En observant que $t_\beta = \varphi(t_{\beta-1})$, on a d'après les propriétés $a)$ et $b)$ de la fonction $\varphi(t)$:

$$t_\beta < 1,\ 0 < t_\beta - t < t_\beta - t_{\beta-1} < \operatorname{Min}\left(\frac{1}{n}, \frac{r}{8n}\right),$$

$$\frac{g(t_\beta) - g(t)}{t_\beta - t} > \frac{1}{t_\beta - t}\left(-\frac{r}{8} + f(t_\beta) - f(t) + h(t_\beta) - h(t)\right)$$

$$> \frac{8n}{r}\left(-\frac{r}{8} - \frac{r}{4} + \frac{r}{2}\right) = n;$$

d'après la définition de $E_n(g)$ (voir (3)) on voit que $t \in [0,1] - E_n(g)$; on a donc $E_n(g) \subset E$. L'ensemble $E_n(g)$ est donc dénombrable, c'est-à-dire $g \in A_n$. On a donc $K' \subset K \cdot A_n$, c. q. f. d.

Sur les nombres dérivés.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

Cette note contient la solution d'un problème posé par M. Jarnik [1]).

Il existe pour $0 \leqq x < 1$ *une foncton* $f(x)$ *continue à droite* (*donc de classe* 1) *et telle que l'on a partout* $\overline{f}^+(x) = +\infty$ [2]).

Déterminons le système de points $\{c_{n_1\ldots n_k}^{j_1\ldots j_k}\}$, $k = 1, 2\ldots$, $n_l = 1, 2\ldots$, $j_l = 1\ldots 2^{l(l-1)}$ de manière suivante:

$$c_{n_1}^1 = 1 - \frac{1}{2^{n_1-1}} \tag{1}$$

$$c_{n_1\ldots n_k, n_{k+1}}^{j_1\ldots j_k, j_{k+1}} = c_{n_1\ldots n_k}^{j_1\ldots j_k} + \left(1 - \frac{1}{2^{n_{k+1}-1}}\right)\frac{1}{2^{n_1+\ldots+n_k+k(k-1)}} + \frac{j_{k+1}-1}{2^{n_1+\ldots+n_{k+1}+k(k+1)}}. \tag{2}$$

Evidemment $c_{n_1\ldots n_k}^{j_1\ldots j_k} < c_{n'_1\ldots n'_k}^{j'_1\ldots j'_k}$ si le premier nombre non nul de la suite: $n'_1 - n_1$, $j'_1 - j_1, \ldots$ $n'_k - n_k$, $j'_k - j_k$ est positif. Pour un k fixe les points $c_{n_1\ldots n_k}^{j_1\ldots j_k}$ rangés d'après leur grandeur forment un ensemble bien ordonné; en désignant le suivant immédiat de $c_{n_1\ldots n_k}^{j_1\ldots j_k}$ par $\varphi(c_{n_1\ldots n_k}^{j_1\ldots j_k})$, on a:

$$\varphi(c_{n_1\ldots n_k}^{j_1\ldots j_k}) = c_{n_1\ldots n_k}^{j_1\ldots j_k+1} \quad \text{si} \quad j_k < 2^{k(k-1)} \tag{3}$$

$$\varphi(c_{n_1\ldots n_k}^{j_1\ldots j_k}) = c_{n_1\ldots n_k+1}^{j_1\ldots j_{k-1}, 1} \quad \text{si} \quad j_k = 2^{k(k-1)} \tag{4}$$

$$\varphi(c_{n_1\ldots n_k}^{j_1\ldots j_k}) - c_{n_1\ldots n_k}^{j_1\ldots j_k} = \frac{1}{2^{n_1+n_2+\ldots+n_k+k(k-1)}} \tag{5}$$

$$c_{n_1\ldots n_k}^{j_1\ldots j_k} \leqq c_{n_1\ldots n_k, n_{k+1}}^{j_1\ldots j_k, j_{k+1}} < \varphi(c_{n_1\ldots n_k, n_{k+1}}^{j_1\ldots j_k, j_{k+1}}) < \varphi(c_{n_1\ldots n_k}^{j_1\ldots j_k}). \tag{6}$$

[1]) Comp. ce volume p. 1.

[2]) $\overline{f}+(x)$ désigne le nombre dérivé supérieur, droit de $f(x)$

Posons

$$f_k(x) = 2^{2k-2}(x - c^{j_1 \dots j_k}_{n_1 \dots n_k}) \quad \text{pour} \quad c^{j_1 \dots j_k}_{n_1 \dots n_k} \leqq x < \varphi(c^{j_1 \dots j_k}_{n_1 \dots n_k}) \tag{7}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad \text{pour} \quad 0 \leqq x < 1. \tag{8}$$

Pour $0 \leqq x < 1$ $f_k(x)$ est continue à droite et il en est de même pour $f(x)$, la série (8) étant uniformément convergente d'après l'inégalité:

$$0 \leqq f^k(x) \leqq \frac{1}{2^{n_1+n_2+\dots+n_k+(k-1)(k-2)}} \leqq \frac{1}{2^{k(k-1)+1}}. \tag{9}$$

Posons: $\psi_k(x) = \sum\limits_{l=k+1}^{\infty} f_l(x)$. Considérons un point x' tel que $0 \leqq x' < 1$. Il existe deux suites: $\{p_k\}$, $\{q_k\}$ telles que:

$$c^{q_1 \dots q_k}_{p_1 \dots p_k} \leqq x' < \varphi(c^{q_1 \dots q_k}_{p_1 \dots p_k}) \quad k = 1, 2, \dots \tag{10}$$

Soit: $x'_k = c^{q_1 \dots q_k, 1}_{p_1 \dots p_{k+1}+2}$; on aura les inégalités:

$$x'_k - x' \geqq c^{q_1 \dots q_k, 1}_{p_1 \dots p_{k+1}+2} - c^{q_1 \dots q_k, 1}_{p_1 \dots p_{k+1}+1} = \frac{1}{2^{p_1+\dots+p_{k+1}+k(k-1)+1}} \tag{11}$$

$$x'_k - x' \leqq c^{q_1 \dots q_k, 1}_{p_1 \dots p_{k+1}+2} - c^{q_1 \dots q_k, 1}_{p_1 \dots p_{k+1}} = \frac{3}{2^{p_1+\dots+p_{k+1}+k(k-1)+1}} \tag{12}$$

Donc $\lim\limits_{k \to \infty} x'_k = x'$. D'après (6), (7) pour $i \leqq k$, $f_i(x)$ est linéaire et croissante dans l'intervalle $x' \leqq x \leqq x'_k$. Donc, en tenant compte de (9), (11) on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{f(x'_k) - f(x')}{x'_k - x'} &\geqq \frac{f_k(x'_k) - f_k(x')}{x'_k - x'} - \left| \frac{\psi_k(x'_k) - \psi_k(x')}{x'_k - x'} \right| \geqq \\ &\geqq 2^{2k-2} - \frac{2}{\dfrac{1}{2^{p_1+\dots+p_{k+1}+k(k-1)+1}}} \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{p_1+\dots+p_l+(l-1)(l-2)}} \geqq \\ &\geqq 2^{2k-2} - 4 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^l} = 2^{2k-2} - 8. \end{aligned} \tag{13}$$

Donc:

$$\bar{f}^{+}(x) \geqq \lim_{k \to \infty} \frac{f(x_k) - f(x')}{x'_k - x'} = +\infty \quad \text{c. q. f. d.} \tag{14}$$

Varsovie, 21/II 1934

Ein Zerlegungssatz.

Von

Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

Sei R ein metrischer, kompakter Raum, 2^R der Raum der abgeschlossenen Teilmengen von R. Wir bezeichnen mit ϱ, δ — Entfernung und Durchmesser in R, mit ϱ_1, δ_1, — in 2^R.

Satz. *Es existiert eine abgeschlossene, nulldimensionale Menge* $\mathfrak{A} \subset 2^R$ *derart dass:* 1) *jedes* $U \in \mathfrak{A}$ *ist abzählbar*; 2) $\sum\limits_{U \in \mathfrak{A}} U = R$.

Sind $V, W \in 2^R$, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{Z}(V, W)$ die Menge aller Mengen $Z + W$, wo $Z \in 2^V$. Offenbar ist $\mathfrak{Z}(V, W)$ eine abgeschlossene Teilmenge von 2^R, und es besteht die Ungleichung:

$$\delta_1(\mathfrak{Z}(V, W)) \leqq \delta(V). \tag{1}$$

Hilfssatz. Sei $A \subset R$ perfekt; $A = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i$; $A_i \in 2^A$; $\delta(A_i) < \delta(A)$; $D \subset A$ eine endliche Menge. Es existieren n endliche Mengen $B_i \subset A$, $i = 1, 2 \dots n$, derart dass für $i \neq j$:

$$\mathfrak{Z}(A_i, B_i + D) \cdot \mathfrak{Z}(A_j, B_j + D) = 0 \tag{2}$$

Wir bestimmen $2n$ verschiedene Punkte $b_i, c_i \in A - D$, $i = 1, 2 \dots n$ derart dass $\varrho(b_i, c_i) > \mathrm{Max} \cdot \delta(A_k)$, was offenbar möglich ist. Das Punktepaar (b_i, c_i) bezeichnen wir mit B_i. Sei $j \neq i$. Wegen $B_i(B_j + D) = 0$ und $\delta(B_i) = \varrho(b_i, c_i) > \delta(A_j)$ ist B_i in $A_j + B_j + D$ nicht enthalten. Also ist B_i in keiner Menge aus $\mathfrak{Z}(A_j, B_j + D)$ enthalten. Da andrerseits jede Menge aus $\mathfrak{Z}(A_i, B_i + D)$. Die Menge B_i enthält, so hat man (2) und der Hilfssatz ist bewiesen.

Sei P der in sich dichte Kern von R (wäre R nulldimensional und à fortiori zerstreut, so wäre der Satz trivial).