Über doppeltzerlegende Punkte.

Von

K. Zarankiewicz (Warszawa).

Es sei M ein Kontinuum welches in einem n-dimensionalen euklidischen Raume R_n liegt, und x ein Punkt von M. Der Punkt x heisst ein **doppeltzerlegender** Punkt von M in bezug auf R_n wenn er die folgenden Eigenschaften besitzt:

(α) jede genügend kleine Umgebung (in bezug auf R_n) U_x des Punktes x hört auf zusammenhängend zu sein nach Tilgung derjenigen Komponente von $U_x \cdot M$ welche den Punkt x enthält.

(β) die Komponente von $U_x \cdot M$ welche x enthält hört auf zusammenhängend zu sein nach Tilgung des Punktes x für jede genügend kleine Umgebung U_x.

Beispiele. Es sei A_1 eine geradlinnige Strecke welche in der Ebene R_2 gelegen ist; jeder innere Punkt von A_1 ist ein doppeltzerlegender Punkt in bezug auf R_2, kein Punkt der A_1 ist aber ein doppeltzerlegender Punkt in bezug auf R_3.

A_2 — (Schirm) bedeutet die Menge welche aus einer Kreisfläche und aus einer zur Kreisebene senkrechten durch Mittelpunkt des Kreises gehenden Strecke besteht. Der Mittelpunkt des Kreises ist ein doppeltzerlegender Punkt des A_2 in bezug auf R_3.

A_3 — besteht aus einer nirgendsdichten perfecten Cantorschen Menge wo jedes „weggelassene" Intervall durch die Kugeloberfläche von gleichem Durchmesser ersetzt ist. Jeder Punkt der Cantorschen Menge ist für A_3 ein doppeltzerlegender Punkt in bezug auf R_3.

A_4 — besteht aus der Menge aller Punkte $(x, y, z, 0)$ des vierdimensionalen Raumes R_4 für welche $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$, und der Punkte $(0, 0, 0, t)$, wo $0 \leqslant t \leqslant 1$. Der Punkt $(0, 0, 0, 0)$ von A_4 ist ein dopppeltzerlegender Punkt in bezug auf R_4.

Satz. *Die Familie der abgeschlossenen und fremden Mengen $\{M_x\}$, welche in einem n-dimensionalen euklidischen Raume R_n liegen, und deren jede einen doppeltzerlegenden inbezug auf R_n Punkt x enthält, ist für $n \geqslant 3$ höchstens abzählbar.*

Beweis. Es sei $\{M_x\}$ die Familie der abgeschlossenen, fremden in R_n gelegenen Mengen M_x deren jede einen doppeltzerlegenden Punkt x (inbezug auf R_n) enthält.

Es sei

$$K_1,\ K_2,\ K_3, \ldots, K_n, \ldots \tag{1}$$

die Forlge aller n-dimensionalen Kugeln deren Radien und alle Mittelpunktkoordinaten rationale Zahlen sind.

Jeder Menge M_x wird im folgenden ein Kugeltripel $K^1(x)$, $K^2(x)$ und $K^3(x)$ der Folge (1) zugeordnet in der Weise dass verschiedenen Mengen M_x stets verschiedene Kugeltripel entsprechen. Da die Folge (1) nur abzählbar viele verschiedene Kugeltripel enthält, so kann es auch nur abzählbar viele Mengen M_x geben und daraus folgt unser Satz.

Der Menge M_x ordnen wir zunächst die Kugel $K^1(x)$ zu, als die erste in (1) auftretende Kugel welche folgende drei Bedingungen erfüllt:

$$K^1(x) \supset x \tag{2}$$

wenn J diejenige Komponente der Menge $K^1(x) \cdot M_x$ bezeichnet, welche den Punkt x enthält so

$$\text{wird } K^1(x) \text{ durch } J \text{ zerlegt,} \qquad \text{und} \tag{3}$$

$$J \text{ wird durch } x \text{ zerlegt.} \tag{4}$$

Infolge der Voraussetzung, dass x ein doppeltzerlegender Punkt ist, existiert stets eine solche Kugel in der Folge (1).

Da J eine zusammenhängende Menge ist, haben wir nach (4) eine Zerlegung

$$J = A_x + B_x$$

wo A_x und B_x nichteinpunktige, zusammenhängenden und in J relativ abgeschlossenen Mengen sind, und

$$A_x \cdot B_x = x \tag{5}$$

besteht [1]).

Ich behaupte, dass mindestens eine von den zusammenhängenden Mengen A_x und B_x die Kugel $K^1(x)$ zerlegt. Zum Beweise, transfor-

[1]) K. Zarankiewicz, *Sur les points de division dans les ensembles connexes*, Fund. Math. IX. 1927. S. 136.

mieren wir die Kugel $K^1(x)$ in den ganze Raum R_n in der Weise, dass die Oberfläche der Kugel in den unendlichfernen Punkt übergeht, z. Beispiel mittels der Formel $z' = \frac{z}{r - z}$. Die beide zusammenhängenden und relativ in $K^1(x)$ abgeschlossenen Mengen A_x und B_x gehen dann in zwei unbegrenzte Kontinua A' und B' über. Transformieren wir ferner diesen ganzen Raum z. Beispiel durch Inversion, wobei das Inversionnszentrum ausserhalb der Menge $A' + B'$ liegt, so gehen die unbegrenzten Kontinua A' und B' in zwei beschränkte Kontinua A'' und B'' über, wobei der Durchschnitt $A'' \cdot B''$ wegen (5) höchstens zwei Punkte enthält. Wären die Mengen A_x und B_x keine Schnitte der Kugel, so wären auch A'' und B'' keine Schnitte des Raumes, da die Eigenschaft ein Schnitt zu sein invariant gegen unsere Transformationen ist. Wenn also $A'' + B''$ ein Schnitt wäre, so enthielte der Durchschnitt $A'' \cdot B''$ nach dem sogenannten Phragmén-Brouwer'sche Satze [2]) einen $(n-2)$-dimensionalen Zyklus also eine $(n-2)$-dimensionale Menge. Ist aber $n \geqslant 3$ so ist jede mindestens eindimensionale Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums und sie kann unmöglich aus nur zwei Punkten bestehen. Somit ist gezeigt worden, dass $A'' + B''$ kein Schnitt des Raumes ist und folglich, dass die Summe $A_x + B_x$ kein Schnitt für die Kugel $K^1(x)$ ist, was der Formel (3) widerspricht.

Wir bezeichnen mit B_x diejenige von den Mengen A_x und B_x welche die Kugel $K^1(x)$ zerlegt (wenn beide die Kugel zerlegen, wird mit B_x eine beliebige unter ihnen bezeichnet).

Die Menge B_x bestimmt also im Bereiche $K^1(x) - B_x$ mindestens zwei getrennte Gebiete $\mathfrak{A}_x$ und $\mathfrak{B}_x$. Das Kontinuum $\overline{A}_x$, kann im allgemeinen Falle gemeinsame Punkte mit mehr als einem der Gebiete $K^1(x) - B_x$ besitzen. In diesem Falle kann das Kontinuum $\overline{A}_x$ als Summe der Kontinuen $A_x^1 + A_x^2 + \ldots A_x^n + \ldots$ dargestellt werden, die zu zweien je nur einen einzigen gemeinsamen Punkt x haben, und jedes A_x^n nur in einem der Gebiete von $K^1(x) - B_x$ liegt. Es genügt in diesem Falle als A_x^n diejenige Menge zu bezeichnen, welche aus den Punkt x und der Menge aller Punkte des A_x welche in nur einem der Gebiete $K^1(x) - B_x$ liegen, besteht. Wir wollen nur ein Kontinnum A_x^n welches vom Punkte x abgesehen, nur in einem von den Gebieten $K^1(x) - B_x$ liegt, betrachten und es einfach mit A_x bezeichnen. Ferner bezeichnen wir dasjenige Gebiet von $K^1(x) - B_x$, wo $A_x - x$ liegt, mit $\mathfrak{A}_x$ und mit $\mathfrak{B}_x$ irgendwelches Gebiet von $K^1(x) - B_x$, welches keinen gemeinsamen Punkt mit A_x besitzt. Es bestehen somit die Beziehungen

(6) $$A_x - x \subset \mathfrak{A}_x$$

(7) $$A_x \cdot \mathfrak{B}_x = 0.$$

Wir definieren die Kugeln $K^2(x)$ und $K^3(x)$ als die ersten in der Folge (1) auftretenden Kugeln welche folgende Bedingungen erfüllen:

(8) $$K^2(x) \subset K^1(x) \qquad K^3(x) \subset K^1(x)$$

(9) $$K^2(x) \cdot (A_x - x) \neq 0$$

(10) $$K^2(x) \cdot B_x = 0 \qquad K^3(x) \cdot B_x = 0$$

(11) $$K^3(x) \subset \mathfrak{B}_x.$$

Es leuchtet ein, dass zwei solche Kugeln stets in der Folge (1) existieren.

Nach (8), (9), (6) und (10) folgt weiter

(12) $$K^2(x) \cdot \mathfrak{B}_x = 0$$

(13) $$K^2(x) \subset \mathfrak{A}_x.$$

Somit ist jeder Menge M_x ein Kugeltripel $K^1(x)$, $K^2(x)$ und $K^3(x)$ zugeordnet; ich behaupte, dass verschiedenen Mengen M_x und M_y — verschiedene Kugeltripel zugeordnet sind. Nehmen wir an, dass in den zwei Kugeltripel welche den Mengen $M_x \neq M_y$ entsprechen, zwei Kugelpaare identisch sind etwa $K^1(x) = K^1(y)$ und $K^2(x) = K^2(y)$, wir zeigen dass dann $K^3(x) \neq K^3(y)$ ist.

Wir betrachten die Menge

$$L = B_y + A_y + K^2(x) = B_y + A_y + K^2(y);$$

sie ist offenbar eine zusammenhängende Menge und nach (10) mit B_x fremd, also liegt sie wegen $L \subset \bar{K}^1(x)$ nur in einem der Gebiete $K^1(x) - B_x$. Nach (9) und (6) enthält L einen mit $\mathfrak{A}_x$ gemeinsamen Punkt (sogar die ganze Kugel $K^2(x)$) also gilt

(14) $$L \subset \mathfrak{A}_x \quad \textit{oder} \quad L \cdot \mathfrak{B}_x = 0.$$

[2]) P. Alexandroff, *Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension.* Annals of Mathematics, Vol. 30, 1929. S. 178.

Die Menge

(15) $$N = K^2(x) + A_x + B_x + \mathfrak{B}_x$$

ist offenbar eine zusammenhängende Menge und nach (10) und (14) mit der Menge B_y fremd. Die Menge N liegt somit nur in einem von den Gebieten $K^1(x) - B_y$. Die Menge N hat aber nach (13) einen Punkt (sogar die ganze Kugel $K^2(x) = K^2(y)$) mit dem Gebiet $\mathfrak{A}_y$ gemeinsam, woraus

(16) $$N \subset \mathfrak{A}_y$$

folgt. Nach (15) und (16) haben wir $\mathfrak{B}_x \subset \mathfrak{A}_y$ und wegen (11) folgt

(17) $$K^3(x) \subset \mathfrak{A}_y.$$

Andererseits, auf Grund von (11) gilt $K^3(y) \subset \mathfrak{B}_y$, und wegen $\mathfrak{A}_y \cdot \mathfrak{B}_y = 0$, haben wir

(18) $$K^3(y) \cdot \mathfrak{A}_y = 0.$$

Nach (17) und (18) folgt somit

$$K^3(x) \neq K^3(y).$$

Wir haben also bewiesen dass verschiedenen Mengen M_x verschiedene Kugeltripel entsprechen, und dies hat die Richtigheit des ausgesprochenen Satzes zur Folge.

Wir bemerken, dass unserer Satz gilt nicht mehr für $n = 2$, d. h. für die Ebene, weil z. B. jeder innere Punkt eines einfachen in der Ebene R_2 liegenden Bogens zugleich ein doppeltzerlegender Punkt inbezug auf R_2 ist und die Menge der einfachen fremden in R_2 liegenden Bogen nichtabzählbar sein kann.

Für die Ebene R_2 folgt dagegen aus unserem Satze unmittelbar eine gewisse Eigenschaft der Kontinuen, welche man „Trioden" nennt (damit werden Kontinuen T gemeint, welche sich als Summe von drei Kontinuen $A + B + C = T$ darstellen lassen, wobei die Durchschnitte $A \cdot B = A \cdot C = B \cdot C$ sich auf einen einzigen und derselben Punkt t reduzieren). Diese Eigenschaft bestet darin, dass *die Familie der fremden in der Ebene R_2 liegenden „Trioden" höchstens abzählbar ist* [2]).

[2]) R. L. Moore, *Concerning triodic continua, in the plane.* Fund. Math. Bd. XIII, 1929. S. 262.

Zitierter Moorescher Satz über die Trioden ist schärfer als der von uns oben festgestellten; in dieser Hinsicht vergleiche W. Sierpiński, *Sur un problème de la théorie des relations.* Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie II — Vol. II, 1933, Seite 285.

Wenn wir jeden Punkt des Kontinuums $A + B$ zum Mittelpunkt einer zur Ebene R_2 senkrechten Strecke von konstanter Länge machen, so bekommen wir aus jeder Tiode ein Kontinuum, für welches der Punkt t ein doppeltzerlegender Punkt ist. Sind die Trioden in der Ebene fremd, so müssen auch die in angeführter Weise konstruierten Kontinuen im Raume R_3 fremd sein. Infolgegessen ist ihre Familie kraft unseren Satzes höchstens abzählbar. Es geht daraus die Abzählbarkeit die Menge fremder Trioden der Ebene hervor.