Posons

$$Z_{Nk}=\prod_{n=N}^{\infty} E\left[\max_{N\leqslant p\leqslant n}\left|\frac{s_p(x)}{p}\right|<\frac{1}{k}\right] \qquad \text{et} \qquad \bar{Z}_{Nk}=\prod_{n=N}^{\infty}\prod_{m=3\bar{n}k}^{\infty}\bar{Z}(k,N,n,m).$$

On voit facilement que

$$m(Z)=\lim_{k=\infty}\lim_{N=\infty} m(Z_{Nk}) \quad \text{et} \quad m(\bar{Z})=\lim_{k=\infty}\lim_{N=\infty} m(\bar{Z}_{Nk}).$$

Or, on a pour tout $M>N$, en posant $\bar{M}=\max(M,\sum_{\nu=1}^{M}a_\nu)$:

$$\bar{Z}_{Nk}=\prod_{n=N}^{\infty}\prod_{m=3k\bar{n}}^{\infty} E\left[\max_{N\leqslant p\leqslant n}\left|\frac{s_p(x)}{p}\right|<\frac{1}{3k};\ \max_{3k\bar{n}\leqslant r\leqslant m}\left|\frac{\sum_{\nu=n+1}^{r} x_\nu}{r}\right|<\frac{2}{3k}\right]\subset$$

$$\subset E\left[\max_{N\leqslant p\leqslant M}\left|\frac{s_p(x)}{p}\right|<\frac{1}{3k}\right]\times\prod_{m=3k\bar{M}}^{\infty} E\left[\max_{3k\bar{M}\leqslant r\leqslant m}\left|\frac{\sum_{\nu=M+1}^{r} x_\nu}{r}\right|<\frac{2}{3k}\right]$$

et comme dans les deux facteurs du dernier produit on a affaire à des variables x différentes et indépendantes, il vient

$$m(\bar{Z}_{Nk})\leqslant m\left(E\left[\max_{N\leqslant p\leqslant M}\left|\frac{s_p(x)}{p}\right|<\frac{1}{3k}\right]\right)\cdot m\left(\prod_{m=3k\bar{M}}^{\infty} E\left[\max_{3k\bar{M}\leqslant r\leqslant m}\left|\frac{\sum_{\nu=M+1}^{r} x_\nu}{r}\right|<\frac{2}{3k}\right]\right).$$

Si M tend vers l'infini, le premier membre tend vers $m(Z_{N,3k})$. En majorant le deuxième membre par le nombre $m(Z_{3k\bar{M},k})$, on a pour $M=\infty$

$$m(\bar{Z}_{Nk})\leqslant m(Z_{N,3k})\cdot\lim_{M=\infty} m(Z_{Mk}).$$

En passant à la limite pour $N=\infty$, $k=\infty$, il vient

$$m(\bar{Z})\leqslant m(Z)\cdot m(Z)$$

d'où

$$m(Z)\leqslant m(\bar{Z})\leqslant m^2(Z),$$

ce qui entraîne $m(Z)=0$ ou $m(Z)=1$, c. q. f. d.

Über innere Abbildungen

Von

F. Hausdorff (Bonn).

1. Zweck dieser Mitteilung ist zunächst der Beweis des Satzes:

I. *Ist $y=\varphi(x)$ eine innere Abbildung des Raumes A auf den Raum $B=\varphi(A)$, d. h. eine stetige Abbildung, bei der jede in A offene Menge U ein in B offenes Bild $V=\varphi(U)$ hat, so ist zugleich mit A auch B topologisch vollständig.*

Als topologisch vollständig wird ein Raum bezeichnet, der mit einem metrisch vollständigen Raum (in dem jede Fundamentalfolge konvergiert) homoeomorph ist. Herr Sierpiński[1]) hat den Satz für Mengen in Euklidischen Räumen bewiesen; bei einer Gelegenheit[2]) habe ich ihn in obigem Umfang ausgesprochen und möchte, einem Wunsch des Herrn Kuratowski entsprechend, nun den Beweis geben. Als Basis für den Raum A bezeichnet man ein System Γ offener Mengen $\neq 0$ dieses Raumes derart, dass jede offene Menge $\neq 0$ Summe gewisser $U\varepsilon\Gamma$ ist. Bedeutet U_x (Umgebung von x) eine den Punkt x enthaltende offene Menge, so soll also jede Umgebung jedes Punktes $x\varepsilon A$ eine Umgebung $U_x\varepsilon\Gamma$ enthalten, x soll „beliebig kleine“ Umgebungen $U_x\varepsilon\Gamma$ haben; im metrischen Raum kann man darunter Umgebungen mit beliebig kleinen Durchmessern verstehen.

Ein System von (beliebigen) Mengen $U\neq 0$ des Raumes A heisst geschlossen, wenn für jede Folge von Mengen $U_1\supset U_2\supset U_3\supset\ldots$ des Systems der Durchschnitt ihrer abgeschlossenen Hüllen nicht leer ist: $\bar{U}_1\,\bar{U}_2\,\bar{U}_3\ldots\neq 0$.

[1]) Fund. Math. XVI (1930), p. 173—180.
[2]) Journ. f. Math. 167 (1932), S. 301.

II. *Zur topologischen Vollständigkeit des Raumes A ist die Existenz einer geschlossenen Basis Γ notwendig und hinreichend.*

Diesen Satz hat Herr N. Wedenissoff[1]) bewiesen und damit ein früheres Ergebniss des Herrn P. Alexandroff[2]) verschärft und vereinfacht.

Dem Beweis unseres Satzes I. schicken wir Folgendes voraus:

Hilfsatz. Es sei Γ eine Basis für den Raum A, ferner $y=\varphi(x)$ eine stetige Abbildung von A auf $B=\varphi(A)$, sodann U eine in A offene Menge und $V=\varphi(U)$ ihr Bild, endlich G eine beliebige Menge in B, in der V nicht enthalten ist ($V-G\neq 0$). Dann ist eine Darstellung

$$\begin{aligned} G+V &= G+V_0+V_1+\ldots+V_\omega+\ldots \\ &= G+\sum_\lambda V_\lambda \end{aligned}$$

möglich (wo der Index λ einen Abschnitt von Ordnungszahlen durchläuft), derart dass

(α) die $V_\lambda=\varphi(U_\lambda)$ die Bilder offener Mengen $U_\lambda \varepsilon \Gamma$, $U_\lambda \subset U$ sind,

(β) V_λ niemals in der Summe $G_\lambda = G+\sum_{\xi<\lambda} V_\xi$ enthalten ist:

$$V_\lambda - G_\lambda \neq 0.$$

Der Beweis ist sehr einfach. Für ein λ seien bereits die V_ξ mit $\xi<\lambda$ und also G_λ bestimmt. (Für $\lambda=0$ heisst das: es ist $G_0=G$ bestimmt). Jedenfalls ist $G_\lambda \subset G+V$. Ist noch $G_\lambda \neq G+V$, also $V-G_\lambda \neq 0$, so sei $y\,\varepsilon\, V-G_\lambda$, x ein Urbildpunkt $\varepsilon\, U$ von $y=\varphi(x)$ und $U_\lambda \subset U$ eine der Basis Γ angehörige Umgebung von x. Dann ist $V_\lambda=\varphi(U_\lambda)$ nicht $\subset G_\lambda$, da V_λ den Punkt y enthält. Ist hingegen $G_\lambda = G+V$, so wird V_λ nicht mehr definiert; aus Mächtigkeitsgründen muss dies für einen kleinsten Index $\mu>0$ eintreten, und dann ist $G+V=G_\mu=G+\sum_{\lambda<\mu} V_\lambda$ die gewünschte Darstellung.

Beim Beweise von I können wir A als metrisch vollständig annehmen. Für jedes $p=1,2,3,\ldots$ ist das System Γ_p der in A offenen Mengen $U\neq 0$, die ebenso wie ihre Bilder $V=\varphi(U)$ Durchmesser $<\frac{1}{p}$ haben, wegen der Stetigkeit von $\varphi(x)$ eine Basis für A. Wir bilden ein System offener Mengen (in A) mit Ordnungszahlen

[1]) Journ. de Math. s. 9, v. 9 (1930), p. 377—381.

[2]) C. R. 178 (1924), p. 185—187.

als Indizes

$$U_\alpha,\ U_{\alpha\beta},\ U_{\alpha\beta\gamma},\ldots,$$

ihre Bilder seien

$$V_\alpha=\varphi(U_\alpha),\quad V_{\alpha\beta}=\varphi(U_{\alpha\beta}),\quad V_{\alpha\beta\gamma}=\varphi(U_{\alpha\beta\gamma}),\ \ldots$$

und wir setzen

$$B_\alpha=\sum_{\xi<\alpha} V_\xi,\quad B_{\alpha\beta}=\sum_{\eta<\beta} V_{\alpha\eta},\quad B_{\alpha\beta\gamma}=\sum_{\zeta<\gamma} V_{\alpha\beta\zeta},\ \ldots$$

Die Bildung dieser Mengensysteme soll so erfolgen, dass

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} B &= \sum_\alpha V_\alpha \\ B_\alpha+V_\alpha &= B_\alpha+\sum_\beta V_{\alpha\beta} \\ B_\alpha+B_{\alpha\beta}+V_{\alpha\beta} &= B_\alpha+B_{\alpha\beta}+\sum_\gamma V_{\alpha\beta\gamma} \\ &\ldots \end{aligned} \right.$$

dem Hilfsatz entsprechende Darstellungen sind, wobei die daselbst vorkommenden Mengen

$$\Gamma,\quad U,\quad V,\quad G$$

der Reihe nach durch

$$\begin{array}{llll} \Gamma_1, & A, & B, & 0 \\ \Gamma_2, & U_\alpha & V_\alpha, & B_\alpha \\ \Gamma_3, & U_{\alpha\beta}, & V_{\alpha\beta}, & B_\alpha+B_{\alpha\beta} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

zu ersetzen sind. Die Bedingung (α) hat dann zur Folge:

$$(2)\qquad U_\alpha \supset U_{\alpha\beta} \supset U_{\alpha\beta\gamma} \supset \ldots$$

(3) *Die Mengen U^p mit p Indizes und ihre Bilder V^p haben Durchmesser $<\frac{1}{p}$.*

Und aus (β) ergibt sich, dass

$$(4)\quad V_\alpha-B_\alpha\neq 0,\ V_{\alpha\beta}-(B_\alpha+B_{\alpha\beta})\neq 0,\ V_{\alpha\beta\gamma}-(B_\alpha+B_{\alpha\beta}+B_{\alpha\beta\gamma})\neq 0,\ldots$$

Nun folgt zunächst

$$(5)\qquad B=\sum V_\alpha V_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta\gamma}\cdots,$$

die Summe über alle Indizesfolgen erstreckt. Denn aus (1) ergibt sich der Reihe nach, dass jeder Punkt $y \varepsilon B$ einem gewissen V_α und, wenn man hier das kleinste α wählt, einer einzigen Menge $V_\alpha - B_\alpha$ angehört, sodann $y \varepsilon V_{\alpha\beta}$ und, bei kleinstem β, $y \varepsilon V_{\alpha\beta} - B_{\alpha\beta}$, danach $y \varepsilon V_{\alpha\beta\gamma}$ u. s. w. Übrigens können in (5) auch leere Summanden auftreten.

Die Gleichung (5) besagt, dass im Fall einer inneren Abbildung die offenen Mengen $V_\alpha, V_{\alpha\beta}, V_{\alpha\beta\gamma}, \dots$ eine Basis für den Raum B bilden. Denn jeder Punkt $y \varepsilon B$ hat Umgebungen $V_\alpha, V_{\alpha\beta}, V_{\alpha\beta\gamma}, \dots$, die nach (3) beliebig klein werden.

Sodann wird aus (4) die *Geschlossenheit* dieser Basis und damit nach II. die topologische Vollständigkeit von B folgen. Allgemein ist

$$V_{\beta_1\beta_2\dots\beta_q} \text{ nicht } \subset B_{\beta_1} + B_{\beta_1\beta_2} + \dots + B_{\beta_1\beta_2\dots\beta_q}.$$

Die Summe rechterhand enthält alle $V_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_p}$, wo $p \leqq q$ und *lexikographisch* (nach ersten Differenzen geordnet)

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p) < (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p).$$

Denn wenn

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \alpha_n, \dots, \alpha_p), \quad \alpha_n < \beta_n$$

für ein $n = 1, 2, \dots, p$, so ist nach (2)

$$V_{\alpha_1\dots\alpha_p} \subset V_{\beta_1\dots\beta_{n-1}\alpha_n} \subset B_{\beta_1\dots\beta_{n-1}\beta_n}.$$

Demnach ist für $p \leqq q$, $(\alpha_1, .., \alpha_p) < (\beta_1, ..., \beta_p)$ sicher $V_{\beta_1\dots\beta_q} - V_{\alpha_1\dots\alpha_p} \neq 0$, oder

(6) aus $p \leqq q$, $V_{\beta_1\dots\beta_q} \subset V_{\alpha_1\dots\alpha_p}$ folgt $(\beta_1, \dots, \beta_p) \leqq (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$.

Nun sei

$$V^{p_1} \supset V^{p_2} \supset V^{p_3} \supset \dots$$

eine Folge unserer Mengen V, wo V^p eine Menge mit p Indizes bezeichnet; es ist zu zeigen, dass ihre abgeschlossenen Hüllen einen Durchschnitt $\neq 0$ haben, wobei offenbar die Mengen der Folge als paarweise verschieden ($V^{p_n} \neq V^{p_{n+1}}$) angenommen werden dürfen.

Zunächst können nicht unendlich viele $p_n = p$ sein. Denn dann hätte man eine Folge

$$V_{\alpha_1\dots\alpha_p} \supset V_{\beta_1\dots\beta_p} \supset V_{\gamma_1\dots\gamma_p} \supset \dots$$

und nach (6)

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_p) > (\beta_1, \dots, \beta_p) > (\gamma_1, \dots, \gamma_p) > \dots,$$

was bei der lexikographischen Wohlordnung unmöglich ist. Demnach muss $p_n \to \infty$ streben und wir können mit Beschränkung auf eine Teilfolge

(7) $$V_{\alpha_1\dots\alpha_p} \supset V_{\beta_1\dots\beta_q} \supset V_{\gamma_1\dots\gamma_r} \supset \dots \quad (p<q<r<\dots)$$

annehmen. Nach (6) ist $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \geqq (\beta_1, \dots, \beta_p)$, also $\alpha_1 \geqq \beta_1$, ebenso weiter $\alpha_1 \geqq \beta_1 \geqq \gamma_1 \geqq \dots$; hierin muss wegen der Wohlordnung schliesslich das Gleichheitszeichen gelten. Ebenso ist $(\beta_1, \beta_2) \geqq (\gamma_1, \gamma_2) \geqq \dots$ mit schliesslichem Gleichheitszeichen u. s. w. Es gibt also eine feste Indizesfolge $\xi_1, \xi_2, \dots$ derart, dass für jedes n die Indizes $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \dots$ schliesslich $= \xi_n$ werden.

Die abgeschlossenen Hüllen der offenen Mengen

$$U_{\xi_1} \supset U_{\xi_1\xi_2} \supset U_{\xi_1\xi_2\xi_3} \supset \dots,$$

deren Durchmesser nach 0 streben, haben wegen der Vollständigkeit von A einen (einzigen) gemeinsamen Punkt x, dessen Bild $y = \varphi(x)$ auf Grund der Stetigkeit ($\varphi(\overline{U}) \subset \overline{\varphi(U)}$) den abgeschlossenen Hüllen aller $V_{\xi_1\dots\xi_n}$ angehört. Seien nun $y_p, y_q, y_r, \dots$ beliebige Punkte der Mengen (7). Da diese Mengen, für jedes n, schliesslich die ersten n Indizes $\xi_1, \dots, \xi_n$ haben und also nach (2) in $V_{\xi_1\dots\xi_n}$ enthalten sind, so haben die Punkte $y_p, y_q, y_r, \dots$ von y schliesslich eine Entfernung $< \frac{1}{n}$, d. h. sie konvergieren nach y. Danach gehört y den abgeschlossenen Hüllen aller Mengen (7) an; die Mengen $V_\alpha, V_{\alpha\beta}, V_{\alpha\beta\gamma}, \dots$ bilden eine geschlossene Basis für den Raum B.

2. Herr Mazurkiewicz hat mit einer sehr scharfsinnigen, aber etwas verwickelten Konstruktion, den folgenden Satz bewiesen [1]):

III. *Die Abbildung $y = \varphi(x)$ sei im vollständigen separablen Raume X stetig und in $A \subset X$ eine innere Abbildung; sie ist dann auch noch in $P \supset A$ eine innere Abbildung, wo P ein G_δ in X ist.*

Bei den (vergeblichen) Versuchen, die Voraussetzung der Separabilität zu entfernen, habe ich einen ziemlich einfachen Beweis von

[1]) Fund. Math. 19 (1932), p. 198--204.

III. gefunden, dessen Mitteilung vielleicht einen jüngeren Mathematiker zu weiterer Verfolgung des Problems anregt.

Von der Annahme, dass X separabel sei, wird zunächst kein Gebrauch gemacht.

Wir können annehmen, dass $X=\bar{A}$ die abgeschlossene Hülle von A sei, also A in X dicht und $B=\varphi(A)$ in $Y=\varphi(X)$ dicht. Wenn dann

$$\varphi(AU)=BV \qquad (U \text{ in } X,\ V \text{ in } Y \text{ offen})$$

ist, so ist

$$\overline{\varphi(U)}=\bar{V},$$

also der Durchmesser von V gleich dem Durchmesser von $\varphi(U)$. Denn auf Grund der Stetigkeit ist $\varphi(\overline{AU})\subset\overline{BV}$, andererseits $BV\subset\varphi(U)$, und weil AU in U, BV in V dicht, also $\overline{AU}=\bar{U}$, $\overline{BV}=\bar{V}$ ist:

$$\varphi(U)\subset\varphi(\bar{U})=\varphi(\overline{AU})\subset\overline{BV}\subset\overline{\varphi(U)},$$
$$\bar{V}=\overline{BV}=\overline{\varphi(U)}.$$

Wenn $\psi(V)$ das *Urbild* von V bedeutet, so ist $AU\subset\psi(V)$, also

$$AU=AG, \quad G=U\psi(V),$$

wo G wieder in X offen ist.

Nun sei Γ eine Basis der offenen Mengen in X. Das System Γ_n der $U\varepsilon\Gamma$, die mitsamt ihren Bildern $\varphi(U)$ Durchmesser $<\frac{1}{n}$ haben, ist auch noch eine Basis für X, und jede offene Menge U_0 ist als Summe von Mengen $U\varepsilon\Gamma_n$, $\bar{U}\subset U_0$ darstellbar. Hiernach kann man ein System offener Mengen $U_{\xi_1}, U_{\xi_1\xi_2},\ldots$ etwa mit Ordnungszahlen als Indizes bilden, derart dass

$$(8)\qquad \begin{gathered} X=\sum_{\xi_1}U_{\xi_1}, \quad U_{\xi_1\ldots\xi_n}=\sum_{\xi_{n+1}}U_{\xi_1\ldots\xi_n\xi_{n+1}}, \\ U_{\xi_1\ldots\xi_n}\supset\bar{U}_{\xi_1\ldots\xi_n\xi_{n+1}}, \\ U_{\xi_1\ldots\xi_n}\,\varepsilon\,\Gamma_n. \end{gathered}$$

Sodann sei $\varphi(A)=B$, $\varphi(AU_{\xi_1\ldots\xi_n})=BV_{\xi_1\ldots\xi_n}$, wo die Mengen $V_{\xi_1\ldots\xi_n}$ in Y offen sind und wie die $U_{\xi_1\ldots\xi_n}$ und deren Bilder $\varphi(U_{\xi_1\ldots\xi_n})$ Durchmesser $<\frac{1}{n}$ haben; übrigens kann

$$V_{\xi_1\ldots\xi_n}\supset V_{\xi_1\ldots\xi_n\xi_{n+1}}$$

angenommen werden (indem man $V_{\xi_1\ldots\xi_n}$ durch $V_{\xi_1}V_{\xi_1\xi_2}\ldots V_{\xi_1\ldots\xi_n}$ ersetzt).

Es sei

$$G_{\xi_1\ldots\xi_n}=U_{\xi_1\ldots\xi_n}\psi(V_{\xi_1\ldots\xi_n}),$$

also

$$AU_{\xi_1\ldots\xi_n}=AG_{\xi_1\ldots\xi_n}.$$

Wir haben

$$(9)\qquad \begin{aligned} A&=\sum_{\xi_1}AU_{\xi_1}, & AU_{\xi_1\ldots\xi_n}&=\sum_{\xi_{n+1}}AU_{\xi_1\ldots\xi_n\xi_{n+1}}, \\ A&=\sum_{\xi_1}AG_{\xi_1}, & AG_{\xi_1\ldots\xi_n}&=\sum_{\xi_{n+1}}AG_{\xi_1\ldots\xi_n\xi_{n+1}}, \\ B&=\sum_{\xi_1}BV_{\xi_1}, & BV_{\xi_1\ldots\xi_n}&=\sum_{\xi_{n+1}}BV_{\xi_1\ldots\xi_n\xi_{n+1}}. \end{aligned}$$

Die Menge B ist also zu allen Mengen

$$Y-\sum_{\xi_1}V_{\xi_1}, \quad V_{\xi_1\ldots\xi_n}-\sum_{\xi_{n+1}}V_{\xi_1\ldots\xi_n\xi_{n+1}}$$

disjunkt; setzen wir noch

$$W=\sum_{\xi_1}V_{\xi_1}, \quad W_{\xi_1\ldots\xi_n}=\sum_{\xi_{n+1}}V_{\xi_1\ldots\xi_n\xi_{n+1}},$$

so ist B zu

$$(10)\qquad R=(Y-W)+\sum_{\xi_1}(V_{\xi_1}-W_{\xi_1})+\sum_{\xi_1\xi_2}(V_{\xi_1\xi_2}-W_{\xi_1\xi_2})+\cdots$$

disjunkt, und jede zu R disjunkte Menge Q_1 erfüllt die Bedingungen

$$(11)\qquad Q_1=\sum_{\xi_1}Q_1V_{\xi_1}, \quad Q_1V_{\xi_1\ldots\xi_n}=\sum_{\xi_{n+1}}Q_1V_{\xi_1\ldots\xi_n\xi_{n+1}}.$$

Wir wählen eine solche Menge $Q_1\supset B$, also

$$B\subset Q_1\subset Y-R;$$

ihr Urbild sei

$$P_1 = \psi(Q_1) \supset \psi(B) \supset A.$$

Sodann sei

$$P_2 = \sum_{\xi_1} G_{\xi_1} \cdot \sum_{\xi_1 \xi_2} G_{\xi_1 \xi_2} \cdot \sum_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} G_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \cdot \ldots, \tag{12}$$

aus (9) folgt $P_2 \supset A$. Endlich sei

$$P = P_1 P_2, \quad Q = \varphi(P).$$

Wir behaupten

$$\varphi(P G_{\xi_1 \ldots \xi_n}) = Q V_{\xi_1 \ldots \xi_n}. \tag{13}$$

Erstens ist wegen $G_{\xi_1 \ldots \xi_n} \subset \psi(V_{\xi_1 \ldots \xi_n})$

$$\varphi(P G_{\xi_1 \ldots \xi_n}) \subset \varphi(P)\, \varphi(G_{\xi_1 \ldots \xi_n}) \subset Q V_{\xi_1 \ldots \xi_n}.$$

Um zweitens

$$Q V_{\xi_1 \ldots \xi_n} \subset \varphi(P G_{\xi_1 \ldots \xi_n})$$

zu beweisen, nehmen wir $y \varepsilon Q V_{\xi_1 \ldots \xi_n} \subset Q_1 V_{\xi_1 \ldots \xi_n}$ an; wegen (11) giebt es eine mit $\xi_1, \ldots, \xi_n$ beginnende unendliche Indizesfolge ξ_p derart dass $y \varepsilon \prod_p V_{\xi_1 \ldots \xi_p}$ oder, da diese Menge nur einpunktig ist, $y = \prod_p V_{\xi_1 \ldots \xi_p}$. Der Durchschnitt $\prod_p U_{\xi_1 \ldots \xi_p}$ ist wegen (8) und der Vollständigkeit des Raumes X nicht leer und wiederum einpunktig: $x = \prod_p U_{\xi_1 \ldots \xi_p}$. Dann ist $y = \varphi(x)$ das Bild von x; denn sei $x_p \varepsilon A\, U_{\xi_1 \ldots \xi_p}$ (diese Menge ist $\neq 0$, weil A in X dicht ist) und $y_p = \varphi(x_p) \varepsilon B V_{\xi_1 \ldots \xi_p}$, so haben x und x_p, beide zu $U_{\xi_1 \ldots \xi_p}$ gehörig, eine Entfernung $< \frac{1}{p}$, ebenso y und y_p, also $x_p \to x$, $y_p \to y$, andererseits $\varphi(x_p) \to \varphi(x)$, demnach $y = \varphi(x)$. Nun folgt weiter $x \varepsilon \psi(y) = \prod_p \psi(V_{\xi_1 \ldots \xi_p})$, also $x \varepsilon \prod_p G_{\xi_1 \ldots \xi_p} \subset P_2$, sodann, wegen $y \varepsilon Q_1$, $x \varepsilon \psi(Q_1) = P_1$, demnach $x \varepsilon P$ und $x \varepsilon P G_{\xi_1 \ldots \xi_n}$, also $y \varepsilon \varphi(P G_{\xi_1 \ldots \xi_n})$, wie behauptet war.

Die Mengen $P G_{\xi_1 \ldots \xi_n}$ bilden in ihrer Gesamtheit eine Basis für P, denn jeder Punkt von $P \subset P_2$ hat Umgebungen G_{ξ_1}, $G_{\eta_1 \eta_2}$, $G_{\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3}, \ldots$ von beliebig kleinen Durchmessern. Aus (13) folgt also, dass das Bild *jeder* in P offenen Menge in Q offen ist: die Abbildung $y = \varphi(x)$ ist in $P \supset A$ noch eine innere.

Die Menge P_2 ist ein G_δ in X. Die Menge R besteht aus Summanden der Form $V - W =$ Differenz offener Mengen $= F_\sigma$. Wenn nun X *separabel* ist und die Basis Γ also abzählbar gewählt werden kann, so ist R als Summe abzählbar vieler F_σ wieder ein F_σ, und wenn wir $Q_1 = Y - R$ wählen, ist Q_1 ein G_δ (in Y), sein Urbild P_1 ein G_δ in X, P ein G_δ in X. Damit ist III. bewiesen.

Im allgemeinen Fall ist der Charakter von R schwer zu beurteilen. $Y - R$ ist die grösste der Mengen Q_1, die (11) erfüllen; man schliesst daraus, dass

$$Y - R \subset \sum V_{\xi_1} V_{\xi_1 \xi_2} V_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \cdots \subset \sum_{\xi_1} V_{\xi_1} \cdot \sum_{\xi_1 \xi_2} V_{\xi_1 \xi_2} \cdot \sum_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} V_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \cdots$$

wo aber im Allgemeinen keine Gleichheit besteht.

3. Wir sagen, ein Raum erfülle das *verschärfte Dreiecksaxiom*, wenn

$$xz \leqq \max[xy, yz]$$

gilt[1]). Da dann die offenen Kugeln zugleich abgeschlossen sind, ist der Raum nulldimensional; umgekehrt ist jeder separable nulldimensionale Raum einem Raum mit verschärftem Dreiecksaxiom homoeomorph.

Als *Baireschen Raum* bezeichnen wir das Produkt

$$X = (B_1, B_2, B_3, \ldots) \tag{14}$$

einer Folge von Mengen $B_n \neq 0$, d. h. die Menge der Elementfolgen

$$x = (b_1, b_2, b_3, \ldots) \qquad (b_n \varepsilon B_n) \tag{15}$$

mit der folgenden Metrik: für $\xi = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots) \neq x$ ist $x\xi = \frac{1}{n}$, n die erste Differenzstelle zwischen x und ξ ($\beta_1 = b_1, \ldots, \beta_{n-1} = b_{n-1}$, $\beta_n \neq b_n$). Auch jeder Teilraum von X heisst ein Bairescher Raum. Die Baireschen Räume erfüllen das verschärfte Dreiecksaxiom. Der ganze Raum X ist *vollständig*. Wir wollen folgenden Satz beweisen[2]):

[1]) Solche Räume sind z. B. die nichtarchimedisch bewerteten Körper; vgl. A. Ostrowski, Acta math. 41 (1918), S. 271—284.

[2]) Dass B stetiges, sogar schlichtes stetiges Bild eines Raumes A mit verschärftem Dreiecksaxiom ist, ist ganz trivial: man gebe in A je zwei Punkten die Entfernung 1. Erst bei weiterer Einschränkung der Abbildung ergeben sich

IV. *Jeder metrische Raum B ist vermöge einer inneren Abbildung $y=\varphi(x)$ Bild eines Baireschen Raumes A. Diese Abbildung lässt sich zu einer inneren Abbildung eines topologisch vollständigen Baireschen Raumes $P\supset A$ erweitern.*

Als δ-Netz in B $(\delta>0)$ bezeichnen wir eine maximale Teilmenge von B, deren Punkte paarweise Entfernungen $\geqq\delta$ haben; die Existenz einer solchen ist durch Wohlordnung zu beweisen. Zu jedem Punkte $y\,\varepsilon\,B$ giebt es mindestens einen Netzpunkt b mit $by<\delta$, sonst wäre das Netz durch Hinzufügung von y erweiterungsfähig.

Es sei nun $\delta_n\to 0$, B_n ein δ_n-Netz in B; wir bilden den vollständigen Baireschen Raum (14) aller *Netzpunktfolgen* (15). Jede „Koordinate" b_n von x ist stetige Funktion von x, denn für $\xi=(\beta_1,\beta_2,\ldots)$ und $x\xi<\dfrac{1}{n}$ ist $\beta_n=b_n$: sodass, für $\xi\to x$, β_n in trivialer Weise nach b_n konvergiert. Zugleich denken wir uns B in einen vollständigen Raum Y eingebettet und betrachten die Menge R aller Paare (x,y) mit $x=(b_1,b_2,\ldots)\,\varepsilon\,X$, $y\,\varepsilon\,Y$, für welche die sämtlichen Ungleichheiten

$$b_n y<\delta_n \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{16}$$

bestehen; da hierbei $y=\lim b_n$ durch x eindeutig bestimmt ist, können wir

$$y=\varphi(x)$$

schreiben; diese Relation soll also mit (16) und $x=(b_1,b_2,\ldots)$ gleichbedeutend sein. Die Abbildung $y=\varphi(x)$ ist in der ganzen Menge $P\subset X$, wo sie definiert ist[1]), gleichmässig stetig; denn ist $\eta=\varphi(\xi)$, $\xi=(\beta_1,\beta_2,\ldots)$, so ist $b_n y<\delta_n$, $\beta_n\eta<\delta_n$; für $x\xi<\dfrac{1}{n}$ also $b_n=\beta_n$, $y\eta<2\delta_n$. Sei Q_0 eine beliebige Teilmenge von $Q=\varphi(P)$ und $P_0=\psi(Q_0)$ das Urbild von Q_0; wir behaupten, dass die Abbildung

inhaltreichere Behauptungen; hierher gehört der Satz (C. Kuratowski, Topologie I, p. 226), dass ein separabler Raum B aus einem nulldimensionalen A durch eine Homoeomorphie der Klasse 0,1 erhalten werden kann. Wir kommen am Schluss darauf zurück.

[1]) P ist die Projektion von R auf X, $Q=\varphi(P)$ die von R auf Y; Q ist der grösste Teilraum von Y, in dem jedes B_n ein δ_n-Netz bleibt.

$y=\varphi(x)$ in P_0 eine innere ist. Sei $x=(b_1,b_2,\ldots)\,\varepsilon\,P_0$, ferner U_n die offene Kugel mit dem Zentrum x und Radius $\dfrac{1}{n}$, d. h. die Menge aller mit $b_1,\ldots,b_n$ beginnenden Netzpunktfolgen $\xi=(b_1,\ldots,b_n,\beta_{n+1},\ldots)\,\varepsilon\,X$, endlich V_n die in Y offene Menge der Punkte η mit

$$b_k\eta<\delta_k \qquad (k=1,\ldots,n). \tag{17}$$

Dann ist

$$\varphi(P_0U_n)=Q_0V_n.$$

Denn jeder Punkt $\xi=(b_1,\ldots,b_n,\beta_{n+1},\ldots)$ von P_0U_n hat ein Bild $\eta=\varphi(\xi)\,\varepsilon\,Q_0$, das (17) erfüllt, also $\varphi(P_0U_n)\subset Q_0V_n$; andererseits liegen von $\eta\,\varepsilon\,Q_0V_n$ alle Urbilder in P_0, darunter ist wegen (17) mindestens ein mit $b_1,\ldots,b_n$ beginnendes $\xi=(b_1,\ldots b_n,\beta_{n+1},\ldots)\,\varepsilon\,P_0U_n$, also $Q_0V_n\subset\varphi(P_0U_n)$. Da die sämtlichen P_0U_n (für $x\,\varepsilon\,P_0$ und $n=1,2,\ldots$) eine Basis der offenen Mengen für P_0 bilden, ist das Bild jeder in P_0 offenen Menge in Q_0 offen. Da jeder Punkt $y\,\varepsilon\,B$ gewiss zu mindestens einem $x=(b_1,b_2,\ldots)$ in der Beziehung (16) steht, ist $B\subset Q$, und wir haben also eine innere Abbildung von $A=\psi(B)$ auf B. Andererseits ist die Abbildung auch in der ganzen Menge $P=\psi(Q)$ eine innere; zum Beweise von IV bleibt zu zeigen, dass P topologisch vollständig ist.

Wegen der gleichmässigen Stetigkeit von $y=\varphi(x)$ in P entspricht jeder Fundamentalfolge (Cauchyschen Folge) $x_n\,\epsilon\,P$ eine Fundamentalfolge $y_n=\varphi(x_n)\,\epsilon\,Q$ und die Abbildung lässt sich also unter Erhaltung der Eindeutigkeit und Stetigkeit auf $X_0=\overline{P}$ ausdehnen; diese erweiterte Abbildung heisse $y=f(x)$. Das Bild $Y_0=f(X_0)$ ist in $\overline{Q}$ enthalten, der abgeschlossenen Hülle von Q im vollständigen Raume Y. Nun ist offenbar P die Menge der Punkte $x=(b_1,b_2,\ldots)$ von X_0, für die $y=f(x)$ alle Ungleichungen (16) erfüllt[1]) (P war ja die Menge aller x, zu denen es ein y mit (16) gibt); jede einzelne Ungleichung $b_ny<\delta_n$ definiert, da b_n, y und b_ny stetige Funktionen von x sind, eine in X_0 offene Menge G_n, und $P=G_1G_2\ldots$ ist ein G_δ im vollständigen Raum X_0. Damit ist IV bewiesen.

[1]) Für $y=f(x)$, $x\,\epsilon\,X_0$ gilt, wie man leicht erkennt, $b_ny\leqq\delta_n$ $(n=1,2,\ldots)$, aber für $x\,\epsilon\,X_0-P$ treten gewiss Gleichheitszeichen auf.

Auch $Q=\varphi(P)$ ist topologisch vollständig (vgl. den Satz I), wie man sehr einfach einsieht: Q ist die Menge aller $y \in Y$, zu denen es ein $x=(b_1, b_2, \ldots) \in X$ mit (16) giebt; die Menge H_n aller y, zu denen es ein $b_n \in B_n$ mit $b_n y < \delta_n$ giebt, d. h. die über $b_n \in B_n$ erstreckte Summe aller offenen Kugeln mit Zentren b_n und Radien δ_n, ist in Y offen und $Q=H_1 H_2 \ldots$ ist ein G_δ im vollständigen Raum Y. Übrigens ist $Q \subset Y_0$ ein G_δ in Y_0 und das Urbild von Q bei der erweiterten Abbildung $y=f(x)$ ist also ein G_δ in X_0, aber dieses Urbild kann $\supset P$ sein (sodass der obige Beweis für den G_δ-Charakter von P nicht überflüssig ist).

Ist B vollständig, so kann man $Y=B$ setzen; $B=Q=\varphi(P)$ ist also inneres Bild eines topologisch vollständigen Baireschen Raumes.

Gilt in B das verschärfte Dreieckaxiom, so ist Q *schlichtes* inneres, also homoeomorphes Bild von P. Denn es kann für jedes n nur ein einziges $b_n \in B_n$ mit $b_n y < \delta_n$ geben, weil aus $b_n y < \delta_n$, $\beta_n y < \delta_n$ zugleich $b_n \beta_n < \delta_n$ und $b_n = \beta_n$ folgt (für $b_n \neq \beta_n$ wäre $b_n \beta_n \geqq \delta_n$). Ein Raum B mit verschärftem Dreiecksaxiom ist also mit einem Baireschen Raum A homöomorph.

Mit Hülfe der Netze kann man auch den in der Anmerkung S. 288 genannten Satz leicht beweisen:

Jeder separable Raum B entsteht aus einem Baireschen Raum A durch eine schlichte stetige Abbildung $y=\varphi(x)$, bei der jede in A offene Menge als Bild ein F_σ in B hat.

Wir denken uns ein δ-Netz in B wohlgeordnet

$$\{b^0, b^1, \ldots, b^\alpha, \ldots\}$$

und ordnen jedem $y \in B$ den ersten Netzpunkt $b(y)=b^\alpha$ zu, für den $b^\alpha y < \delta$. Die Menge der y mit konstantem $b(y)=b^\alpha$ ist durch

$$b^\alpha y < \delta, \quad b^\xi y \geqq \delta \qquad (\xi < \alpha)$$

definiert, also Differenz offener Mengen (in B).

Ist wieder eine Folge von δ_n-Netzen B_n gewählt, so wird jedem $y \in B$ nun eine einzige Netzpunktfolge

$$x=(b_1(y), b_2(y), \ldots)=\chi(y)$$

zugeordnet; die Menge dieser x sei A_0 (eine Teilmenge der früheren

$A=\psi(B)$). In A_0 ist die zuvor betrachtete stetige Abbildung $y=\varphi(x)$ schlicht. Das Bild einer offenen Kugel mit Zentrum x und Radius $\frac{1}{n}$ besteht aus allen η mit

$$b_k(\eta)=b_k(y) \qquad (k=1, \ldots, n),$$

es ist immer noch Differenz offener Mengen. Ist nun B separabel, so ist jedes Netz B_n höchstens abzählbar, der ganze Bairesche Raum $X=(B_1, B_2, \ldots)$ separabel, A_0 separabel; das Bild einer in A_0 offenen Menge lässt sich aus abzählbar vielen Differenzen offener Mengen zusammensetzen und ist ein F_σ.