$

Setzt man $V=(x)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}D(s''_1\dots s''_k)$, so ist $x\in V$, V-abgeschlossen wegen (5), (6) und schliesslich wegen (6), (7):

(16) $$V\in\prod_{k=1}^{\infty}\mathfrak{h}(s''_1\dots s''_k)\subset\mathfrak{G}$$

Also:

(17) $$P=\sum_{U\in\mathfrak{h}}U$$

Ist R perfekt, so ist, $R=P$, $\mathfrak{A}=\mathfrak{G}$ und der Satz bewiesen; wenn $R-P\neq 0$ und abgeschlossen, so setzen wir $\mathfrak{A}=\mathfrak{G}+(R-P)$. Sei $R-P$ nicht abgeschlossen; dann kann man diese Menge in der Form darstellen

(18) $$R-P=\sum_{n=1}^{\infty}M_n$$

wo M_n — abgeschlossen und:

(19) $$\lim_{n\to\infty}\delta(M_n)=\lim_{n\to\infty}\varrho(M_n,\ P)=0.$$

Jeden M_n ordnen wir zu ein $x_n\in P$ derart dass $\varrho(x_n,\ M_n)=\varrho(M_n,\ P)$. Nach (17) kann man jedem x_n ein $U_n\in\mathfrak{G}$ zuordnen derart dass $x_n\in U_n$. Es ist:

(20) $$\varrho_1(M_n+U_n,\ U_n)\leqq\delta(M_n)+\varrho(M_n,\ U_n)\leqq\delta(M_n)+\varrho(M_n,\ x_n)=\\=\delta(M_n)+\varrho(M_n,\ P)$$

also wegen (19)

(21) $$\lim_{n\to\infty}\varrho_1(M_n+U_n,\ U_n)=0.$$

Sei $\mathfrak{G}^*$ die Menge aller Mengen $M_n + U_n$. Wir setzen $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}^* + \mathfrak{G}$. Es genügt zu beweisen dass $\mathfrak{A}$ abgeschlossen ist. Dies wird bewiesen, wenn man zeigt, dass die Häufungselemente von $\mathfrak{G}^*$ in $\mathfrak{G}$ liegen. Ist Z ein solches Häufungselement, so ist für eine gewisse Folge $\{n_k\}$:

$$\lim_{k\to\infty} \varrho_1 (M_{n_k} + U_{n_k}, Z) = 0 \tag{22}$$

also wegen (21) auch

$$\lim_{k\to\infty} \varrho_1 (U_{n_k}, Z) = 0 \tag{23}$$

d. h. Z ist Häufungselement von $\mathfrak{G}$, und da $\mathfrak{G}$ abgeschlossen: $Z \in \mathfrak{G}$ w. z. b. w.

24/III 1934.
Konstancin. Dom Kasy im Mianowskiego.

Sur les superpositions des fonctions représentables analytiquement [1]).

Par

Adolphe Lindenbaum (Varsovie).

1. X, Y, Z étant des ensembles quelconques, soit f_1 une fonction définie pour tous les éléments de l'ensemble X (ensemble des arguments [2]), *domaine* [3])) et telle que ses valeurs (dont l'ensemble constitue le *contredomaine* [3])) appartiennent à Y; soit ensuite f_2 une fonction dont le domaine est Y et telle que ses valeurs appartiennent à Z. Alors, la fonction $f(x) = f_2[f_1(x)]$ sera définie pour tout x de X: elle sera appelée *superposition* (composition) des fonctions f_1 et f_2 [4]) et désignée par: $f = f_2 \bigcirc f_1$.

Pour deux classes (familles) de fonctions, $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, soit $\mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_1$ la classe de toutes les fonctions $f = f_2 \bigcirc f_1$ telles que $f_2 \in \mathcal{F}_2$, $f_1 \in \mathcal{F}_1$. Les opérations $\bigcirc$ et $\times$ sont associatives:

$$f_3 \bigcirc (f_2 \bigcirc f_1) = (f_3 \bigcirc f_2) \bigcirc f_1; \qquad \mathcal{F}_3 \times (\mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_1) = (\mathcal{F}_3 \times \mathcal{F}_2) \times \mathcal{F}_1$$

(en supposant l'existence de toutes ces superpositions); donc, on peut parfois se passer de l'emploi des parenthèses

[1]) Une partie des resultats de ce travail a été l'objet de ma communication à la séance de la Soc. Polonaise de Math. (Section de Varsovie), le 10 mars 1933, et d'une note préliminaire dans les C. R. de Paris, le 15 mai 1933 (v. notre liste bibliographique, p. 35—37: Lindenbaum [2]), où cependant se sont glissées quelques erreurs: 1° dans la définition des classes $\mathcal{U}_\alpha$ et $\mathcal{L}_\alpha$, p. 1455; 2° dans la définition de la fonction λ, p. 1457; 3° dans l'indication sur le cas b du théorème II'', p. 1457.

[2]) Kuratowski [1], p. 11.

[3]) Banach [1], p. 15—16.

[4]) Baire [2], II, p. 128 — emploie cette dénomination pour une notion tout à fait différente.