Sur quelques invariants des transformations continues.

Par

Z. Waraszkiewicz (Varsovie).

I. Introduction. En analysant de plus près la famille de courbes que j'ai construites pour donner la solution d'un problème de M. H. Hahn[1]), j'ai été amené à consider plusieurs propriétés de ces courbes qui se transportent sur celles de leurs *images* (continues) qui sont en même temps leurs *modèles* (des transformations continues). J'appelle ici ces propriétés *invariants de continuité réciproque.* L'ainsi dit *type de continuité*[2]) en constitué un exemple trivial.

Or, les invariants en question donnent lieu à quelques théorèmes qui permettent de les caractériser et les manier à l'aide des suites d'entiers positifs.

On obtient, à titre d'applications, des exemples de familles formées de courbes dites *spirales* à structure topologique particulièrement simple[3]) et qui présentent, respectivement, les propriétés suivantes:

1°. Famille $\mathcal{S}$ de puissance $2^{\aleph_0}$ de courbes irréductibles entre deux points à type de continuité incomparable deux à deux et sans modèle commun.

2°. Famille $\mathcal{S}'$ de puissance $2^{\aleph_0}$ de courbes réductibles, mais „arcwise connected“[4]), les autres propriétés restant les mêmes.

[1]) Z. Waraszkiewicz, *Sur un problème de M. H. Hahn*, Fund. Math. XXII, p. 180—205. J'en emprunte ici la terminologie et les notations.

[2]) Cf. Sierpiński, Fund. Math. XIV, p. 235.

[3]) surtout en comparaison avec celle des exemples antérieurs (cf. Z. Waraszkiewicz, Fund. Math. XVIII, p. 118—137 et N. Aronszajn, Fund. Math. XIX, p. 119—142).

[4]) au sens de M. G. T. Whyburn

3°. Suite (dénombrable) $\mathcal{F}_1$ de courbes dont les types de continuité décroissent.

4°. Suite (dénombrable) $\mathcal{F}_2$ de courbes à type de continuité incomparable deux à deux et qui sont des images continues d'une seule spirale.

En outre, l'incomparabilité et l'irréductibilité des courbes de la famille $\mathcal{S}$ permet de construire d'une façon *effective* $2^{2^{\aleph_0}}$ types incomparables de continuité.

Dans la suite, je vais désigner par Γ la famille de toutes les spirales S_α[5]) où $\alpha=\{a_n\}$ est une suite d'entiers positifs et par S_∞ la courbe $\Sigma^+ + C$[6]). Les numéros II et III contiennent des propriétés auxiliaires qui complètent celles établiés dans ma note précitée, consacrée au problème de M. H. Hahn.

II. Suites d'entiers positifs. Je vais faire correspondre d'une façon univoque à chaque suite d'entiers positifs α une autre suite $\bar{\alpha}$, non décroissante et qui sera dite sa *base*.

Soit à ce but $\alpha=\{a_i\}$ une suite (d'entiers positifs) donnée. Si la suite α est croissante, je pose $\bar{\alpha}\equiv\alpha$. Si elle n'est pas croissante, il existe des entiers positifs $i>1$ vérifiant l'inégalité $a_i\leqslant\min(a_{i-1}, a_{i+1})$. Posons alors $a_1'=a_1$, si $a_2>\min(a_1, a_3)$ et $a_1'=a_1-a_2+a_3$, si $a_2\leqslant\min(a_1, a_3)$. Les nombres $a_1', a_2', \dots, a_{n-1}'$ étant définis, désignons par $i(n)$ le nombre des indices $s\leqslant n-1$ pour lesquels a_s' est une somme alternée des éléments a_i et posons

$$a_n'=\begin{cases} a_{2i(n)+n}, & si\quad \min(a_{2i(n)+n}, a_{2i(n)+n+2})<a_{2i(n)+n+1} \\ a_{2i(n)+n}-a_{2i(n)+n+1}+a_{2i(n)+n+2}, & si\ a_{2i(n)+n+1}\leqslant\min(a_{2i(n)+n}, a_{2i(n)+n+2}).\end{cases}$$

La suite $r_1(\alpha)=\{a_i'\}$ est ainsi définie par induction. Soit enfin

$$r_n(\alpha)=r_1(r_{n-1}(\alpha))\quad pour\quad n=2, 3, \dots$$

La suite $r_n(\alpha)=\{a_k^{(n)}\}$ est donc par définition de la forme

$$a_k^{(n)}=\sum_{s=i_k^{(n)}}^{i_{k+1}^{(n)}-1}(-1)^{s-1}a_s, \tag{I}$$

où $i_{k+1}^{(n)}\leqslant i_k^{(n)}+3^n$, $i_k^{(n)}\leqslant i_k^{(n+1)}$ pour $k=1, 2, \dots$ et $n=1, 2, \dots$

[5]) voir non ouvrage précité p 188.

[6]) Ibid. p. 187, **4**, (2).

La formule (I) donne ainsi une *décomposition de réduction* [7]) de la suite α, de sorte que cette suite est pour tout $n = 1, 2, \dots$ un *modèle de réduction* [7]) de $r_n(\alpha)$. Or, deux cas peuvent se présenter:

1⁰. $\lim\limits_{n=\infty} i_k^{(n)} = i_k < +\infty$ pour $k = 1, 2, \dots$ Dans ce cas la suite $\{\bar{a}_k\}$, où $\bar{a}_k = \sum\limits_{s=i_k}^{i_{k+1}-1} (-1)^{s-1} a_s$, est évidemment une suite réduite de α; en même temps elle est une suite croissante.

En effet, en vertu de 1⁰ il existe pour tout k un indice n_k tel que $i_s^{(n)} = i_s$ pour $s = 1, 2, \dots, k+1$ et $n \geqslant n_k$. En vertu de la définition de $r_n(\alpha)$ on a donc les inégalités $\min(a_s^{(n)}, a_{s+2}^{(n)}) < a_{s+1}^{(n)}$ pour $n \geqslant n_k$ et $s \leqslant k$, d'où $\min(\bar{a}_s, \bar{a}_{s+2}) < \bar{a}_{s+1}$; cette inégalité se présentant pour tout $s \leqslant k+1$ et k étant arbitraire, on obtient $\bar{a}_k < \bar{a}_{k+1}$ pour $k = 1, 2, \dots$

Je pose dans le cas considéré: $\bar{\alpha} = \{\bar{a}_k\}$.

2⁰. On a $\lim\limits_{n=\infty} i_k^{(n)} = +\infty$ pour k suffisamment grands. Deux alternatives sont encore à considérer: il existe un n tel que tous les éléments $a_k^{(n)}$ de la suite $r_n(\alpha)$ sont égaux deux à deux pour k suffisamment grand; nous écrirons alors $\bar{\alpha} = \{a_k^{(n)}\}$ et enfin, dans le cas où un tel n n'existe pas, nous entenderons par *base* $\bar{\alpha}$ de α la suite $+\infty, +\infty, +\infty, \dots$

Voici quelques propriétés de la *base* ainsi définie:

1. *La base est une suite réduite qui n'est pas réductible davantage.* En d'autres termes, $\bar{\bar{\alpha}}$ coïncide avec $\bar{\alpha}$. En particulier, toute suite croissante coïncide avec la base. De plus, à l'univocité de cette opération est liée la propriété suivante:

2. *Si ν est une suite réduite de la suite μ, on a $\bar{\nu} = \bar{\mu}$.*

La démonstration de cette propriété coïncide, à modifications faciles près, avec celle du lemme du N⁰ 5 de ma note cité de Fund. Math. XXII, p. 180—205.

3. *$\bar{\alpha} = \{\bar{a}_i\}$ étant la base d'une suite d'entiers positifs $\alpha = \{a_i\}$ et $\bar{\alpha}^{(k)} = \{\bar{a}_i^{(k)}\}$ celle de la suite $\alpha^{(k)} = \{a_{i+k}\}$, il existe pour tout $k = 1, 2, \dots$ deux indices m_k et n_k tels que l'on a*

$$\bar{a}_{i+m_k} = \bar{a}_{i+n_k}^{(k)}$$

pour tout $i = 1, 2, \dots$

[7]) Ibid. p. 189, **5.**
[8]) Ibid. p. 189, **5.**

4. *$\{\bar{a}_i\}$ étant la base de $\{a_i\}$ et g et h deux entiers non négatifs, la base de la suite $\{g a_i + h\}$ est la suite $\{g \bar{a}_i + h\}$.*

5. *Etant donnée une suite $\lambda = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ d'entiers positifs n'étant pas modèle de réduction d'aucune suite composée d'un seul élément, il existe parmi les suites réduites de λ une suite $\lambda' = (l'_1, l'_2, \dots, l'_p)$ telle que l'on a pour un indice $k \leqslant p$*

$$l'_1 \leqslant l'_2 \leqslant \dots \leqslant l'_{k-1} \leqslant l'_k \geqslant l'_{k+1} \geqslant \dots \geqslant l'_{p-1} \geqslant l'_p. \tag{II}$$

Pour démontrer cette proposition, il suffit d'observer que la condition nécessaire et suffisante pour que l'inégalité $l'_r \leqslant \min(l'_{r-1}, l'_{r+1})$ ne se présente pour aucun indice r est que l'on ait les inégalités (II) pour un $k \leqslant p$.

Définition. Deux suites (d'entiers positifs) α et β sont dites *incomparables*, lorsque leurs bases $\{\bar{a}_i\}$ et $\{\bar{b}_j\}$ sont croissantes et qu'il existe pour tout i et j naturels un k satisfaisant à la condition

$$\frac{\bar{a}_{i+k+2} - \bar{a}_{i+k+1}}{\bar{a}_{i+k+1} - \bar{a}_{i+k}} \neq \frac{\bar{b}_{j+k+2} - \bar{b}_{j+k+1}}{\bar{b}_{j+k+1} - \bar{b}_{j+k}}.$$

III. Transformations des spirales en spirales. Nous allons démontrer quelques propositions auxilaires concernant les transformations des spirales en spirales.

1. *Si $\mu = \{m_i\}$ est un modèle de réduction de $\mu = \{n_i\}$, il existe une fonction continue $f_{\mu,\nu}$ définie sur S_μ et telle que $f_{\mu,\nu}(S_\mu) = S_\nu$. Si la base de μ est la suite $\{+\infty\}$, il existe une fonction continue $f_{\mu,\infty}$ définie sur S_μ et telle que $f_{\mu,\infty}(S_\mu) = S_\infty$.*

En effet, soit $m_{i_k}, \dots, m_{i_{k+1}-1}$ (où $k = 1, 2, \dots$) la décomposition de réduction de μ relative à ν; posons $k(1) = 1$ et soit pour tout $p = 1, 2, \dots$ $k(p)$ le plus grand indice tel que $i_{k(p)} \leqslant p$.

Désignons pour tout $x \in S_\mu^{(p)} = \overline{q_{\omega_\mu(p-1)}\, q_{\omega_\mu(p)}}$ [9]) par $f_{\mu,\nu}(x)$ le point y de l'arc $\overline{q_{\omega_\nu[k(p)-1]}\, q_{\omega_\nu[k(p)]}}$ qui vérifie l'équation

$$\frac{1}{2\pi} L(\overline{q_{\omega_\nu[k(p)-1]}\, y}) = m_{i_{k(p)}} - m_{i_{k(p)}+1} + \dots + (-1)^{p-i_{k(p)}-1} m_{p-1} + \\ + (-1)^{p-i_{k(p)}} \frac{1}{2\pi} L[\overline{q_{\omega_\mu(p-1)}\, x}], \quad si \quad i_{k(p)} < p,$$

[9]) Ibid., p. 188, formules (10) et (11).

ou bien l'équation

$$\frac{1}{2\pi} L(\overline{q_{\omega_\nu[k(p)-1]}\, y}) = \frac{1}{2\pi} L(\overline{q_{\omega_\nu(p-1)}\, x}), \quad \text{si} \quad i_{k(p)} = p$$

et posons pour tout point $x \in S_\mu - \sum_{p=1}^{\infty} S_\mu^{(p)} = C$

$$f_{\mu,\nu}(x) = \lim_{x_k \to x} f_{\mu,\nu}(x_k) \quad \textit{où} \quad x_k \in S_\mu^{(k)}.$$

Ainsi définie, la fonction $f_{\mu,\nu}(x)$ est manifestement continue et transforme S_μ en S_ν.

Enfin, si $\overline{\mu} = \{+\infty\}$, il suffit de désigner pour tout point $x \in S_\mu^{(p)}$ et $p = 1, 2, \ldots$ par $f_{\mu,\infty}(x)$ le point y de $S_\infty - C = \Sigma^+$ tel que

$$L(\overline{q_0\, y}) = \sum_{s=1}^{p-1} (-1)^{s-1} m_s + (-1)^p L(\overline{q_{\omega_\mu(p-1)}\, x})$$

et de poser pour tout point $x \in S_\infty - \Sigma^+ = C$

$$f_{\mu,\infty}(x) = \lim_{x_k \to x} f_{\mu,\infty}(x_k) \quad \textit{où} \quad x_k \in \Sigma^+.$$

Comme conséquence immédiate de la définition de $f_{\mu,\nu}$ (et de $f_{\mu,\infty}$), on obtient la proposition:

2. *Etant donnée une chaîne alternative $q_0 = c_1, c_2, \ldots, c_t$ sur un arc $\overline{q_0\, q}$ de S_μ* [10]*, la suite $f_{\mu,\nu}(c_1), f_{\mu,\nu}(c_2), \ldots, f_{\mu,\nu}(c_t)$ en est une sur un arc $\overline{q_0\, q'}$ de S_ν; en outre si $\overline{\mu} = \{+\infty\}$, la suite $f_{\mu,\infty}(c_1), \ldots, f_{\mu,\infty}(c_t)$ est une chaîne alternative sur un arc $\overline{q_0\, q''}$ de S_∞.*

3. *Etant donnée une chaîne alternative $\{c_i\}$ d'ordre t sur un arc $\overline{q_0\, q_p}$ d'une spirale S_μ où $\mu = \{m_i\}$ est une suite non décroissante avec $m_1 \leqslant p$, il existe un entier positif $t_0 \leqslant t$ tel que la suite $\left\{\frac{1}{2\pi} L(\overline{c_i\, c_{i+1}})\right\}$, où $i = 1, 2, \ldots, t_0$, est un modèle de réduction de la suite*

$$m_1, m_2, \ldots, m_r,$$

où r désigne le plus grand entier pour lequel $\omega_\mu(r) \leqslant p$.

La proposition **6** (7), Fund. Math. XXII, p. 197 en est un cas particulier où $\mu = \{E(10^i \cdot x)\}$. Or, sa démonstration embrasse le cas général.

[10]) Ibid., p. 194, Définitions.

4. *Etant donnée une fonction continue $f(x)$ sur une spirale S_α où $\alpha = \{a_i\}$, la condition*

(I) $$f(S_\alpha) = S_\beta \subset \Gamma$$

entraîne

1° $f^{-1}(C) = C$;

si, en outre, $\overline{\alpha} \neq \{+\infty\}$, la condition (I) *entraîne les deux suivantes:*

2° $f(\lim_{i=\infty} q_i) = \lim_{i=\infty} q_i$,

3° *il existe quatre entiers non négatifs j, k, m et h et une suite $\delta' = \{d_i'\}$ d'entiers positifs, tels que $\{\overline{b_{j+i}}\} = \{\overline{d'_{k+i}}\}$ (où $\{\overline{b_i}\}$ désigne la base de β) et que $\{d'_{m+i}\}$ est un modèle de réduction de la suite $\{g\, a_i + h\}$ où g coïncide avec la valeur absolue du grade brouwerten* [11]) *de la transformation $f(x|C)$* [12]) *de la circonférence C en elle-même.*

Démonstration: Ad 1°. On a

(II) $$f^{-1}(C)(S_\alpha - C) = 0 \quad \textit{ou bien} \quad f^{-1}(S_\beta - C)(S_\alpha - C) = 0,$$

car si l'on avait $f^{-1}(C)(S_\alpha - C) \neq 0 \neq f^{-1}(S_\beta - C)(S_\alpha - C)$, la courbe S_β serait „arcwise connected", puisque $S_\alpha - C$ l'est et par suite $f(S_\alpha - C)$ l'est aussi. Cependant S_β est par définition *non* „arcwise connected". On montre d'une manière analogue que

(III) $$f^{-1}(S_\beta - C) \cdot C = 0 \quad \textit{ou bien} \quad f^{-1}(S_\beta - C)(S_\alpha - C) = 0.$$

Or, si l'on avait $f^{-1}(S_\beta - C)(S_\alpha - C) = 0$, l'égalité $f^{-1}(C) + f^{-1}(S_\beta - C) = C + S_\alpha - C$ donnerait $C \subset f^{-1}(S_\beta - C)$, d'où $S_\beta - C \subset f(C)$ et enfin, C étant un continu de condensation de S_β, on aurait $S_\beta = f(C)$, ce qui est évidemment impossible, puisque C est localement connexe et S_β ne l'est pas. On a donc

(IV) $$f^{-1}(S_\beta - C)\ (S_\alpha - C) \neq 0,$$

et l'alternative (II) entraîne

(V) $$f^{-1}(C) \subset C.$$

[11]) Cf. L. E. J. Brouwer, *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. 71.

[12]) $f(x|C)$ est le symbole de M. F. Hausdorff, il désigne une fonction définie sur $C \subset S_\alpha$ et coïncidant sur C avec $f(x)$.

D'autre part, si l'on avait $C - f^{-1}(C) \neq 0$, l'égalité $f^{-1}(C) + f^{-1}(S_\beta - C) = S_\alpha$ donnerait $f^{-1}(S_\beta - C)\cdot C \neq 0$, ce qui contredit (III) en raison de (IV). On a donc $C - f^{-1}(C) = 0$ et l'inclusion (V) donne $f^{-1}(C) = C$, c. q. f. d.

Ad 2°. Par suite de la continuité de $f(x)$ l'égalité $\lim_{i=\infty} p(x_i) = x_0 \in C$[13]) entraîne $\lim_{i=\infty} p[f(x_i)] = f(x_0)$. On en conclut qu'il existe une *déformation continue* f^* *de* f[14]) telle que l'on a

(VI) $$f^*(S_\alpha) = S_\beta$$

et

(VII) $$p[f^*(x)] = f^*[p(x)] \quad \textit{pour tout point} \quad x \in S_\alpha.$$

Pour établir l'égalité $f(q_\omega) = q_\omega$ où $q_\omega = \lim_{i=\infty} q_i$, il suffit en vertu de (VII) de prouver que l'on a $f^*(q_\omega) = q_\omega$. Supposons, par contre, que l'on ait

(VIII) $$f^*(q_\omega) \neq q_\omega.$$

Cette inégalité montre en raison de (VII) que pour tout $i = 1, 2, \ldots$ le point $f^*(q_{\omega_\alpha(i)})$ n'est pas une *pointe* de la spirale S_β. Il en résulte selon (VII) que pour chaque couple de points x et y appartenant respectivement à $S_\alpha^{(i)}$ et $S_\alpha^{(i+1)}$ [15])

(IX) *l'égalité* $L(\overline{q_{\omega_\alpha(i)} x}) = L(\overline{q_{\omega_\alpha(i)} y})$ *entraîne* $f^*(x) = f^*(y)$.

La transformation $f^*(x)$ consite donc à *identifier* les portions de longueurs égales des arcs $S_\alpha^{(i)}$ et $S_\alpha^{(i+1)}$ et qui aboutissent au point $q_{\omega_\alpha(i)}$ constituant leur extrémité commune (ces portions seront transformées ensuite en un arc de $S_\beta - C$). Cette disparition de pointes a pour effet l'existence sur $S_{\bar\alpha}$ d'une fonction continue $\bar f^*$ telle que

(X) *pour tout* $i = 1, 2, \ldots$ *et chaque couple de points* $x \in S_{\bar\alpha}^{(i)}$ *et* $y \in S_{\bar\alpha}^{(i+1)}$

$$L(\overline{q_{\omega_{\bar\alpha}(i)} x}) = L(\overline{q_{\omega_{\bar\alpha}(i)} y}) \quad \textit{entraîne} \quad \bar f^*(x) = \bar f^*(y).$$

[13]) pour la définition du symbole $p(x)$ voir mon ouvrage précité, p. 187, **4**.

[14]) Étant donnée une fonction f continue sur un ensemble A, une fonction f^* définie sur A est dite *déformation continue de* f, s'il existe une fonction $F(x, t)$ définie pour $x \in A$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$, continue par rapport aux deux variables (x, t) prises simultanément et telle que

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ\ F(x,0) = f(x), \\ 2^\circ\ F(x,1) = f^*(x) \end{array}\right\} \textit{pour} \quad x \in A.$$

[15]) voir mon ouvrage précité, p. 188, formule (9).

En effet, d'après III, 1 il suffit de poser pour tout $x \in S_{\bar\alpha}$

$$\bar f^*(x) = f^*[f_{\alpha,\bar\alpha}^{-1}(x)]$$

(en vertu de (IX) cette équation ne donne lieu à aucune ambiguité). Or, la suite $\{L(\overline{q_{\omega_{\bar\alpha}(i)}\, q_{\omega_{\bar\alpha}(i+1)}})\}$ étant non décroissante, la condition (X) entraine évidemment l'inclusion $f^*(q_0) \in C$, contrairement à **4**, 1°. L'hypothèse (VIII) implique donc une contradiction, c. q. f. d.

Ad 3°. Désignons pour tout point x de la circonférence C par x' le point de l'intervalle $[0, 2\pi]$ tel que

$$L(\overline{q_\omega x}) = L([0, x']),$$

l'arc $\overline{q_\omega x} \subset C$ étant compté dans le sens des θ croissants ou dans le sens opposé suivant que le grande de la transformation $f(x|C)$ de C en soi est égal à $+g$ où à $-g$.

Etant donnée sur $S_\alpha \subset \Gamma$ une fonction $h(x)$ continue et telle que $h(S_\alpha) \subset \Gamma$, soit $\varphi_h(x')$ la fonction définie pour $x' \in [0, 2\pi]$ par les conditions: *$\varphi_h(x')$ est continue pour tout* $[0, 2\pi]$, $\varphi_h(0) = 0$, *$\varphi_h(x') =$ l'angle $\theta \pm 2\pi k$ qui correspond au point $h(x)$*. On a évidemment

(XI) $$\varphi_f(2\pi) = 2\pi g.$$

Nous avons remarqué au cours de la démonstration de **4**, 2° que la transformation $f(x)$ peut être supposée assujettie à la condition

(XII) $$p[f(x)] = f[p(x)] \quad \textit{pour tout} \quad x \in S_\alpha,$$

sans que la formule (I) cesse d'être vraie.

Dans le même ordre d'idées il n'est pas difficile de montrer qu'il existe sur S_α une déformation continue f^* de f qui, tout en vérifiant les égalités (I) et (XIII), présente en outre les propriétés suivantes:

(XIII) *les maxima et les minima de la fonction $\varphi_{f^*}(x')$ sont de la forme $2\pi k$ où $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ et la fonction $\varphi_{f^*}(x')$ n'est constante dans aucun intervalle partiel de* $[0, 2\pi]$.

Nous allons montrer comment on peut réaliser la premierè des propriétés (XIII), la réalisation de la seconde ne comportant aucune difficulté.

On peut supposer que $\varphi_f(x')$ n'est constante dans aucun intervalle partiel de $[0, 2\pi]$, puisque dans le cas contraire il suffirait de prende une déformation convenable f' de f telle que cette condition soit remplie pour $\varphi_{f'}(x)$.

Rangeons en une suite $\{\xi_i'\}$ tous les points de l'intervalle $[0, 2\pi]$ où $\varphi_f(x)$ prend son maximum ou minimum qui n'est pas de la forme $2\pi k$ Pour tout $i = 1, 2, \dots$ il existe donc un entier $k_i \geqslant 0$ tel que

$$2\pi k_i < |\varphi_f(\xi_i')| < 2\pi(k_i + 1).$$

Soit pour tout i naturel $\overline{x_i' y_i'}$ le plus grand arc partiel de $[0, 2\pi]$ contenant ξ_i, contenu dans $[0, 2\pi] - \sum\limits_{s=1}^{i-1} \overline{x' y_i'}$ et tel que l'on ait $\varphi_f(x_i') = \varphi_f(y_i') = \varphi_i$ où $2\pi k_i \leqslant |\varphi_i| \leqslant 2\pi(k_i + 1)$. Soient respectivement $\{\xi_i^{(n)}\}$, $\{x_i^{(n)}\}$ et $\{y_i^{(n)}\}$ les suites de points d'intersection de $S_\alpha - C$ avec les génératrices $\theta = \theta(\xi_i)$, $\theta = \theta(x_i)$ et $\theta = \theta(y_i)$ du cône R [16]. Pour tout i et n on a donc $p(x_i^{(n)}) = x_i$ et $p(y_i^{(n)}) = y_i$, d'où selon (XII)

$$p[f(x_i^{(n)})] = f(x_i) = f(y_i) = p[f(y_i^{(n)})].$$

Comme, en outre, $p[f(\xi_i^{(n)})] = \xi_i \neq q_\omega$ et en vertu de (XII) $L[f(\overline{x_i^{(n)} y_i^{(n)}})] < 2\pi$, on obtient selon (XII) et **4**, 2° pour tout $n = 1, 2, \dots$ et $i = 1, 2, \dots$ l'égalité $f(x_i^{(n)}) = f(y_i^{(n)})$. On n'a donc qu'à poser

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{pour } x \in S_\alpha - \sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{x_i^{(n)} y_i^{(n)}} - \sum\limits_{i=1}^{\infty} \overline{x_i y_i} \\ f(x_i^{(n)}) & \textit{pour } x \in \overline{x_i^{(n)} y_i^{(n)}} \\ f(x_i) & \textit{pour } x \in \overline{x_i y_i}. \end{cases}$$

Soient $2\pi k_1, 2\pi k_2, \dots, 2\pi k_{n_0-1}$ toutes les valeurs maxima et minima que la fonction $\varphi_{f*}(x')$ prend à l'intérieur de l'intervalle $[0, 2\pi]$, lorsque x' augmente de 0 à 2π; posons:

$$\text{(XIV)} \qquad l_1 = |k_1|, \; l_i = |k_i - k_{i-1}| \quad \textit{où} \quad i = 2, 3, \dots, n_0 - 1 \quad \textit{et}$$
$$l_{n_0} = \left| \frac{1}{2\pi} \varphi_{f*}(2\pi) - k_{n_0-1} \right|.$$

On a en vertu de (XI)

$$\text{(XV)} \qquad \sum_{s=1}^{n_0} (-1)^{s-1} l_s = g.$$

Ceci étant, désignons par $\Phi_{f*}(x)$ la fonction *continue* pour $x \in S_\alpha - C$, donnée par les conditions: 1° $\Phi_{f*}(q_0) = 0$, 2° pour tout $x \in S_\alpha - C$ $\Phi_{f*}(x) =$ *certaine détermination de l'angle* $\theta[f^*(x)]$. En vertu de (XII)

[16]) Ibid., p. 187, **4**, formule (1).

on a pour $i = 1, 2, \dots$ et tout point $x \in \overline{q_i q_{i+1}} \subset S_\alpha - C$

$$\Phi_{f*}(x) = \begin{cases} \varphi_{f*}[L(\overline{q_i x})] + \Phi_{f*}(q_i), & \textit{si } \operatorname{Sign}[\overline{q_i q_{i+1}}] = +1, \\ \varphi_{f*}[L(\overline{q_{i+1} x})] + \Phi_{f*}(q_{i+1}), & \textit{si } \operatorname{Sign}[\overline{q_i q_{i+1}}] = -1 \text{ [17]}). \end{cases}$$

Ces formules montrent en particulier que pour tout $i = 1, 2, \dots$ les valeurs maxima et minima que $\Phi_{f*}(x)$ prend dans l'intérieur de l'arc $\overline{q_i q_{i+1}}$ sont les mêmes que celles de $\varphi_{f*}(x')$ dans l'intérieur de l'intervalle $[0, 2\pi]$. Soient $\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, \dots, \xi_{n_0-1}^{(i)}$ les points ordonnés linéairement (de l'arc $\overline{q_i q_{i+1}}$ ou de l'arc $\overline{q_{i+1} q_i}$, suivant que $\operatorname{sign}[\overline{q_i q_{i+1}}] = +1$ ou bien -1), en lesquels la fonction $\Phi_{f*}(x)$ prend ses valeurs extrémales $2\pi k_1, \dots, 2\pi k_{n_0-1}$ respectivement. Ces points sont bien déterminés d'après (XIII). Deux cas peuvent se présenter:

$$\text{(a)} \quad n_0 \equiv 1 \pmod 2. \qquad \textit{et} \qquad \text{(b)} \quad n_0 \equiv 0 \pmod 2.$$

Envisageons d'abord le cas (a). Le congruence $n_0 \equiv 1 \pmod 2$ montre que les seuls points de la suite $\{q_i\}$ où $\Phi_{f*}(x)$ est maximum ou minimum sont les pointes de S_α, c. à d. les points $q_{\omega_\alpha(i)}$ où $i = 1, 2, \dots$ Il en résulte que les seuls points de l'ensemble $S_\alpha - C$ où $\Phi_{f*}(x)$ est maximum ou minimum sont ceux de la suite

$$\xi_1 = q_0, \quad \xi_2 = \xi_1^{(0)}, \dots, \quad \xi_{n_0} = \xi_{n_0-1}^{(0)}, \quad \xi_{n_0+1} = \xi_1^{(1)}, \dots, \quad \xi_{\omega_\alpha(i)[n_0-1]+1} = q_{\omega_\alpha(i)},$$
$$\xi_{\omega_\alpha(i)[n_0-1]+2} = \xi^{(\omega_\alpha(i))}, \dots$$

Il est évident que dans cette suite figurent des points que la fonction $f^*(x)$ transforme en q_0; ils y sont, en outre, nécessairement en nombre fini, car autrement on aurait $C \cdot f^{-1}(q_0) \neq 0$, contrairement à **4**, 1°. Soit ξ_m celui de ces points dont l'indice m est le plus grand. D'après la définition des points ξ_i la suite

$$f^*(\xi_m), \quad f^*(\xi_{m+1}), \dots, \quad f^*(\xi_{m+p})$$

est pour tout p naturel une chaîne alternative sur un arc $\overline{q_0 q_{p'}}$ de $S_\beta - C$. Si $\overline{\beta} = \{\overline{b}_i\} \neq \{+\infty\}$, on conclut donc de III, **2** que la suite

$$f_{\beta,\overline{\beta}}[f^*(\xi_m)], \quad f_{\beta,\overline{\beta}}[f^*(\xi_{m+1})], \dots, \quad f_{\beta,\overline{\beta}}[f^*(\xi_{m+p})]$$

est une chaine alternative sur un arc $\overline{q_0 q_{p''}}$ de $S_{\overline{\beta}} - C$. Ceci se présentant pour tout p, on en tire en vertu III, **3** et (XIV) que, $\delta = \{d_i\}$ désignant la suite

[17]) Ibid., p. 194, Définitions.

$$\underbrace{l_1,\ l_2, \dots,\ l_{n_0-1},\ l_{n_0}+l_1,\ l_2, \dots\ l_{n_0-1},\ l_{n_0}+l_1, \dots,\ l_{n_0-1},\ l_{n_0},}_{a_1 \cdot n_0 - a_1 + 1 \text{ termes}}$$

$$\underbrace{l_{n_0},\ l_{n_0-1}, \dots,\ l_1+l_{n_0},\ l_{n_0-1}, \dots,\ l_2,\ l_1,}_{a_2 \cdot n_0 - a_2 + 1 \text{ termes}} \quad \underbrace{l_{n_0},\ l_{n_0-1}, \dots,\ l_1}_{a_{2i} \cdot n_0 - a_{2i} + 1 \text{ termes}}, \dots,$$

$$\underbrace{l_1,\ l_2, \dots,\ l_{n_0}}_{a_{2i+1} \cdot n_0 - a_{2i+1} + 1 \text{ termes}}, \dots,$$

il existe un entier positif k' tel que $\{d_{k'+i}\}$ est un modèle de réduction de la suite $\overline{\beta}$. Enfin on a en vertu de II, 1

(XVI) $$\overline{\{d_{k'+i}\}} = \overline{\beta}.$$

Si la base de β est $\{+\infty\}$, la suite

$$f_{\beta,\infty}[f^*(\xi_m)],\quad f_{\beta,\infty}[f^*(\xi_{m+1})], \dots,\quad f_{\beta,\infty}[f^*(\xi_{m+p})]$$

est une chaîne alternative sur un arc $\overline{q_0\, q_{p'''}}$ de $S_\infty - C$ et on en conclut en vertu de la proposition 6 (1) de ma note citée de Fund. Math. XXII, p. 194, qu'il existe un entier positif k'' tel que

(XVII) $$\overline{\{d_{k''+1}\}} = \{+\infty\}.$$

En vertu de II, 5 la suite $l_1, l_2, \dots, l_{n_0}$ peut être considérée comme un modèle de réduction d'une autre suite $l'_1, l'_2, \dots, l'_{p_0}$ où $0 \leqslant n_0 - p_0 \equiv 0 \pmod 2$ et qui satisfait pour un $k_0 \leqslant p_0$ aux conditions:

(XVIII) $$l'_i \leqslant l'_{i+1} \ \textit{pour}\ i \leqslant k_0 - 1 \quad \textit{et} \quad l'_{j+1} \leqslant l'_j \ \textit{pour}\ j = k_0, \dots, p_0 - 1.$$

La suite

$$\underbrace{l'_1,\ l'_2, \dots,\ l'_{p_0-1},\ l'_{p_0}+l'_1,\ l'_2, \dots,\ l'_{p_0-1},\ l'_{p_0}+l'_1, \dots,\ l'_{p_0-1},\ l'_{p_0},}_{a_1 p_0 - a_1 + 1 \text{ termes}}$$

$$\underbrace{l'_{p_0},\ l'_{p_0-1}, \dots,\ l'_1+l'_{p_0},\ l'_{p_0-1}, \dots,\ l'_1}_{a_2 p_0 - a_2 + 1 \text{ termes}}, \dots,$$

est donc une suite réduite de $\{d_i\}$. Designons la par $\{d'_i\}$. En vertu de II, 1, II, 3, (XVI) et (XVII), il existe deux entiers non négatifs j et k tels que

(XIX) $$\overline{\{d'_{k+i}\}} = \overline{\{b_{j+i}\}}.$$

Nous allons maintenant définir une suite réduite $\gamma = \{g_i\}$ de $\{d'_i\}$.

Deux cas peuvent encore se présenter:

(c) $k_0 \equiv 1 \pmod 2$. Posons alors pour abréger

$$G_s = \sum_{s=0}^{p_0-k_0} (-1)^s\, l'_{k_0+s} + (-1)^{p_0-k_0} \sum^{k_0-1} (-1)^{s-1}\, l'_s,$$

(ce qui donne évidemment $G_1 = G_2 = \dots$); soient

$$g_j = l'_j \quad \textit{pour} \quad j = 1, 2, \dots, k_0 - 1$$

et pour tout $i = 1, 2, \dots$:

$$g_{i+k_0-1} = \sum_{s=1}^{a_i} G_s + l'_{k_0} + \sum_{s=1}^{p_0-k_0} (-1)^{s-1}\, l'_{k_0+s} + (-1)^{p_0-k_0} \sum_{s=0}^{p_0-k_0-1} (-1)^s\, l'_{p_0-s}$$

ou bien

$$g_{i+k_0-1} = \sum_{s=1}^{a_i} G_s + l'_{k_0} + \sum_{s=1}^{k_0-1} (-1)^{s-1}\, l'_{k_0-s} + (-1)^{k_0+1} \sum_{s=1}^{k_0-1} (-1)^{s-1}\, l'_s,$$

suivant que $i \equiv 1 \pmod 2$ ou $i \equiv 0 \pmod 2$.

(d) $k_0 \equiv 0 \pmod 2$. Posons dans ce cas:

$$G'_s = \sum_{s=1}^{p_0-k_0} (-1)^{s-1}\, l'_{k_0+s} + (-1)^{p_0-k_0-1} \sum_{s=1}^{k_0} (-1)^{s-1}\, l'_s;$$

soient alors

$$g_j = l'_j \quad \textit{pour} \quad j = 1, 2, \dots, k_0$$

et pour tout $i = 1, 2, \dots$

$$g_{i+k_0} = \sum_{s=1}^{a_i} G'_s + l'_{k_0} + \sum_{s=0}^{p_0-k_0} (-1)^s\, l'_{k_0+s} + (-1)^{p_0-k_0-1} \sum_{s=0}^{p_0-k_0} (-1)^s\, l'_{p_0-s}$$

ou bien

$$g_{i+k_0} = \sum_{s=1}^{a_i} G'_s + l'_{k_0} + \sum_{s=0}^{k_0-1} (-1)^s\, l'_{k_0-1} + (-1)^{k_0} \sum_{s=1}^{k_0} (-1)^{s-1}\, l'_s,$$

suivant que $i \equiv 1 \pmod 2$ ou $i \equiv 0 \pmod 2$.

Ces formules montrent en vertu de (XVIII) que la suite $\gamma = \{g_i\}$ ainsi définie est une suite réduite de $\{d'_i\}$. Les mêmes formules entraînent en vertu de (XV) et (a) les égalités

$$g_{k_0+i+\varkappa} = g\, a_i + l'_{k_0}$$

où $\varkappa = -\frac{1}{2}\{(-1)^{k_0+1}+1\}$ et $i = 1, 2, \ldots$ Ainsi dans le cas (a) où $n_0 \equiv 0 \pmod 2$ la proposition se trouve démontrée en vertu de II, **4**.

Reste à envisager le cas (b) où $n_0 \equiv 0 \pmod 2$. Le raisonnement analogue entraîne dans ce cas l'existence de deux entiers non négatifs j^* et k^* tel qu'en désignant par $\delta^* = \{d_i^*\}$ la suite

$$\underbrace{l'_1, l'_2, \ldots, l'_{p_0}, \; l'_1, l'_2, \ldots, l'_{p_0}, \ldots, \; l'_1, l'_2, \ldots, l'_{p_0}}_{a_1 p_0 \text{ termes}},$$

$$\underbrace{l'_{p_0}, l'_{p_0-1}, \ldots, l'_1, l'_{p_0}, l'_{p_0-1}, \ldots, l'_1, l'_{p_0}, \ldots, l'_1}_{a_2 p_0 \text{ termes}}, \ldots,$$

on ait

$$\text{(xx)} \qquad \overline{\{d^*_{j^*+i}\}} = \{\overline{b}_{k^*+i}\}.$$

D'autre part un calcul analogue à celui employé pour montrer que γ est suite réduite de $\{d_i\}$ prouve que l'on a

(xxi) *soit* $\{d^*_{k_0+i}\}$ *soit* $\{d^*_{k_0-1+i}\}$ *est un modèle de réduction de* $\{g a_i + l'_{k_0}\}$.

Les relations (xx) et (xxi) donnent la proposition **4**, 3° dans le dans le cas $n_0 \equiv 0 \pmod 2$, c. q. f. d.

5. *Si la base de la suite α est croissante, chaque transformation continue f de la courbe S_α en elle-même est essentielle*[18]).

C'est un corollaire de la proposition **4**. En effet, étant donnée suite $\alpha = \{a_i\}$ croissante (donc identique avec sa base) et une transformation f de la spirale S_α en elle-même, on a $f^{-1}(C) = C$ en vertu de II, **4** 1° et il suffit évidemment de prouver que la transformation $f(x|C)$ de la circonférence C en elle même est essentielle. Or, dans le cas contraire, il existerait d'après III, **4**, 3° et II, **1** quatre entiers non négatifs j, k, m et h et une suite d'entiers non négatifs $\{d_i\}$ tels que $\overline{\{a_{j+i}\}} = \overline{\{d_{k+i}\}}$ et $\overline{\{d_{m+i}\}} = \{h\}$. Il en résulte en vertu de II, **3** que $a_i = h$ pour i suffisamment grand, contrairement à la croissance de la suite α.

IV. L'indépendance des spirales. Etant donnée une famille G d'ensembles, deux ensembles A et B appartenant à G seront dits

[18]) pour la définition de cette notion voir p. ex. H. Hopf, Math. Ann. **104**, p. 637.

indépendants dans G, s'il n'existe dans G aucun ensemble qui soit un modèle à la fois de A et B. En particulier, les types de continuité d'ensembles indépendants sont incomparables.

Lemme. *Si une spirale S_β est l'image continue d'une spirale S_α il existe des entiers positifs j, k, g et h tels que*

$$\text{(I)} \qquad \overline{b}_{j+i} = g\,\overline{a}_{k+i} + h \quad \textit{pour} \quad i = 1, 2, \ldots,$$

où $\{\overline{a}_i\} = \overline{\alpha}$ et $\{\overline{b}_i\} = \overline{\beta}$.

En effet, en vertu de III, **4**, 3° et II, **1** il existe cinq *indices* j', j'', k', g et h et une suite d'entiers positifs $\{d_i\}$ tels que $\overline{\{d_{j'+i}\}} = \{\overline{b}_{k'+i}\}$ et $\overline{\{d_{j''+i}\}} = \overline{\{g a_i + h\}}$. Or, il en résulte selon II, **3** et II, **4** l'existence d'indices j et k satisfaisant aux égalités (I).

Théorème. *Si deux suites β et β' (d'entiers positifs) sont incomparables, les spirales S_β et S'_β sont indépendantes dans la famille Γ.*

D é m o n s t r a t i o n. Supposons, par contre, qu'il existe une spirale S_α qui soit un modèle à la fois de S_β et $S_{\beta'}$. En vertu du lemme, il existe huit entiers: j, k, g, h et j', k', g', h' tels que

$$\text{(II)} \qquad \overline{b}_{j+i} = g\,\overline{a}_{k+i} + h \quad \textit{et} \quad \overline{b}'_{j'+i} = g'\,\overline{a}_{k'+i} + h' \quad \textit{pour} \quad i = 1, 2, \ldots,$$

ce qui donne

$$\frac{\overline{b}_{j+k'+i+2} - \overline{b}_{j+k'+i+1}}{\overline{b}_{j+k'+i+1} - \overline{b}_{j+k'+i}} = \frac{\overline{b}'_{j'+k+i+2} - \overline{b}'_{j'+k+i+1}}{\overline{b}'_{j'+k+i+1} - \overline{b}'_{j'+k+i}} \quad \textit{pour} \quad i = 1, 2, \ldots,$$

contrairement à l'hypothèse de l'incomparabilité de β et β', c. q. f. d.

Exemples. Les suites $\{E(10^i \cdot x)\}$ et $\{E(10^i \cdot y)\}$ étant évidemment incomparables pour chaque couple $x \neq y$ de nombres réels dépassant 1, le théorème qui vient d'être établi entraîne le corollaire suivant:

1. *Aucune spirale de la famille* $\mathcal{S}$[19]) *n'est une image continue d'aucune autre spirale de cette famille.*

Etant donnée dans l'espace euclidien R_3 une courbe $\overline{S}_x$ homéomorphe à une spirale $S_x \in \mathcal{S}$, je désigne par $q_0(\overline{S}_x)$ et $q_\omega(\overline{S}_x)$ les points de $\overline{S}_x$ qui correspondent respectivement aux points q_0 et q_ω de S_x. Considérons des courbes de la forme

[19]) qui désigne dans ma note la famille de toutes les spirales dont les *développements* sont de la forme $E(10_i \cdot x)$ où $1 \leqslant x$; cf. Fund. Math. XXII, p. 188 et 189.

$\sigma = \sum_{l=1}^{n} \bar{S}_{x_l}$ où $\bar{S}_{x_i} \cdot \bar{S}_{x_{i+1}} = q_\omega(\bar{S}_{x_i}) = q_0(\bar{S}_{x_{i+1}})$ et $\bar{S}_{x_i}\,\bar{S}_{x_j} = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$ et $j > i+1$. On peut établir sans peine la généralisation suivante de la proposition **1**:

(III) *étant données deux courbes* $\sigma' = \sum_{l=1}^{m} \bar{S}_{x_l}$ et $\sigma'' = \sum_{l=1}^{n} \bar{S}_{y_l}$, *le système des inégalités* $x_i \neq y_j$ *où* $i = 1, 2, \ldots, m$ *et* $j = 1, 2, \ldots, n$ *entraîne l'incomparabilité des types de continuité de* σ' *et* σ''.

Désignons pour tout $i = 6, 7, \ldots,$ et $s = 1, 2, \ldots, 2^{i-1}$ par $\bar{S}_{2^i+s}$ une courbe homéomorphe à S_{2^i+s} et telle que:

1° $q_0(\bar{S}_{2^i+s}) = \left(\frac{1}{i}, \frac{2s-1}{2^i}\right)$ *et* $q_\omega(\bar{S}_{2^i+s}) = \left(\frac{1}{i}, \frac{2s}{2^i}\right)$ ou bien $q_0(\bar{S}_{2^i+s}) = \left(\frac{1}{i}, 1 - \frac{2s}{2^i}\right)$ et $q_\omega(\bar{S}_{2^i+s}) = \left(\frac{1}{i}, 1 - \frac{2s-1}{2^i}\right)$, suivant que $i \equiv 1$ ou bien $i \equiv 0 \pmod 2$,

2° $\delta(\bar{S}_{2^i+s}) = \frac{1}{2^i}$.

Les courbes $\bar{S}_{2^i+s}$ sont disjointes; rangeons les dans une suite $\{\bar{S}_{k_j}\}$ suivant la grandeur des indices et unissons chaque couple $\bar{S}_{k_j}$ et $\bar{S}_{k_{j+1}}$ par un arc simple $A_j = \overline{q_\omega(\bar{S}_{k_j})\; q_0(\bar{S}_{k_{j+1}})}$ de façon que l'on ait: $A_m \cdot A_n = 0$ si $m \neq n$, $A_j \cdot (\sum_{l=1}^{\infty} \bar{S}_{k_l} - \bar{S}_{k_j} - \bar{S}_{k_{j+1}}) = 0$ et $\lim_{j=\infty} \delta(A_j) = 0$. Posons $Q = \sum_{j=1}^{\infty} (\bar{S}_{k_j} + A_j)$ et désignons par K le segment de condensation: $x = 0$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ du sémi-continu Q. A l'aide de (III) on établit facilement la propriété suivante de Q:

(IV) *étant donnée une transformation continue* f *de* Q *en lui-même, l'inclusion* $\lim_{n=\infty} x_n \in K$ *entraîne l'égalité* $\lim_{n=\infty} f(x_n) = \lim_{n=\infty} x_n$ *pour chaque suite* $\{x_n\}$ *de points de* Q.

En désignant pour chaque sous-ensemble Z de K par $Q(Z)$ l'ensemble $Q + Z$, on conclut de (IV) que

(V) *l'inégalité* $Z \neq Z'$ *entraîne l'incomparabilité des types de continuité de* $Q(Z)$ *et* $Q(Z')$.

Or, comme il existe $2^{2^{\aleph_0}}$ de sous-ensembles différents de K, (V) entraîne *l'existence effective de* $2^{2^{\aleph_0}}$ *types de continuité incomparables deux à deux*[20].

On remarquera à ce propos que le semi-continu Q possède la propriété suivante:

(VI) *toute transformation continue de* Q *en lui-même peut être prolongée sur la fermeture* $\bar{Q} = Q + K$.

C'est une conséquence immédiate de la proposition (IV), qui montre qu'en s'approchant du segment K les transformations continues de Q en Q tendent vers *l'identité*.

[20]) Je dois ce résultat à M. S. Ulam. Les exemples analogues sur la droite ont été *non effectifs* (W. Sierpiński, Fund. Math. XIX p 205—210, où l'on fait usage de l'hypothèse du continu et A. Lindenbaum, Ann. de la Soc. Polonaise de Math 10 (1931), séance de la Section de Varsovie du 16. I. 1931, où l'on n'a recours qu'à l'axiome du choix).

Soit A un arc simple aux extrémités q_0 et q_ω et dont l'intérieur est disjoint de l'ensemble $\Sigma^+ + \Sigma^-$; posons pour tout $S_x \in \mathcal{S}$:

(VII) $$S'_x = S_x + A$$

et soit $\mathcal{S}'$ la famille de toutes les courbes S'_x où $S_x \in \mathcal{S}$. En vertu de **1**. on obtient alors la proposition:

2. *Aucune courbe de* $\mathcal{S}'$ *n'est une image continue d'aucune autre courbe de cette famille*[21]).

En effet, supposons par contre que, S'_x et S'_y désignant deux courbes distinctes de $\mathcal{S}'$, il existe une transformation continue f de S'_x en S'_y. Désignons pour tout i par $S_{x,i}$ la courbe partielle de S_x, irréductible entre tout point de la circonférence C et le point q_i. On a

(VIII) $$\lim_{i=\infty} S_{x,i} = C$$

et d'après (VII)

(IX) $$S_{x,i} + \overline{q_0\, q_i} + A = S'_x,$$

où $\overline{q_0\, q_i} \subset S_x - C$. Il existe pour tout i indice i' tel que

(X) $$S_{y,i'} \subset f(S_{x,i}),$$

puisque dans le cas contraire, S_y étant un continu irréductible entre deux points, $f(S_{x,i})$ serait (pour un i) localement connexe et d'après (IX) S'_y serait alors, contrairement à sa définition, un continu localement connexe (à savoir, comme somme de trois continus localement connexes).

Pour la même raison il existe une suite $\{q'_i\}$ de points de $S_\alpha - C$, convergente vers un point q'_ω de C et telle que

(XI) $$f(q'_i) \in S_y - C \quad \textit{et} \quad \lim_{i=\infty} f(q'_i) = q'^* \in C.$$

On a, en outre, l'inclusion

(XII) $$f(C) \subset C.$$

En effet, supposons par contre que $f(C) - C \neq 0$. C étant le seul continu de condensation de S'_y, il en résulterait l'existence d'un point $a \in f(C) \cdot S'_y - C$ et d'une suite $\{q''_i\}$ de points de $S_x - C$

[21]) Cette proposition donne la solution positive du problème suivant de M. N. Aronszajn (Fund. Math. XIX, p. 142): *Existe-t-il une classe de puissance* $2^{\aleph_0}$ *de continus „arcwise connected“ et qui soient incomparables c deux à deux?*

convergente vers un point q'' de C tels que $f(q_i'') = a$ pour tout $i = 1, 2, \ldots$ On aurait donc en vertu de (XI)

$$\text{(XIII)} \qquad \lim_{i=\infty} \operatorname{Sup} \overline{q_i' q_i''} \subset C.$$

D'autre part, les images des arcs $\overline{q_i' q_i''}$ contiennent les points a et $f(q_i')$ de $S_y - C$ avec $\lim_{i=\infty} f(q_i') = q'^* \in C$, ce qui donne d'après (XIII) $S_{y,j} \subset f(\lim_{i=\infty} \operatorname{Sup} \overline{q_i' q_i''}) \subset f(C)$ pour un j assez grand. Nous obtenons donc une contradiction, puisqu'aucun sous-continu de S_y' contenant $S_{y,j}$ n'est évidemment localement connexe.

L'inclusion (XII) étant ainsi démontrée, on en tire en vertu de (X) l'existence d'un indice k tel que

$$\text{(XIV)} \qquad S_{y,k'} \subset f(S_{x,k}) \subset S_y \quad \text{et} \quad f(q_k) \subset S_y - C.$$

En vertu des inclusions (XIV), il existerait donc une *extension continue* $g(x)$ de la fonction $f(x|S_{x,k})$ sur S_x [22]) telle que $g(S_x) = S_y$, contrairement à **1**.

Il est à remarquer que l'incomparabilité des développements des spirales ne caractérise pas l'incomparabilité de leurs types de continuité. Pour en donner un exemple, nous allons nous baser sur deux propositions qui sont des conséquences presque immédiates de III, **4**, 1°. Soit à ce but $\alpha = \{a_i\}$ une suite d'entiers positifs vérifiant la condition $\lim_{k=\infty} \inf (a_k, a_{k+1}, \ldots) = 1$. Posons $k_0 = 0$ et désignons pour tout $i = 1, 2, \ldots$ par $k_{2i-1}(\alpha)$ le plus petit indice s dépassant $k_{2i-2}(\alpha)$ pour lequel on a $a_s = 1$ et par $k_{2i}(\alpha)$ le plus grand indice tel que l'on a $a_s = 1$ pour tout s vérifiant l'inégalité $k_{2i-1}(\alpha) \leqslant s \leqslant k_{2i}(\alpha)$. Ceci posé, on a les propositions suivantes:

3. *Si*

$$\lim_{i=\infty} \operatorname{Sup} [k_{2i}(\alpha) - k_{2i-1}(\alpha), k_{2i+2}(\alpha) - k_{2i+1}(\alpha), \ldots] <$$
$$< \lim_{i=\infty} \operatorname{Sup} [k_{2i}(\beta) - k_{2i-1}(\beta), k_{2i+2}(\beta) - k_{2i+1}(\beta), \ldots],$$

la spirale S_β n'est pas une image continue de S_α.

4. *Si* $\sup (a_1, a_2, \ldots) < n$, *la spirale S_α où $\alpha = \{a_i\}$ n'est une image continue d'aucune spirale S_β dont le développement $\beta = \{b_k\}$ vérifie l'inégalité*

$$\lim_{k=\infty} \operatorname{Sup} (b_k, b_{k+1}, \ldots) \geqslant n.$$

[22]) Étant donnée une fonction continue f sur un sous-ensemble A' de A, on dit que la fonction $g(x)$ est une *extension continue de $f(x)$ sur A*, si

1° $g(x)$ est continue sur A,
2° $g(x) = f(x)$ pour $x \in A'$.

Ceci étant, soit α_0 la suite $1, 2, 1, 2, \ldots$ et, d'une façon générale, α_i la suite $1, 2^i + 1, 1, 2^i + 1, \ldots$ Désignons par $\mathcal{F}_1$ la suite $\{S_{\alpha_i}\}$ où $i = 0, 1, 2, \ldots$ Les propositions III, 1 et IV, **4** entrainent la suivante:

5. *Les types de continuité des courbes de $\mathcal{F}_1$ forment une suite décroissate.*

Soit $\alpha_i^{(k)}$ la suite

$$\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{2k+1 \text{ termes}}, \quad 2^{i+1} + 1 \quad \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{2k+1 \text{ termes}}, \quad 2^i + 1, \ldots$$

et $\alpha_0^{(\omega)}$ la suite

$$1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, \ldots \quad \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{2s-1 \text{ termes}}, \quad 2, \quad \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{2s+1 \text{ termes}}, \ldots$$

D'après III, **1**, $S_{\alpha_i^{(k)}}$ est pour tout $i = 1, 2, \ldots$ et $k = 1, 2, \ldots$ une image continue de $S_{\alpha_0^{(\omega)}}$. Désignons par $\mathcal{F}_2$ la suite $\{S_{\alpha_i^{(i)}}\}$ où $i = 0, 1, 2, \ldots$ D'après IV, **3** et IV, **4**:

6. *Aucune spirale de $\mathcal{F}_2$ n'est une image continue d'aucune autre spirale appartenant à $\mathcal{F}_2$.*