Un théorème topologique équivalent à l'hypothèse du continu.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

M. W. Hurewicz a donné un théorème topologique équivalent à l'hypothèse du continu [1]). Dans cet ordre d'idées je démontrerai ici que l'hypothèse du continu, **H** ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$) équivaut à la proposition **P** suivante:

***Proposition* P:** *Il existe une famille indénombrable F d'ensembles plans dénombrables, telle que la somme de toute infinité indénombrable d'entre eux est un ensemble qui n'est homéomorphe à aucun ensemble linéaire.*

Démonstration.

I. $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{P}$.

Admettons l'hypothèse **H**. Il en résulte que la famille de tous les ensembles plans parfaits est de puissance $\aleph_1$ et il existe une suite transfinie du type Ω,

$$P_1,\ P_2,\ P_3, \ldots,\ P_\omega,\ P_{\omega+1}, \ldots,\ P_\xi, \ldots, \qquad (\xi < \Omega)$$

formée de tous ces ensembles.

Pour tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$ il existe évidemment un ensemble dénombrable plan E_α qui a au moins un point commun avec chacun des ensembles P_ξ, où $\xi < \alpha$ (puisque la famille de tels ensembles P_ξ est, d'après $\alpha < \Omega$, au plus dénombrable). Je dis que la famille F de tous les ensembles E_α, où $\alpha < \Omega$, satisfait aux conditions de la proposition **P**.

[1]) *Fund. Math.* t. XIX, p. 8. Cf. *Proc. Acad. Amsterdam* 31 (1928), p. 920. Voir aussi mon livre *Hypothèse du continu* (Monografje Matematyczne t. IV) Warszawa 1934, p. 32.

Soit, en effet, S une somme d'une infinité indénombrable d'ensembles de la famille F. Il existe donc pour tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$ un terme E_ξ de la somme S, tel que $\xi > \alpha$, ce qui donne (vu la définition de l'ensemble E_ξ) $E_\xi P_\alpha \neq 0$ et, à plus forte raison, $SP_\alpha \neq 0$. L'ensemble S a donc (au moins) un point commun avec tout ensemble parfait plan. Or, comme on voit sans peine, un tel ensemble ne peut pas être homéomorphe à un ensemble linéaire.

En effet, soit H un ensemble plan qui est homéomorphe à un ensemble linéaire E. D'après le théorème de M. Lavrentieff [1]), l'homéomorphie entre E et H peut être étendue aux ensembles G_δ, E^* et H^*, contenant respectivement E et H, et comme on voit sans peine, nous pouvons supposer que l'ensemble E^* est linéaire. L'ensemble H^* est donc un G_δ plan qui est homéomorphe d'un ensemble linéaire. Soit CH^* le complémentaire de H^* par rapport au plan: c'est donc un F_σ. On voit sans peine que l'ensemble CH^* est indénombrable.

En effet, si CH^* était au plus dénombrable, il existerait deux nombres réels a et b, tels que si $(x, y) \in CH^*$, on a $x \neq a$ et $y \neq b$. Les droites $x = a$ et $y = b$ seraient donc contenues dans H^* et l'ensemble formé de ces deux droites serait homéomorphe d'un ensemble linéaire.

Or, comme on sait, un ensemble-somme de deux droites perpendiculaires n'est pas homéomorphe d'un ensemble linéaire [2]).

L'ensemble CH^* est ainsi indénombrable, donc, en tant qu'un F_σ, contient un sous-ensemble parfait P. On a donc $PH^* = 0$ et, d'après $H \subset H^*$, à plus forte raison $PH = 0$.

Donc, si H est un ensemble plan homéomorphe d'un ensemble linéaire, il existe un ensemble parfait (plan) P disjoint avec H. Vu la propriété de l'ensemble S, nous concluons donc que S n'est pas homéomorphe d'un ensemble linéaire.

La famille F satisfait donc aux conditions de la proposition **P** et l'implication $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{P}$ est démontrée.

II. $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{H}$.

Admettons que la proposition **P** est vraie et soit F une famille d'ensembles satisfaisant aux conditions de la proposition **P**. Soit S

[1]) *Fund. Math.* t. VI, p. 149.

[2]) Cf. p. e. mon livre *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris 1928, p. 73.

une somme de $\aleph_1$ ensembles de la famille F: nous aurons évidemment $\overline{\overline{S}} \leqslant \aleph_1$. Donc, d'après la proposition **P**, l'ensemble S n'est homéomorphe à aucun ensemble linéaire. Or, il en résulte que $\overline{\overline{S}} = 2^{\aleph_0}$, puisque, comme on sait, tout ensemble plan de puissance $< 2^{\aleph_0}$ est homéomorphe d'un ensemble linéaire [1]).

Les formules $\overline{\overline{S}} \leqslant \aleph_1$ et $\overline{\overline{S}} = 2^{\aleph_0}$ donnent $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

L'implication **P** $\rightarrow$ **H** est ainsi établie.

L'équivalence des propositions **P** et **H** est ainsi démontrée.

[1]) C'est p. e. une conséquence facile du théorème que j'ai démontré dans *Fund. Math.* t. II, p. 89.

On the Theory of Trigonometric Series VII.

By

S. Verblunsky (Manchester).

I. Introduction.

§ 1. In §§ 2—4 of this paper, we give an extension of the general Denjoy integral (or total), and we define a class of functions which bear the same relation to the new process of integration as the resoluble functions of Denjoy bear to the process of totalisation. We call the new integral, the approximate Denjoy integral, (AD integral). The reason for introducing this integral lies in its applications to the theory of trigonometric series. If

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \sum_{1}^{n} c_m e^{im\theta} \right| < \infty \tag{I}$$

for all θ, then, we show, there is a function $h(\theta)$, such that

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta, \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{II}$$

where the integrals in (II) are AD integrals (Theor. V). If, in addition to (I), the series

$$\sum_{1}^{\infty} c_n e^{in\theta} \tag{III}$$

is summable p. p. (presque partout) by Poisson's method to $H(\theta)$, then $h(\theta) = H(\theta)$ p. p. (Theor. VI). This last result is difficult to prove, but we have been able to establish it by using some theorems and methods of Khintchine [1]).

[1]) Khintchine, Fund. Math. IX (1927) 212—279.