En rapport avec un théorème de M. S. Ruziewicz, M. Eilenberg a démontré encore[1]) la proposition suivante:

*Pour qu'il existe pour toute fonction réelle $f(p)$ définie sur un ensemble $E$*[2]) *une fonction mesurable $\varphi(x)$ telle que*

$$f(p) = \varphi(\psi(p)),$$

*où $\psi(p)$ est une fonction réelle fixe, définie sur $E$, il faut et il suffit que*

1°) *$\psi$ soit une fonction à valeurs distinctes,*

2°) *$\psi(E)$ jouisse de la propriété $(P_0)$.*

La condition 2° peut donc être remplacée ici par la condition que $|\psi(E)| = 0$.

[1]) l. c., p. 96, Théorème 3.

[2]) $E$ peut être un ensemble abstrait arbitraire.

# Über wesentlich unplättbare Kurven im dreidimensionalen Raume.

Von

Ch. Chojnacki (Warszawa).

Es werden in der vorliegenden Arbeit einige Verschlingungssätze für die lokal zusammenhängenden Kurven bewiesen. Sämtliche hier in Betracht kommende Kurven sind im euklidischen 3-dimensionalen Raume zu verstehen. U. a. wird gezeigt (Satz II), dass jede unabzählbare Klasse von lokal zusammenhängenden und *wesentlich unplättbaren* Kurven eine unabzählbare Teilklasse enthält, deren je zwei Kurven miteinander verschlungen sind[1]). Es wird im Ganzen hauptsächlich von der scharfsinnigen Beweismethode von A. Flores[2]) Gebrauch gemacht.

Seien $M$ und $N$ zwei zu den zweien unplättbaren Tetraederkurven von C. Kuratowski[3]) homöomorphe Kurven, und zwar:

$M$ die Vereinigung von 9 Strecken, welche die Punkte $(-1, 0, 0)$, $(0, 0, 0)$ und $(1, 0, 0)$ mit den Punkten $(0, -1, 0)$, $(-1, 1, 0)$ und $(1, 1, 1)$ verbinden;

$N$ die Vereinigung von 10 die Punkte $(-1, 1, 0)$, $(-1, -2, 0)$, $(1, -2, 0)$, $(1, 1, 1)$ und $(0, 0, 1)$ verbindenden Strecken.

Die beiden Kurven sind in ihren simplizialen Zerlegungen in obengenannte Strecken zu betrachten. Dementsprechend bezeichnen

[1]) Eine mir von Herrn B. Knaster mitgeteilte Vermutung.

[2]) A. Flores, *Über die Existenz n-dimensionaler Komplexe, die nicht in den $R_{2n}$ einbettbar sind*, Ergebnisse Menger's Kolloquiums, Heft 5, S. 17—24 (Wien 1933).

[3]) C. Kuratowski, *Sur le problème des courbes gauches en Topologie*, Fund. Math. XV, (1930), S. 272, Fig. 1 und 2.

wir mit $M_2$, bezw. mit $N_2$, die Menge aller derjenigen Punkte $q = p' \times p''$ des kartesischen Quadrats[4]) $M^2$ von $M$ (bezw. $N^2$ von $N$), deren „Koordinaten" $p'$ und $p''$ in *punktfremden* Simplexen von $M$ (bezw. von $N$) liegen[5]).

Für jede homöomorphe Abbildung $h$ von $M$ (bezw. von $N$), setzen wir

$$\bar{h}(q) = a + \frac{\overrightarrow{h(p')\, h(p'')}}{\varrho\,[h(p'),\, h(p'')]},$$

wo $a = (0, 0, 0)$ der Mittelpunkt der Einheitskugel, $q = p' \times p''$ variabler Punkt von $M_2$ (bezw. von $N_2$) ist und der Ausdruck $a + t \cdot \overrightarrow{bc}$ allgemein den Endpunkt des zum Vektor $\overrightarrow{bc}$ parallel verlaufenden Vektors von der Länge $t \cdot \varrho(b, c)$ bezeichnet, dessen Anfangspunkt im Punkte $a$ liegt. Durch $\bar{h}$ wird also eine stetige Abbildung von $M_2$ (bezw. $N_2$) auf eine 2-dimensionale Sphäre $S$ bewirkt.

Nun ist die Menge $M_2$ (bezw. $N_2$) definitionsgemäss ein Polyeder, aus Rechtecken gebaut, die selbst kartesische Produkte gewisser Streckenpaare aus $M$ (bezw. aus $N$) darstellen. Indem man jeden dieser Rechtecke $Q_i$ — etwa mittels Verbindungsstrecken eines inneren Punktes $q_i$ mit den vier Eckpunkten — in Dreiecke zerlegt, wird eine simpliziale Zerlegung des ganzen $M_2$ (bezw. $N_2$) erhalten, die diesen Polyeder als einen geometrischen Komplex zu behandeln gestattet; ordnet man überdies jedem Simplexe der Zerlegung den Koeffizient 1 zu, so wird $M_2$ (bezw. $N_2$) zugleich zu einem algebraischen[6]) Komplex *mod. 2*. Beide Komplexe $M_2$ und $N_2$ sind 2-dimensionale Zyklen mod. 2[7]). Infolgedessen kann der oben angegebenen Abbildung $\bar{h}$ von $M_2$ (bezw. $N_2$) auf die 2-dimensionale

[4]) Vgl. z. B. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografje Matematyczne, Warszawa 1933, S. 7 u. 135.

[5]) Vgl. A. Flores, l. cit., S. 18.

[6]) Die sich auf Simplexe, Komplexe, Zyklen usw. beziehende Nomenklatur ist in dieser Arbeit nach P. Alexandroff, *Einfachste Grundbegriffe der Topologie*, Berlin 1932, zu verstehen.

[7]) A. Flores, l. cit. Die ganze Beweisführung von Herrn Flores betrifft bloss den Komplex $M$, sie gilt aber auch für den Komplex $N$, weil die einzige zu Grunde gelegte Eigenschaft von $M$, die in den Beweisen von Herrn Flores vorkommt, auch für $N$ gilt. Diese Eigenschaft besteht darin, dass *diejenige 1-dimensionale Simplexe des Komplexes, die zu einem bestimmten 1-dimensionalen Simplex desselben punktfremd sind, einen 1-dimensionalen Zyklus bilden.*



Sphäre $S$ eine Zahl $\alpha_{\bar{h}}$ zugeordnet werden, welche den Abbildungsgrad von $\bar{h}$ mod. 2[8]) bezeichnet. Diese Zahl wollen wir nun abschätzen.

Es ist unmittelbar zu bestätigen, dass die Projektion von $M$ (bezw. von $N$) auf die $xy$-Ebene eine eineindeutige, mit Ausnahme von 3, also von einer ungeraden Anzahl von Punktepaaren, ist, die in 3 einzelne Punkte übergehen. Andererseits, führt die Abbildung $\bar{h}_0$, wo $h_0$ die Identität bezeichnet, den Komplex $M_2$ (bezw. $N_2$) auf die Sphäre $S$ derartig über, dass dabei auf den Punkt (0, 0, 1) von $S$ eine endliche Anzahl $\mu$ von Punkten von $M_2$ (bezw. von $N_2$) abgebildet wird, die lauter *innere* Punkte der Rechtecke $Q_i$ sind. Durch passende Wahl der Punkte $q_i$ kann also erreicht werden, dass sich alle $\mu$ Urbilder von (0, 0, 1) in den Inneren der Simplexe von $M_2$ (bezw. von $N_2$) befänden. Da ihre Anzahl, wie bemerkt, eine ungerade ist, so stellt es sich heraus, dass $\alpha_{\bar{h}_0} = 1$. Nach A. Flores[7]) gilt aber $\alpha_{\bar{h}_1} = \alpha_{\bar{h}_2}$ für je zwei homöomorphe Abbildungen $h_1$ und $h_2$ von $M$ (bezw. von $N$). Es gilt also allgemein

(1) $\alpha_{\bar{h}} = 1$ *für beliebige auf* $M$ *(bezw. auf* $N$*) erklärte Homöomorphie* $h$.

Eine Punktmenge $A$ soll *wesentlich unplättbar*[9]) heissen, wenn sie in plättbare (d. h. zu einer Teilmenge der Ebene homöomorphe) Punktmengen *nicht* $\varepsilon$-deformierbar ist, m. a. W. wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, derart dass bei jeder stetigen Abbildung $f$ von $A$, wo $\varrho\,[x, f(x)] < \varepsilon$ für alle $x \in A$ gilt, die Bildmenge $f(A)$ eine unplättbare ist.

Zwei Mengen $A$ und $B$ werden in dieser Arbeit miteinander *verschlungen* heissen[10]), wenn es keine stetige Funktion $\varphi(t, x)$ des Paares $t, x$ (nicht bloss der einzelnen Veränderlichen $t$ und $x$!) gibt, derart dass $\varphi(0, x) = x$ für alle $x \in A + B$ gelte, dass sich ferner die Bilder $\varphi(1, A)$ und $\varphi(1, B)$ auf einzelne Punkte $p_A$ und $p_B$ redu-

[8]) Im Sinne der Definition von H. Hopf, *Die Klassen der Abbildungen der n-dimensionalen Polyeder auf die n-dimensionale Sphäre,* Commentarii Matem. Helvetici 5 (1933), S. 40.

[9]) Vgl. S. Mazurkiewicz, *Über nicht plättbare Kurven*, Fund. Math. XX (1933), S. 281.

[10]) im Sinne der *symmetrischen Homotopieverschlingung*, v. z. B. E. Pannwitz, *Eine Elementargeometrische Eigenschaft von Verschlingungen und Knoten.* Math. Ann. 108 (1933), S. 633 Def. II.

zieren und, schliesslich, dass für jedes $0 \leqslant t \leqslant 1$ die Bilder $\varphi(t, A)$ und $\varphi(t, B)$ zueinander punktfremd seien. Ist bei einem genügend kleinen $\varepsilon > 0$ die Verschlingung von $A$ und $B$ durch keine $\varepsilon$-Deformationen $f_A$ von $A$ und $f_B$ von $B$ auflösbar, so werden die Mengen $A$ und $B$ miteinander *wesentlich verschlungen* genannt. Unter den miteinander verschlungenen Mengen sind also die punktfremden stets wesentlich verschlungen.

*Selbstverschlungen* heisst nach A. Flores[11]) eine Menge $A$, wenn es keine stetige Funktion $\varphi(t, x)$ des Paares $t, x$ gibt, derart dass $\varphi(0, x) = x$ für alle $x \epsilon A$ gelte, dass ferner $\varphi(1, A)$ aus einem einzelnen Punkte $p_A$. bestehe und schliesslich dass $\varphi(t, A)$ für $0 < t \leqslant 1$ zu $A$ punktfremd sei.

Folgende *Eigenschaft* ($E$) einer Menge $A$ wird überdies in Betracht gezogen[12]):

($E$) *Es gibt ein $\varepsilon > 0$ derart, dass keine zwei stetige Funktionen $\varphi_1(t, x)$ und $\varphi_2(t, x)$ des Paares $t, x$ den Bedingungen genügen:*

1⁰ $\varphi_1(0, x) = \varphi_2(0, x) = x$ *für jedes* $x \epsilon A$,

2⁰ $\varphi_1(\vartheta, A) = (p_1)$ *und* $\varphi_2(\vartheta, A) = (p_2)$, *wo* $p_1$ *und* $p_2$ *einzelne Punkte bezeichnen und* $\vartheta > 0$ *ein Wert von* $t$ *ist*,

3⁰ *aus* $\varrho(x', x'') \geqslant \varepsilon$ *folgt* $\varphi_1(t, x') \neq \varphi_2(t, x'')$ *fur je zwei Punkte* $x'$ *und* $x''$ *von* $A$ *und* $0 \leqslant t \leqslant \vartheta$.

Nun beweise ich:

(2) *Ist $A$ eine Menge von der Eigenschaft ($E$), so gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass die $\varepsilon$-Deformationen von $A$ zu lauter miteinander wesentlich verschlungenen[10]) Mengen führen.*

Beweis. Offenbar genügt es zu zeigen, dass für ein $\eta > 0$ etwa je zwei $\eta/2$-Deformationen $f_1$ und $f_2$ von $A$ miteinander schlechthin *verschlungene* Bilder $f_1(A)$ und $f_2(A)$ ergeben, denn es bleibt dann bloss $\varepsilon = \eta/4$ zu setzen. Wählen wir also die Funktionen $f_1$ und $f_2$ fest, setzen

(I) $$\varrho[x, f_1(x)] < \eta/2 > \varrho[x, f_2(x)]$$

voraus und nehmen an, dass die Mengen $f_1(A)$ und $f_2(A)$ miteinander nicht verschlungen sind. Es gibt dann eine stetige Funktion $\varphi(t, x)$

[11]) Vgl. l. cit., S. 17.

[12]) Die Fomulierung dieser Eigenschaft verdanke ich Herrn S. Eilenberg.



wo $0 \leqslant t \leqslant 1$ und $x \epsilon f_1(A) + f_2(A)$ ist, und zwei Punkte $p_1$ und $p_2$ derart dass:

(II) $$\varphi(0, x) = x,$$

(III) $$\varphi[1, f_1(A)] = (p_1) \quad und \quad \varphi[1, f_2(A)] = (p_2),$$

(IV) $$\varphi[t, f_1(A)] \cdot \varphi[t, f_2(A)] = 0.$$

Wir setzen für jedes $x \epsilon A$, wobei $i = 1, 2$:

(V) $$\varphi_i(t, x) = x + t \cdot \overrightarrow{x f_i(x)} \quad \text{für} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

(VI) $$\varphi_i(t, x) = \varphi[t - 1, f_i(x)] \quad \text{für} \quad 1 \leqslant t \leqslant 2.$$

Aus (V) und (VI) ergibt sich nach (II) $\varphi_i(0, x) = x$ und nach (III) $\varphi_i(2, x) = (p_i)$. Die Funktionen $\varphi_i(t, x)$ genügen folglich den Bedingungen 1⁰ und 2⁰ (für $\vartheta = 2$) von ($E$). Dabei sind die beiden Funktionen stetig.

Schliesslich, zeigen wir, dass aus $\varrho(x_1, x_2) \geqslant \eta$, wo $x_1 \epsilon A$ und $x_2 \epsilon A$. die Ungleichung $\varphi_1(t, x_1) \neq \varphi_2(t, x_2)$ folgt. Das Gegenteil davon. könnte in der Tat, wegen (VI) und (IV). nur für $0 \leqslant t \leqslant 1$ stattfinden. Dann aber ergibt sich aus

$$\eta \leqslant \varrho(x_1, x_2) \leqslant \varrho[x_1, \varphi_1(t, x_1)] + \varrho[\varphi_1(t, x_1), \varphi_2(t, x_2)] + \varrho[\varphi_2(t, x_2), x_2]$$

auf Grund von (V)

$$\eta \leqslant \varrho[x_1, f_1(x_1)] + \varrho[\varphi_1(t, x_1), \varphi_2(t, x_2)] + \varrho[x_2, f_2(x_2)],$$

und daraus wegen (I) $\eta < \eta/2 + \varrho[\varphi_1(t, x_1). \varphi_2(t, x_2)] + \eta/2$, so dass $\varrho[\varphi_1(t, x_1), \varphi_2(t, x_2)] > 0$, d. h. $\varphi_1(t, x_1) \neq \varphi_2(t, x_2)$ gilt. Somit genügen die Funktionen $\varphi_1$ und $\varphi_2$ auch der Bedingung 3⁰ von ($E$).

Die Existenz solcher Funktionen widerspricht aber der Eigenschaft ($E$) von $A$, w. z. b. w.

(3) *Ist $K$ eine Kurve von der Eigenschaft ($E$), so ist $K$ selbstverschlungen.*

Beweis. Nehmen wir an, dass die Kurve $K$ nicht selbstverschlungen ist.

Definitionsgemäss gibt es also eine stetige Funktion $\varphi(t, x)$, wo $0 \leqslant t \leqslant 1$ und $x \epsilon K$, sowie einen Punkt $p_1$, derart dass $\varphi(0, x) = x$, $\varphi(1, K) = (p_1)$ und dass $K \cdot \varphi(t, K) = 0$ für $0 < t \leqslant 1$ ist.

Andererseits gibt es, da $K$ (als Kurve) den Raum nicht zerschneidet, eine stetige Funktion $f(t)$, wo $1 \leqslant t \leqslant 2$, und einen Punkt

$$p_2 \; non\text{-}\varepsilon \; \varphi(t, K) \quad für \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

derart dass $f(1) = (p_1)$, $f(2) = (p_2)$ und dass $f(t) \, non\text{-}\varepsilon \, K$ für $1 < t < 2$, folglich also für $1 \leqslant t \leqslant 2$ gilt.

Nun setzen wir:

$$\varphi_1(t, x) = x \quad und \quad \varphi_2(t, x) = \varphi(t, x) \quad für \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$
$$\varphi_1(t, x) = x \quad und \quad \varphi_2(t, x) = f(t) \quad für \quad 1 \leqslant t \leqslant 2,$$
$$\varphi_1(t, x) = \varphi(t-2, x) \quad und \quad \varphi_2(t, x) = f(2) = p_2 \quad für \quad 2 \leqslant t \leqslant 3.$$

Die Existenz von Funktionen $\varphi_1$ und $\varphi_2$ mit solchen Eigenschaften ist aber, wie leicht ersichtlich, mit der Eigenschaft $(E)$ von $K$ unvereinbar.

***Hilfssatz.*** *Alle homöomorphe Bilder der Kurven $M$ und $N$ haben die Eigenschaft $(E)$.*

Beweis. Sei $h$ eine auf $M$ erklärte Homöomorphie und ein $\varepsilon > 0$ derart vorgegeben, dass für jeden Punkt $q = p' \times p''$ von $M_2$ (wo also $p' \in M$ und $p'' \in M$) die Ungleichung $\varrho[h(p'), h(p'')] \geqslant \varepsilon$ gelte.

Nehmen wir an, das Bild $h(M)$ habe die Eigenschaft $(E)$ nicht. Es gibt demnach ein $\vartheta > 0$, zwei Punkte $p_1$, $p_2$ und zwei stetige Funktionen $\varphi_i[t, h(p)]$, wo $i = 1, 2$, $0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ und $p \in M$, mit den Eigenschaften (vgl. 1°—3°, S. 138):

(VII) $$\varphi_i[0, h(p)] = h(p),$$

(VIII) $$\varphi_i[\vartheta, h(p)] = (p_i),$$

(IX) $\varphi_1(t, h(p')] \neq \varphi_2[t, h(p'')]$ *für jeden Punkt* $q = p' \times p''$ *von* $M_2$ *und für* $0 \leqslant t \leqslant \vartheta$.

Setzen wir aber

$$\varphi(t, q) = a + \frac{\overrightarrow{\varphi_1[t, h(p')] \, \varphi_2[t, h(p'')]}}{\varrho\{\varphi_1[t, h(p')], \varphi_2[t, h(p'')]\}},$$

so ist die Funktion $\varphi$ in bezug auf $q$ eine stetige, denn nach (IX) der Nenner $\varrho\{\varphi_1[t, h(p')], \varphi_2[t, h(p'')]\}$ für alle $q \in M_2$ positiv ist.



Nach der Formel (VII) hätten wir $\varphi(0, q) = \bar{h}(q)$ und nach (VIII) $\varphi(\vartheta, q) = a + \dfrac{\overrightarrow{p_1 \, p_2}}{\varrho(p_1, p_2)} = const.$, also $\alpha_{\bar{h}} = 0$, der auf S. 137 bewiesenen Behauptung (1) zuwider.

Für den Fall der Kurve $N$ braucht man nur $M$ durch $N$ zu ersetzen.

***Satz I.*** *Alle wesentlich unplättbare lokal zusammenhängende Kurven haben die Eigenschaft $(E)$.*

Beweis. Ist $K$ eine solche Kurve, so enthält $K$ zu $M$ oder zu $N$ homöomorphe Teilkurven [13], die aber, dem Hilfssatze zufolge, die Eigensachaft $(E)$ besitzen. Umsomehr hat also $K$ diese Eigenschaft, w. z. b. w.

Nach C. Kuratowski [14]) enthält jede *lokale Baumkurve*, die unplättbar ist, ein von $M$ oder von $N$ homöomorphes Bild. Nach dem Hilfssatze ergibt sich daraus folgender

***Satz I'.*** *Alle unplättbare lokale Baumkurven haben die Eigenschaft $(E)$.*

Der Satz I ergibt auf Grund von (2) und (3) die beiden folgenden Korollare:

***Korollar 1.*** *Zu jeder lokal zusammenhängenden wesentlich unplättbaren Kurve $K$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass je zwei durch $\varepsilon$-Deformationen entstandene Bilder von $K$ miteinander verschlungen [10]) sind.*

Das Korollar 1 besagt also, dass jede lokal zusammenhängende wesentlich unplättbare Kurve $K$ mit sich selbst wesentlich verschlungen ist (im Sinne der Definition der wesentlichen Verschlingung, wenn in ihr $A = B = K$ gesetzt wird).

***Korollar 2.*** *Jede lokal zusammenhängende wesentlich unplättbare Kurve ist selbstverschlungen.*

***Satz II.*** *Jede unabzählbare Klasse $\mathfrak{K}$ lokal zusammenhängender wesentlich unplättbarer Kurven enthält eine unabzählbare Teilklasse $\mathfrak{C}$ derselben, in der je zwei Kurven miteinander wesentlich verschlungen [10]) sind.*

Beweis. Offenbar kann angenommen werden, dass sämtliche zu $\mathfrak{K}$ gehörenden Kurven in der Einheitskugel $G$ liegen. Nach

[13]) Nach dem Satze von S. Mazurkiewicz, l. cit., Fund. Math. XX, S. 281.
[14]) C. Kuratowski, l. cit., Fund. Math. XV, S. 272, Fussnote [1]).

dem unter [13]) zitierten Satze von S. Mazurkiewicz gibt es zu jeder Kurve $K \in \mathfrak{K}$ eine auf $M$ oder auf $N$ erklärte Homöomorphie $h_K$, derart dass $h_K(M) \subset K$ oder $h_K(N) \subset K$ besteht. Seien $H_M$ und $H_N$ die Klassen dieser Homöomorphien. Wären die beiden Klassen abzählbar, so gäbe es ein $h \in H_M$, bezw. $h \in H_N$, derart dass die Menge $h(M)$, bezw. $h(N)$, in unabzählbar vielen Kurven von $\mathfrak{K}$ enthalten sein müsste. Dann würden aber bereits in der aus diesen Kurven bestehenden Teilklasse $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{K}$, auf Grund des Hilfssatzes und nach (2), je zwei Kurven miteinander wesentlich verschlungen. Wir können also annehmen, dass die Menge $H_M$, bezw. $H_N$, eine unabzählbare ist. Der Raum $G^M$ (bezw. $G^N$) sämtlicher stetiger Abbildungen von $M$ (bezw. von $N$) auf Teilmengen der Kugel $\mathcal{G}$ [15]), in welchem $H_M$, bezw. $H_N$, als dessen Teilmenge liegt, ist bekanntlich separabel [16]). Daher enthält $H_M$, bezw. $H_N$, als Teilmenge dieses Raumes ein Verdichtungselement $h'$.

Dem Hilfssatze und der Behauptung (2) zufolge gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass je zwei $\varepsilon$-Deformationen der Kurve $h'(M)$, bezw. $h'(N)$, miteinander wesentlich verschlungene Bilder ergeben. Sei $\mathfrak{C}$ die aus denjenigen Kurven $K$ bestehende Teilklasse von $\mathfrak{K}$, für welche $h_K \in H_M$ (bezw. $H_N$) und $\varrho(h_K, h') < \varepsilon$ gilt. Da $h'$ ein Verdichtungselement von $H_M$ (bezw. von $H_N$) ist, so ist $\mathfrak{C}$ sicher unabzählbar. Für je zwei Kurven $K_i$ $(i = 1, 2)$ von $\mathfrak{C}$ haben wir $\varrho(h_{K_i}, h') < \varepsilon$, so dass die beiden Teilkurven $h_{K_i}(M)$, bezw. $h_{K_i}(N)$, von $K_i$, als $\varepsilon$-Deformationsbilder der Kurve $h'(M)$, bezw. $h'(N)$, miteinander wesentlich verschlungen sind. Umsomehr sind die ganzen Kurven $K_i$ miteinander wesentlich verschlungen, w. z. b. w.

In gewissem Maasse kann der Satz II auch als ein räumlicher Analogon des Moore'schen Satzes über das Verhalten von sogenannten *Trioden* auf der Ebene angesehen werden [17]). Übrigens lässt sich der Satz von R. L. Moore über die Trioden direkt aus dem soeben bewiesenen Satz II erhalten, und zwar durch Projezierung der auf den Zylindermengen dieser Trioden gezeichneten Kurven $M$ auf die Ebene, in der die Trioden liegen.

[15]) Für Bezeichnungsweise und Metrisierung dieses Raumes s. z. B. C. Kuratowski, *Topologie I*, S. 199.

[16]) Vgl. M. Fréchet, *Thèse*, Paris 1906, S. 36 und K. Borsuk, *Sur les rétractes*, Fund. Math. XVII (1931), S. 165.

[17]) Vgl. R. L. Moore, *Concerning triods in the plane*..., Proceed. Nat. Acad. of Sc., 14 (1928), S. 85—88, sowie den verallgemeinerten Satz in *Concerning triodic-continua in the plane*, Fund. Math. XIII (1929), S. 261—263.

# On the differentiability of multiple integrals.

By

A. Zygmund (Wilno).

## § 1.

1. Let $f(x, y)$ be a function of two variables, defined in the square $(S)$ $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, and let

$$F(Q) = \int\int_{Q} f(x, y)\, dx\, dy,$$

where $Q \subset S$ in an arbitrary rectangle with sides parallel to the axis. Let $Q(x_0, x_0 + h; y_0, y_0 + k)$ denote the rectangle $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$, $y_0 \leqslant y \leqslant y_0 + k$. It is well-known that for almost every $(x_0, y_0)$ in $S$ we have $\lim F(Q)/|Q| = f(x_0, y_0)$ [1]), where $Q = Q(x_0, x_0 + h; y_0, y_0 + k)$ and $h$, $k$ tend *regularly* to 0, that is the ratios $h/k$ and $k/h$ are bounded.

It has been recently proved by Saks that

(i) if $f$ is bounded, the word „regularly" in the above theorem may be omitted [2])

(ii) there exists an integrable (summable) $f$ such that at every point $(x_0, y_0) \in S$ we have $\limsup_{h,k \to 0} F(Q)/|Q| = +\infty$, where $Q = Q(x_0, x_0 + h; y_0, y_0 + k)$ [3]).

The object of this paper is to generalize the first of these results and to apply this generalization to the theory of double Fourier

[1]) We denote by $|Q|$ the measure of $Q$.

[2]) Saks, *Théorie de l'intégrale*, Monogr. Mat. II, Warszawa, 1933, p. 1—290, esp. p. 231—232. See also: F. Riesz, Fund. Math. 22 (1934), 221—225; Busemann u. Feller, ibid., 226—256, esp. 242.

[3]) Saks, Fund. Math., 22 (1934), p. 257—261; also Busemann u. Feller, l. c., esp. 243—247.