Sur la séparabilité multiple des ensembles mesurables B.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

La notion de la séparabilité multiple a été introduite récemment par M. P. Novikoff[1]) comme une généralisation de la notion de la séparabilité des ensembles due à M. N. Lusin[2]).

MM. P. Novikoff, A. Liapounoff et N. Lusin se sont occupés de la séparabilité multiple des ensembles analytiques[3]). Or, M. Lusin a posé le problème[4]) si le premier et le deuxième *petit principe* (concernant la séparabilité des ensembles mesurables B)[5]) s'appliquent à la séparabilité multiple des ensembles mesurables B.

Le but de cette Note est l'étude et la solution de ce problème.

1. Soit K une classe donnée, formée d'éléments quelconques et soit Φ une famille donnée de sous-ensembles de K.

Nous dirons que *la famille Φ admet le premier principe de M. Lusin,* si, E_1 et E_2 étant deux ensembles disjoints quelconques de la famille Φ, il existe deux ensembles H_1 et H_2 tels que $H_1 \epsilon \Phi$, $H_2 \epsilon \Phi$, $K - H_1 \epsilon \Phi$, $K - H_2 \epsilon \Phi$, $H_1 H_2 = 0$, $E_1 \subset H_1$ et $E_2 \subset H_2$.

Nous dirons que *la famille Φ jouit de la propriété de M. Novikoff* si, étant donné un nombre fini d'ensembles de la famille Φ,

[1]) *C. R. de l'Acad. des Sciences de l'URSS*, vol. II, p. 275 (Note du 19. IV. 1934).

[2]) *Fund. Math.*, t. X, p. 52.

[3]) C. R. Acad. Sc. URSS, vol. II, p. 271—284.

[4]) l. c., p. 283 (fin du n° 4).

[5]) Voir N. Lusin, *Fund. Math.*, t. XVI, p. 57 et 66; cf. W. Sierpiński, *Bull. Soc. Sc. Cluj* t. VI (1932), p. 461.

$E_1, E_2, \dots, E_m$, tels que $E_1 E_2 \dots E_m = 0$, il existe m ensembles $H_1, H_2, \dots, H_m$ tels que $H_1 H_2 \dots H_m = 0$ et que $H_i \epsilon \Phi$, $K - H_i \epsilon \Phi$ et $E_i \subset H_i$ pour $i = 1, 2, \dots, m$.

Nous dirons que *la famille Φ jouit de la propriété de M. Liapounoff* (resp. *de la propriété de M. Liapounoff bis*), si, étant donnée une suite infinie d'ensembles de la famille Φ, $E_1, E_2, E_3, \dots$, telle que $E_1 E_2 E_3 \dots = 0$ (resp. telle que $\lim_{n=\infty} E_n = 0$), il existe une suite infinie $H_1, H_2, H_3, \dots$ d'ensembles, tels que $H_1 H_2 H_3 \dots = 0$ (resp. que $\lim_{n=\infty} H_n = 0$) et que $H_i \epsilon \Phi$, $K - H_i \epsilon \Phi$ et $E_i \subset H_i$ pour $i = 1, 2, 3, \dots$

Nous dirons que *la famille Φ admet le second principe de M. Lusin* si E_1 et E_2 étant deux ensembles de la famille Φ, il existe deux ensembles H_1 et H_2, tels que $H_1 H_2 = 0$, $E_1 - E_2 \subset H_1$, $E_2 - E_1 \subset H_2$, $K - H_1 \epsilon \Phi$ et $K - H_2 \epsilon \Phi$.

Nous dirons que *la famille Φ admet le second principe de M. Lusin généralisé* si, étant donné un nombre fini d'ensembles de la famille Φ, $E_1, E_2, \dots E_m$, il existe des ensembles $H_1, H_2, \dots, H_m$, tels que $H_1 H_2 \dots H_m = 0$ et que $K - H_i \epsilon \Phi$ et $E_i - E_1 E_2 \dots E_m \subset H_i$ pour $i = 1, 2, \dots, m$.

2. La famille Φ d'ensembles sera dite *(simplement) additive* (resp. *multiplicative*) si, E_1 et E_2 étant deux ensembles de la famille Φ, leur somme $E_1 + E_2$ (resp. leur produit $E_1 E_2$) appartient encore à Φ.

Lemme I. *Si la famille Φ* (de sous-ensembles de la classe K) *est (simplement) additive et multiplicative et si elle admet le premier principe de M. Lusin, elle jouit de la propriété de M. Novikoff.*

La démonstration de ce lemme n'est qu'une généralisation immédiate de la démonstration du théorème I de M. Novikoff[1]).

Supposons que la famille Φ (de sous-ensembles de K) est (simplement) additive et multiplicative et qu'elle admet le premier principe de M. Lusin. Il en résulte que la famille Φ jouit de la propriété de M. Novikoff pour $m = 2$ ensembles. Procédons maintenant par l'induction. Soit m un nombre naturel $\geqslant 2$ et supposons que la famille Φ jouit de la propriété de M. Novikoff pour m ensembles. Soient $E_1, E_2, \dots, E_m, E_{m+1}$ $m+1$ ensembles de la fa-

[1]) P. Novikoff, l. c., p. 272.

mille Φ, tels que $E_1 E_2 \dots E_m E_{m+1} = 0$. La famille Φ étant (simplement) multiplicative, l'ensemble $E_m E_{m+1}$ appartient encore à la famille Φ et, cette dernière jouissant de la propriété de M. Novikoff pour m ensembles (donc, en particulier, pour les ensembles $E_1, E_2, \dots, E_{m-1}$ et $E_m E_{m+1}$, il existe m ensembles $L_1, L_2, \dots, L_m$, tels que $L_1 L_2 \dots L_m = 0$, $L_i \epsilon \Phi$ et $K - L_i \epsilon \Phi$ pour $i = 1, 2, \dots, m$, et que $E_i \subset L_i$ pour $i = 1, 2, \dots, m-1$ et $E_m E_{m+1} \subset L_m$.

La famille Φ étant (simplement) multiplicative, il résulte de $E_m \epsilon \Phi$, $E_{m+1} \epsilon \Phi$ et $K - L_m \epsilon \Phi$ que $E_m - L_m \epsilon \Phi$ et $E_{m+1} - L_m \epsilon \Phi$. Or, d'après $E_m E_{m+1} \subset L_m$, on a évidemment $(E_m - L_m)(E_{m+1} - L_m) = 0$. La famille Φ admettant, d'après l'hypothèse, le premier principe, il existe donc deux ensembles M_1 et M_2, tels que $M_1 \epsilon \Phi$, $M_2 \epsilon \Phi$, $K - M_1 \epsilon \Phi$, $K - M_2 \epsilon \Phi$, $M_1 M_2 = 0$, $E_m - L_m \subset M_1$ et $E_{m+1} - L_m \subset M_2$.

Posons

$$H_i = L_i \text{ pour } i = 1, 2, \dots, m-1, \quad H_m = L_m + M_1, \quad H_{m+1} = L_m + M_2.$$

La famille Φ étant (simplement) additive et multiplicative, il résulte des propriétés des ensembles L_m, M_1 et M_2 que $H_m \epsilon \Phi$, $H_{m+1} \epsilon \Phi$, $K - H_m \epsilon \Phi$ et $K - H_{m+1} \epsilon \Phi$.

Or, on a, d'après $E_m - L_m \subset M_1$ et $E_{m+1} - L_m \subset M_2$:

$$E_m \subset L_m + M_1 = H_m \quad \text{et} \quad E_{m+1} \subset L_m + M_2 = H_{m+1}.$$

Enfin

$$H_1 H_2 \dots H_m H_{m+1} = L_1 L_2 \dots L_{m-1} (L_m + M_1) \cdot (L_m + M_2) = \\ = L_1 L_2 \dots L_m + L_1 L_2 \dots L_{m-1} M_1 M_2 = 0$$

(puisque $L_1 L_2 \dots L_m = 0$ et $M_1 M_2 = 0$).

La famille Φ jouit ainsi de la propriété de M. Novikoff pour $m + 1$ ensembles. Le lemme 1 est donc démontré par l'induction.

Il est à remarquer qu'on ne peut pas dans l'énoncé du lemme I remplacer la propriété de M. Novikoff par la propriété de M. Liapounoff.

En effet, désignons, pour $n = 1, 2, 3, \dots$, par E_n l'intervalle ouvert $E_n = \left[0 < x < \frac{1}{n}\right]$ et soit K l'intervalle $I = [0 \leqslant x \leqslant 1]$ et Φ la famille de tous les ensembles $E_1, E_2, E_3, \dots$ Comme on voit sans peine, Φ est une famille (simplement) additive et multiplicative.

La famille Φ admet évidemment le premier principe de Lusin, deux ensembles de Φ n'étant jamais disjoints. Or, la famille Φ ne jouit pas de la propriétéde M. Liapounoff, puisque $E_1 E_2 E_3 \dots = 0$ et puisqu'il n'existe aucun ensemble H de Φ, tel qu'on ait encore $K - H \epsilon \Phi$.

3. Soit K une classe d'éléments quelconques et soit Φ_1 une famille (simplement) additive donnée quelconque de sous-ensembles de K [1]). Appellons Q^1 les ensembles de la famille Φ_1, P^1 leurs complémentaires par rapports à K, et définissons pour les nombres ordinaux $\alpha < \Omega$ les ensembles P^α et Q^α par l'induction transfinie comme il suit. P^α sont les ensembles qui sont des sommes d'une infinité dénombrable d'ensembles appartenant aux classes Q antérieurement définies et Q^α sont des ensembles qui sont des produits d'une infinité dénombrable d'ensembles appartenant aux classes P antérieurement définies [2])

On voit immédiatement que, pour $1 < \alpha < \Omega$, une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles P^α est toujours un ensemble P^α et on démontre sans peine par l'induction transfinie que, pour $1 \leqslant \alpha < \Omega$, les ensembles Q^α coïncident avec les complémentaires des ensembles P^α, que les ensembles Q^α sont des $P^{\alpha+1}$ et que, pour $1 < \alpha < \Omega$, le produit de deux ensembles P^α est un ensemble P^α. Il en résulte tout de suite que, pour $1 < \alpha < \Omega$, la famille Φ_α de tous les ensembles Q^α est (simplement) additive et (même dénombrablement) multiplicative.

J'ai démontré [3]) que, pour $1 < \alpha < \Omega$, la famille Φ_α admet le premier principe de M. Lusin. Or, la famille Φ_α étant (simplement) additive et multiplicative, il en résulte, d'après notre lemme I, ce

Théorème I. *Pour $1 < \alpha < \Omega$ la famille Φ_α jouit de la propriété de M. Novikoff.*

A la fin du § 4 nous indiquerons comment on peut démontrer directement le théorème I.

4. ***Théorème II.*** *Pour $1 < \alpha < \Omega$ la famille Φ_α jouit de la propriété de M. Liapounoff.*

[1]) Si K est un espace euclidien, on prend pour Φ_1 la famille de tous les sous-ensembles fermés de K.

[2]) Cf. F. Hausdorff, *Math. Zeitschr.* 5 (1919), p. 307.

[3]) *Bull. Soc. Sc. Cluj* t. VI (1932), p. 462. Pour les espaces euclidiens K voir *Fund. Math.* t. VI, p. 2.

La propriété de M. Novikoff ne pouvant être remplacée dans l'énoncé du lemme I par celle de M. Liapounoff, nous ne pouvons pas déduire le théorème II comme nous l'avons fait pour le théorème I. Il faut donc suivre une autre voie.

Nous démontrerons d'abord le lemme suivant de la théorie générale des ensembles.

Lemme II. *Si* E_n^k $(k=1,2,\ldots;\ n=1,2,\ldots)$ *est une suite double d'ensembles* (formés d'éléments quelconques), *telle qu'en posant*

$$E^k=\prod_{n=1}^{\infty}E_n^k \tag{1}$$

on a

$$E_n^k\supset E_{n+1}^k \qquad \textit{pour } k \textit{ et } n \textit{ naturels}, \tag{2}$$

et

$$\prod_{k=1}^{\infty}E^k=0, \tag{3}$$

alors en posant

$$H^k=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(E_n^k-\prod_{\substack{i\leqslant n+1\\ i\neq k}}E_n^i\Big) \tag{4}$$

on a:

$$H^k=E_1^k\prod_{n=1}^{\infty}\Big[E_{n+1}^k+\Big(E_1^k-\prod_{\substack{i\leqslant n+1\\ i\neq k}}E_n^i\Big)\Big],\ \text{pour } k=1,2,\ldots \tag{5}$$

$$E^k\subset H^k,\quad \text{pour}\quad k=1,2,3,\ldots \tag{6}$$

et

$$\prod_{k=1}^{\infty}H^k=0. \tag{7}$$

Démonstration. Soit k un nombre naturel donné et soit p un élément de l'ensemble H^k. D'après (4) il existe un indice r, tel que $p\in E_r^k-\prod_{\substack{i\leqslant r+1\\ i\neq k}}E_r^i$, d'où, d'après (2), $p\in E_n^k$ pour $n\leqslant r$ et $p\ non\in \prod_{\substack{i\leqslant n+1\\ i\neq k}}E_n^i$ pour $n\geqslant r$, donc $p\in E_1^k-\prod_{\substack{i\leqslant n+1\\ i\neq k}}E_n^i$ pour $n\geqslant r$, ce

qui donne

$$p\in E_1^k\prod_{n=1}^{\infty}\Big[E_{n+1}^k+\Big(E_1^k-\prod_{\substack{i\leqslant n+1\\ i\neq k}}E_n^i\Big)\Big]. \tag{8}$$

D'autre part, soit p un élément tel qu'on a la formule (8). D'après (3), il existe un indice s, tel que $p\ non\in E^s$ et, d'après (1) et (2) il existe un indice $r\geqslant s$, tel que $p\ non\in E_r^i$, donc, si $s\neq k$, $p\ non\in \prod_{\substack{i\leqslant r+1\\ i\neq k}}E_r^i$.

Si $p\in E^k$, on a $s\neq k$ et, d'après (1), $p\in E_r^k$, donc $p\in E_r^k-\prod_{\substack{i\leqslant r+1\\ i\neq k}}E_r^i$ et, d'après (4): $p\in H^k$.

Si $p\ non\in E^k$, il existe, d'après (1), le plus petit indice q, tel que $p\ non\in E_q^k$; d'après (8) on a $q>1$, donc $p\in E_{q-1}^k$ et, d'après (8): $p\in E_q^k+(E_1^k-\prod_{\substack{i\leqslant q\\ i\neq k}}E_{q-1}^i)$, donc (d'après $p\ non\in E_q^k$): $p\in E_{q-1}^k$ et $p\ non\in\prod_{\substack{i\leqslant q\\ i\neq k}}E_{q-1}^i$, ce qui donne $p\in E_{q-1}^k-\prod_{\substack{i\leqslant q\\ i\neq k}}E_{q-1}^i$ et, d'après (4): $p\in H^k$. Nous avons ainsi démontré que (pour k naturels) la formule $p\in H^k$ équivaut à la formule (8) et il en résulte la formule (5).

Soit maintenant k un indice donné et soit $p\in E^k$. D'après (1) on a donc $p\in E_n^k$ pour $n=1,2,3,\ldots$ et il en résulte tout de suite, d'après (5), que $p\in H^k$. La formule $p\in E^k$ entraine donc (pour $k=1,2,3,\ldots$) la formule $p\in H^k$, ce qui prouve qu'on a la formule (6).

Admettons enfin qu'il existe un élément p, tel que $p\in\prod_{k=1}^{\infty}H^k$ On a donc $p\in H^k$ pour $k=1,2,3,\ldots$ et il existe, d'après (4), pour tout indice k un indice n_k, tel que

$$p\in E_{n_k}^k-\prod_{\substack{i\leqslant n_k+1\\ i\neq k}}E_{n_k}^i\quad \text{pour}\quad k=1,2,3,\ldots \tag{9}$$

Soit $n_s=\min(n_1,n_2,n_3,\ldots)$. D'après (2) on a

$$E_{n_k}^i\subset E_{n_s}^i\quad \text{pour}\quad k=1,2,3,\ldots;\ i=1,2,3,\ldots \tag{10}$$

Or, d'après (9), $p\in E_{n_s}^s-\prod_{\substack{i\leqslant n_s+1\\ i\neq s}}E_{n_s}^i$, d'où $p\ non\in\prod_{\substack{i\leqslant n_s+1\\ i\neq s}}E_{n_s}^i$ et il existe un indice $r\leqslant n_s+1$ $(r\neq s)$, tel que $p\ non\in E_{n_s}^r$ et, d'après (10), on a $p\ non\in E_{n_k}^r$, pour $k=1,2,3,\ldots$, donc, en particulier, $p\ non\in E_{n_r}^r$, contrairement à (9) (pour $k=r$).

L'hypothèse que $\prod_{k=1}^{\infty} H^k \neq 0$ implique donc une contradiction. On a donc la formule (7).

Le lemme II est ainsi démontré.

Soit maintenant α un nombre ordinal donné, tel que $1 < \alpha < \Omega$ et soit $E^k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ une suite infinie d'ensembles de la famille Φ_α, telle que $E^1 E^2 E^3 \ldots = 0$. On a donc la formule (3).

D'après la définition de la famille Φ_α et des ensembles Q^α, il existe pour tout k naturel une suite infinie d'ensembles $E_n^k (n = 1, 2, 3, \ldots)$, tels que, pour n naturels, E_n^k est un P^{ξ_n}, où $\xi_n < \alpha$ et qu'on a la formule (1).

Le produit de deux ensembles P^ξ étant un P^ξ et tout ensemble P^ξ étant un P^η pour $\xi < \eta$, nous pouvons évidemment supposer que les ensembles E_n^k satisfont à la condition (2) (Si ce n'était pas le cas, il faudrait seulement remplacer les facteurs des produits (1) par les produits partiels correspondants).

Définissons maintenant les ensembles $H^k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ par la formule (4). Nous aurons ainsi les formules (1), (2), (3) et (4), qui donnent, d'après le lemme II, les formules (5), (6) et (7).

E_n^k étant (pour k et n naturels) un $P^{\xi_n^k}$, où $\xi_n^k < \alpha$, il résulte sans peine des formules (4) et (5) et des propriétés des ensembles P^ξ et Q^ξ que H^k est simultanément un P^α et un Q^α. Il résulte donc de (6) et (7) que la famille Φ_α jouit de la propriété de M. Liapounoff.

Le théorème II est ainsi démontré.

Remarque. Soit m un nombre naturel donné > 1. En posant $E_n^k = E_n^m$ pour $k > m$, on obtient tout de suite du lemme II un lemme, dont on peut déduire le théorème I (pareillement comme nous avons déduit le théorème II du lemme II).

5. Il est à remarquer qu'*on ne peut pas remplacer dans l'énoncé du théorème II la propriété de M. Liapounoff par la propriété de M. Liapounoff bis.*

En effet, nous prouverons que *la famille de tous les ensembles G_δ linéaires ne jouit pas de la propriété de M. Liapounoff bis.* Nous démontrerons notamment la proposition suivante:

Il existe une suite infinie d'ensembles G_δ linéaires disjoints $\Gamma_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ telle que si T_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ sont des ensembles F_σ, tels que $\Gamma_k \subset T_k$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$, on a $\overline{\lim_{n=\infty}}\, T_k \neq 0$.

Démonstration. Il existe, comme on sait, un système d'ensembles linéaires parfaits $\{P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ tel que:

1°. Les ensembles $P_n (n = 1, 2, 3 \ldots)$ sont disjoints, non denses, et leur somme est dense dans tout intervalle.

2°. Quel que soit le nombre naturel donné k et le système donné de k nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$, les ensembles $P_{n_1, n_2, \ldots n_k, n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont contenus dans $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ et leur somme est dense dans $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$.

Posons maintenant

$$E = C \sum_{n=1}^{\infty} P_n \tag{1}$$

et, pour tout système fini $n_1, n_2, \ldots, n_k$ de nombres naturels:

$$E_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = P_{n_1, n_2, \ldots, n_k} - \sum_{n=1}^{\infty} P_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n}. \tag{2}$$

Les ensembles E et $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ (où $n_1, n_2, \ldots, n_k$ est un système fini quelconque de nombres naturels) sont évidemment des G_δ et ils sont (d'après 1° et 2°) deux à deux sans points communs.

Admettons maintenant qu'il existe un système d'ensembles F_σ, H et $\{H_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$, tel que $E \subset H$ et que, pour tout système fini de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$:

$$E_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \subset H_{n_1, n_2, \ldots, n_k}. \tag{3}$$

Les ensembles $P_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ étant non denses, il résulte de (1) et de $E \subset H$ que l'ensemble H ne peut pas être 1[re] catégorie. En tant qu'un F_σ linéaire, H contient donc un itervalle δ. L'ensemble $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ étant (d'après 1°) dense dans tout intervalle, existe un indice m_1 et une portion $P_{m_1}^*$ de l'ensemble parfait P_{m_1}, tels que $P_{m_1}^* \subset \delta$. D'après (2) on a (d'après $P_{m_1}^* \subset P_{m_1}$)

$$P_{m_1}^* E_{m_1} = P_{m_1}^* - \sum_{n=1}^{\infty} P_{m_1, n}. \tag{4}$$

Or, d'après (3) on a

(5) $$P^*_{m_1} E_{m_1} \subset P^*_{m_1} H_{m_1}.$$

Les ensembles $P_{m_1, n} (n = 1, 2, 3, \ldots)$ étant non denses dans P_{m_1}, donc aussi dans la portion $P^*_{m_1}$ de P_{m_1}, l'ensemble $P^*_{m_1} H_{m_1}$ ne peut pas être, d'après (4) et (5), de 1re catégorie dans $P^*_{m_1}$. Donc, en tant qu'un F_σ, l'ensemble H_{m_1} contient une portion $P^{**}_{m_1}$ de l'ensemble $P^*_{m_1}$.

L'ensemble $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P_{m_1, n}$ étant (d'après 2°) dense dans P_{m_1} (et $P^{**}_{m_1}$ étant une portion de P_{m_1}), il existe un indice m_2 et une portion $P^*_{m_1, m_2}$ de l'ensemble P_{m_1, m_2}, tels que $P^*_{m_1, m_2} \subset P^{**}_{m_1}$. Comme plus haut, nous en concluons que l'ensemble H_{m_1, m_2} contient une portion $P^{**}_{m_1, m_2}$ de l'ensemble $P^*_{m_1, m_2}$.

En raisonnant ainsi de suite, nous obtenons une suite infinie de nombres naturels $m_1, m_2, m_3, \ldots$ et, pour tout k naturel une portion $P^{**}_{m_1, m_2, \ldots, m_k}$ de l'ensemble $P_{m_1 m_2, \ldots, m_k}$, tels que

(6) $$P^{**}_{m_1, m_2, \ldots, m_k, m_{k+1}} \subset P^{**}_{m_1, m_2, \ldots, m_k} \subset H_{m_1, m_2, \ldots, m_k} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

La suite infinie d'ensembles parfaits (non vides) $P^{**}_{m_1, m_2, \ldots, m_k} (k = 1, 2, 3, \ldots)$ est donc descendente et, d'après le théorème connu de Cantor, il existe un point p, tel que

$$p \in P^{**}_{m_1, m_2, \ldots, m_k} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

d'où, d'après (6):

$$p \in H_{m_1, m_2, \ldots, m_k} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Le point p appartient donc à une infinité d'ensembles du système $\{H_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ et notre proposition est démontrée.

6. *Théorème III:* *Pour $1 < \alpha < \Omega$ la famille Φ_α admet le second principe de M Lusin généralisé*[1]).

Nous démontrerons d'abord ce

Lemme III: *Si m est un nombre naturel > 1 et $E^k_n (k = 1, 2, \ldots, m;\ n = 1, 2, \ldots)$ un système d'ensembles* (formés d'éléments quelconques), *tel qu'en posant*

[1]) C'est une généralisation du théoreme que j'ai démontré dans le *Bull. Soc. Sc. Cluj* t. VI (1932), p. 464 et *Mathematica* (Cluj 1932) vol. VI, p. 117.

(1) $$E^k = \prod_{n=1}^{\infty} E^k_n \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

on a

(2) $$E^k_n \supset E^k_{n+1} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, m;\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

alors, en posant

(3) $$H^k = \Bigl(E^k_1 - \prod_{i \neq k} E^i_1\Bigr) + \sum_{n=1}^{\infty} \Bigl(E^k_n \prod_{i \neq k} E^i_{n-1} - \prod_{i \neq k} E^i_n\Bigr) \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

(où $\prod\limits_{i \neq k} Z^i$ désigne le produit $Z_1 Z_2 \ldots Z_{k-1} Z_{k+1} \ldots Z_m$) *on a*

(4) $$E^k - \prod_{i=1}^{m} E^i \subset H^k \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

et

(5) $$\prod_{k=1}^{m} H^k = 0.$$

Démonstration. Soit E^k_n $(k = 1, 2, \ldots, m;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$ un système donné d'ensembles et supposons que nous avons les formules (1), (2) et (3).

Soit k un nombre naturel donné $\leqslant m$ et soit p un élément tel que $p \in E^k - \prod\limits_{i=1}^{m} E^i$. On a donc, d'après (1): $p \text{ non } \in \prod\limits_{i=1}^{m} \prod\limits_{n=1}^{\infty} E^i_n$ et il existe le plus petit indice r tel qu'il existe un indice $i_r \leqslant m$ tel que

(6) $$p \text{ non } \in E^{i_r}_r.$$

On a donc

(7) $$p \in E^i_j \quad \text{pour} \quad j < r,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

Si $r = 1$, on a, d'après (6), $p \text{ non } \in E^{i_1}_1$, donc $i_1 \neq k$, puisque, d'après $p \in E^k$ et (1), on a $p \in E^k_1$. On a donc $p \in E^k_1 - \prod\limits_{i \neq k} E^i_1$ et, d'après (3): $p \in H^k$.

Si $r > 1$, on a $r - 1 \geqslant 1$ et, d'après (7):

(8) $$p \in E^i_{r-1} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Or d'après $p \in E^k$ et (1) on a $p \in E_r^k$, d'où il résulte, d'après (6) que $i_r \neq k$. D'après (8) et (6) on a donc

$$p \in E_r^k \prod_{i \neq k} E_{r-1}^i - \prod_{i \neq k} E_r^i$$

donc, d'après (3): $p \in H^k$.

La formule $p \in E^k - \prod_{i=1}^{m} E^i$ entraîne donc toujours la formule $p \in H^k$. La formule (4) est ainsi établie.

Admettons maintenant qu'il existe un élément p tel que $p \in H^k$ pour $k = 1, 2, \ldots, m$. D'après (3) il existe donc pour tout nombre naturel $k \leqslant m$ un indice n_k, tel que

$$(9) \qquad p \in E_{n_k}^k \prod_{i \neq k} E_{n_k-1}^i - \prod_{i \neq k} E_{n_k}^i \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

(si $n_k = 1$, il faut comprendre par $E_1^k \prod_{i \neq k} E_0^i$ l'ensemble E_1^k).

On a donc p *non* $\in \prod_{i \neq k} E_{n_k}^i$ pour $k = 1, 2, \ldots, m$ et il existe pour tout nombre naturel $k \leqslant m$ un indice $i_k \leqslant m$ $(i_k \neq k)$, tel que

$$(10) \qquad p \text{ non } \in E_{n_k}^{i_k} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Soit $n_s = \min(n_1, n_2, \ldots, n_m)$: on a donc, d'après (10):

$$(11) \qquad p \text{ non } \in E_{n_s}^{i_s}.$$

Or, d'après (9) et (2):

$$p \in E_{n_k-1}^i \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, m; \; i = 1, 2, \ldots, m,$$

donc en particulier

$$p \in E_{n_k-1}^{i_s} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

ce qui donne, d'après (11) et (2):

$$n_k - 1 < n_s, \quad \text{donc} \quad n_k \leqslant n_s \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

d'où, d'après $n_s = \min(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ nous trouvons

$$n_k = n_s \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

D'après (9) on a donc

$$p \in E_{n_s}^k \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

donc en particulier (pour $k = i_s$):

$$p \in E_{n_s}^{i_s},$$

contrairement à (11).

L'hypothèse qu'il existe un élément p, tel que $p \in H^k$ pour $k = 1, 2, \ldots, m$ implique donc une contradiction. On a donc la formule (5) et le lemme III est démontré.

La déduction du théorème III du lemme III est tout à fait analogue à la déduction du théorème II du lemme II.

On peut demander si le théorème III ne peut pas être généralisé pour une suite infinie des ensembles $E^1, E^2, E^3, \ldots$ Or, ce n'est pas le cas, même pour $\alpha = 2$, ce qui résulte tout de suite de la proposition que nous avons démontré dans le § 5.

Cela prouve en même temps que M. N. Lusin avait raison, en supposant [1]) que, pour une suite infinie d'ensembles analytiques, son deuxième principe ne pourra pas être déduit de celui pour deux ensembles par un raisonnement purement algébrique.

[1]) *C. R. Acad. Sc. URSS*, vol. II, p. 283 (fin du n° 3).