Soit maintenant $E(s)$ un ensemble quelconque de la forme (3) et soit P un ensemble parfait donné quelconque. Si $E(s)$ est de deuxième catégorie sur P, il existe une portion Π de P sur laquelle $E(s)$ est partout de deuxième catégorie, et il existe un ensemble dénombrable de termes (non vides) de la somme (3), soit E_{α_i} $(i=1,2,...)$, tel que l'ensemble $H=\sum_{i=1}^{\infty} E_{\alpha_i}$ est dense dans Π. Or, H est, comme nous savons, un ensemble G_δ relativement à S et (l'ensemble H étant dense dans Π) il en résulte sans peine que l'ensemble $S-H$, donc (d'après $E(s) \subset S$) à plus forte raison l'ensemble $E(s)-H$ est de 1re catégorie sur Π. On a donc $E(s)=H+K$, où H est un F_σ et K est un ensemble de 1re catégorie par rapport à P. L'ensemble parfait P pouvant être quelconque, cela prouve que l'ensemble $E(s)$ jouit de la propriété de Baire.

Le raisonnement ultérieur est le même que plus haut.

Sur une propriété des ensembles linéaires quelconques.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant:

Théorème I: *S'il n'existe aucun aleph inaccessible $\leqslant 2^{\aleph_0}$, tout ensemble linéaire indénombrable E contient une infinité indénombrable d'ensembles disjoints, dont chacun a la mesure extérieure égale à celle de l'ensemble E.*

Nous déduirons ce théorème du théorème de M. S. Ulam, d'après lequel, s'il n'existe aucun aleph inaccessible $\leqslant 2^{\aleph_0}$, tout ensemble linéaire de mesure extérieure positive contient une infinité non dénombrable d'ensembles disjoints, dont chacun est de mesure extérieure positive [1]). Cette déduction est d'ailleurs beaucoup plus difficile qu'on pourrait le croire [2]).

Dans ce qui suit nous désignons par $|Z|$ la mesure extérieure de l'ensemble (linéaire) Z.

Appelons *ensemble élémentaire* toute somme d'un nombre fini d'intervalles fermés aux extrémités rationnelles. La famille de tous les ensembles élémentaires est évidemment dénombrable.

Lemme I. *Z étant un ensemble linéaire borné et ε un nombre positif, il existe toujours un ensemble élémentaire Δ, tel que*

$$|\Delta| < |Z| + \varepsilon$$

et

$$|\Delta Z| > |Z| - \varepsilon.$$

[1]) ***Fund. Math.*** t. XX, p. 223.

[2]) Beaucoup plus facile est une déduction analogue d'un théorème concernant la catégorie des ensembles: voir ma Note dans ***Fund. Math.*** t. XXII, p. 1.

Démonstration.

Soit Z un ensemble linéaire borné, ε un nombre positif. Il résulte de la définition de la mesure extérieure qu'il existe une suite infinie d'intervalles fermés aux extrémités rationnelles $d_1, d_2, d_3, \ldots$, telle que

(1) $$Z \subset d_1 + d_2 + d_3 + \ldots$$

et

(2) $$|d_1| + |d_2| + |d_3| + \ldots < |Z| + \varepsilon.$$

La série (2) étant convergente, il existe un nombre naturel p, tel que

(3) $$|d_{p+1}| + |d_{p+2}| + \ldots < \varepsilon.$$

Posons

(4) $$\Delta = d_1 + d_2 + \ldots + d_p$$

— ce sera évidemment un ensemble élémentaire et, d'après (2), on a

$$|\Delta| \leqslant |d_1| + |d_2| + \ldots + |d_p| < |Z| + \varepsilon.$$

Or, d'après (1) et (4) on trouve

$$Z = \Delta Z + (d_{p+1} + d_{p+2} + \ldots) Z,$$

d'où

(5) $$|Z| \leqslant |\Delta Z| + |(d_{p+1} + d_{p+2} + \ldots) Z|.$$

Or, d'après (3)

$$|(d_{p+1} + d_{p+2} + \ldots) Z| \leqslant |d_{p+1} + d_{p+2} + \ldots| < |d_{p+1}| + |d_{p+2}| + \ldots < \varepsilon,$$

et la formule (5) donne:

$$|Z| < |\Delta Z| + \varepsilon.$$

Notre lemme est ainsi démontré.

Lemme II. Φ étant une famille dénombrable d'ensembles linéaires bornés de mesure extérieure positive, il existe un ensemble fermé F de mesure positive, tel que pour tout nombre $\varepsilon > 0$ la famille Φ contient une infinité indénombrable d'ensembles Z, pour lesquels $|FZ| > > |F| - \varepsilon$ [1]).

[1]) Comme j'ai démontré dans ma Note du 24 Mai 1934, publiée dans les *C. R. Soc. Sc. Varsovie*, si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, on ne peut pas se débarasser dans le lemme II du nombre ε.

Démonstration.

Soit Φ une famille indénombrable d'ensembles linéaires de mesure extérieure > 0. Le nombre positif a étant suffisamment petit, il existe donc une partie indénombrable Φ_0 de la famille Φ, telle qu'on a $|Z| > 2a$ pour tout ensemble Z de la famille Φ_0.

Posons $\varepsilon_n = a/2^n$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ Z étant un ensemble de la famille Φ_0, il existe, d'après le lemme I, un ensemble élémentaire Δ_Z, tel que $|\Delta_Z| < |Z| + \varepsilon_1$ et $|\Delta_Z Z| > |Z| - \varepsilon_1 > 2a - \varepsilon_1$. La famille Φ_0 étant indénombrable et celle de tous les ensembles élémentaires étant dénombrable, il existe un ensemble élémentaire Δ^1 et une partie indénombrable Φ_1 de la famille Φ_0, tels que $\Delta_Z = \Delta^1$ pour $Z \epsilon \Phi_1$. On a donc $|\Delta^1 Z| > 2a - \varepsilon_1$ pour $Z \epsilon \Phi_1$ et il existe, d'après le lemme I (appliqué à l'ensemble $\Delta^1 Z$), pour tout ensemble Z de la famille Φ_1 un ensemble élémentaire Δ'_Z, tel que $|\Delta'_Z| < |\Delta^1 Z| + \varepsilon_2$ et $|\Delta^1 \Delta'_Z Z| < |\Delta^1 Z| - \varepsilon_2 > 2a - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Comme plus haut, on en conclut qu'il existe un ensemble élémentaire Δ^2 et une partie indénombrable Φ_2 de la famille Φ_1, tels que $\Delta'_Z = \Delta^2$ pour $Z \epsilon \Phi_2$. On a donc $|\Delta_2| < |\Delta^1 Z| + \varepsilon_2$ et $|\Delta^1 \Delta^2 Z| > 2a - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ pour tout ensemble Z de la famille Φ_2.

En raisonnant ainsi de suite, on obtient une suite infinie de parties indénombrables de la famille Φ,

$$\Phi_1 \supset \Phi_2 \supset \Phi_3 \supset \ldots,$$

et une suite infinie d'ensembles élémentaires

$$\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \ldots,$$

tels qu'on a

(6) $$|\Delta^n| < |\Delta^1 \Delta^2 \ldots \Delta^{n-1} Z| + \varepsilon_n, \quad \text{pour} \quad Z \epsilon \Phi_n \text{ et } n = 1, 2, 3, \ldots$$

et

(7) $$|\Delta^1 \Delta^2 \ldots \Delta^n Z| > 2a - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \ldots - \varepsilon_n = a + \frac{a}{2^n}.$$

Posons

(8) $$F = \Delta^1 \Delta^2 \Delta^3 \ldots$$

— ce sera évidemment un ensemble fermé. D'après (7) on a (pour tout nombre n naturel)

$$|\Delta^1 \Delta^2 \ldots \Delta^n| \geqslant |\Delta^1 \Delta^2 \ldots \Delta^n Z| > a + \frac{a}{2^n} > a,$$

d'où, d'après (8) (les ensembles Δ^n étant mesurables):

$$(9) \qquad |F| \geqslant a > 0.$$

Or, d'après (8) on a $F \subset \Delta^n$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, donc, d'après (6):

$$(10) \quad |F| < |\Delta^1 \Delta^2 \ldots \Delta^{n-1} Z| + \varepsilon_n, \quad \text{pour} \quad Z \epsilon \Phi_n \text{ et } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Soit maintenant ε un nombre positif donné quelconque. Il résulte de (8) et de la définition des nombres ε_n (les ensembles Δ^n étant mesurables) qu'il existe un nombre naturel p, tel que

$$|F| > |\Delta^1 \Delta^2 \ldots \Delta^p| - \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{p+1} < \varepsilon/2$$

ce qui donne, d'après $F \subset \Delta^1 \Delta^2 \ldots \Delta^p$:

$$|\Delta^1 \Delta^2 \ldots \Delta^p - F| = |\Delta^1 \Delta^2 \ldots \Delta^p| - |F| < \varepsilon/2$$

d'où:

$$(11) \quad |\Delta^1 \Delta^2 \ldots \Delta^p Z - FZ| \leqslant |\Delta^1 \Delta^2 \ldots \Delta^p - F| < \varepsilon/2, \text{ pour } Z \epsilon \Phi_{p+1}.$$

Or, on a, d'après $F \subset \Delta^1 \Delta^2 \ldots \Delta^p$ (pour $Z \epsilon \Phi_{p+1}$)

$$\Delta^1 \Delta^2 \ldots \Delta^p Z = FZ + (\Delta^1 \Delta^2 \ldots \Delta^p Z - FZ),$$

d'où:

$$|\Delta^1 \Delta^2 \ldots \Delta^p Z| \leqslant |FZ| + |\Delta^1 \Delta^2 \ldots \Delta^p Z - FZ|,$$

donc, d'après (11):

$$(12) \qquad |\Delta^1 \Delta^2 \ldots \Delta^p Z| < |FZ| + \varepsilon/2, \quad \text{pour} \quad Z \epsilon \Phi_{p+1}.$$

Or, d'après (10), pour $n = p+1$ on trouve, d'après $\varepsilon_{p+1} < \varepsilon/2$:

$$|F| < |\Delta^1 \Delta^2 \ldots \Delta^p Z| + \varepsilon/2, \quad \text{pour} \quad Z \epsilon \Phi_{p+1}:$$

l'inégalité (12) donne donc

$$|FZ| > |F| - \varepsilon, \quad \text{pour} \quad Z \epsilon \Phi_{p+1}$$

et (Φ_{p+1} étant une famille indénombrable d'ensemble de la famille Φ) le lemme II est démontré.

Lemme III. *Φ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ étant une suite infinie d'ensembles indénombrables (formés d'éléments quelconques), il existe une suite infinie d'ensembles disjoints Ψ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, telle que, pour tout n naturel, l'ensemble Ψ_n est indénombrable et contenu dans Φ_n.*

Démonstration.

Nous définirons par l'induction transfinie une suite transfinie du type Ω, $\{s_\xi\}_{\xi<\Omega}$, de suites infinies $s_\xi = (a_\xi^1, a_\xi^2, a_\xi^3, \ldots)$, où $a_\xi^n \epsilon \Phi_n$ pour $\xi < \Omega$ et $n = 1, 2, 3, \ldots$, comme il suit.

Les ensembles Φ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ étant indénombrables, il existe une suite infinie $s_1 = (a_1^1, a_1^2, a_1^3, \ldots)$ à termes différents et telle que $a_1^n \epsilon \Phi_n$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

Soit maintenant α un nombre ordinal donné quelconque > 1 et $< \Omega$ et supposons que nous avons déjà défini toutes les suites s_ξ pour $\xi < \alpha$. L'ensemble S_α de toutes les éléments a_ξ^n, où $\xi < \alpha$ et $n = 1, 2, 3, \ldots$ est dénombrable (puisque $\alpha < \Omega$) et, les familles Φ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ étant non dénombrables, il existe une suite infinie $s_\alpha = (a_\alpha^1, a_\alpha^2, a_\alpha^3, \ldots)$ aux termes différents et telle que $a_\alpha^n \epsilon \Phi_n - S_\alpha$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ La suite transfinie $\{s_\xi\}_{\xi<\Omega}$ est ainsi définie par l'induction transfinie.

Désignons maintenant, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, par Ψ_n l'ensemble de tous les éléments a_ξ^n, où $\xi < \Omega$. On voit sans peine que les ensembles Ψ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ satisfont aux conditions du lemme III qui est ainsi démontré.

Lemme IV. *Si l'ensemble linéaire E contient une famille indénombrable Φ d'ensembles disjoints de mesure extérieure positive, il existe un ensemble linéaire fermé F de mesure positive et une famille indénombrable Ψ de sous-ensembles disjoints de l'ensemble E, tels qu'on a pour tout ensemble Z de la famille Ψ l'égalité: $|FZ| = |F|$.*

Démonstration.

Tout ensemble de mesure extérieure positive contenant un sous-ensemble borné de mesure extérieure positive, nous pouvons évidemment supposer que les ensembles constituant la famille Φ sont bornés. D'après le lemme II il existe donc un ensemble fermé F de mesure > 0, tel que pour tout nombre naturel n la famille Φ contient une partie indénombrable Φ_n, telle que $|FZ| > |F| - \frac{1}{n}$, pour $Z \epsilon \Phi_n$.

Or, d'après le lemme III il existe une suite infinie de familles indénombrables et disjointes Ψ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, telle que $\Psi_n \subset \Phi_n$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

Soit n un nombre naturel. La famille Ψ_n étant inénombrable il existe une suite transfinie du type Ω, $\{E_\xi^n\}_{\xi<\Omega}$ formée d'ensembles distincts de la famille Ψ_n. Les familles Ψ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ étant disjointes, les ensembles E_ξ^n, où $\xi < \Omega$ et $n = 1, 2, 3, \ldots$, sont tous distincts, donc, comme appartenant à la famille Φ, deux à deux disjoints.

Posons, pour $\xi < \Omega$:

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} E_\xi^n \tag{13}$$

— ce seront évidemment des sous-ensembles de l'ensemble E (puisque $E_\xi^n \in \Psi_n \subset \Phi_n \subset \Phi$, pour $\xi < \Omega$ et $n = 1, 2, 3, \ldots$). Les ensembles E_ξ^n, où $\xi < \Omega$ et $n = 1, 2, 3, \ldots$ étant deux à deux disjoints, les ensembles E_ξ $(\xi < \Omega)$ le sont aussi: soit Ψ leur famille.

D'après (13) on a pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ et tout $\xi < \Omega$

$$E_\xi \supset E_\xi^n; \tag{14}$$

or, d'après $E_\xi^n \in \Psi_n \subset \Phi_n$ et d'après la définition de la famille Φ_n, on a

$$|FE_\xi^n| > |F| - \frac{1}{n},$$

donc, d'après (14):

$$|FE_\xi| \geqslant |FE_\xi^n| > |F| - \frac{1}{n} \quad \text{pour } \xi < \Omega \text{ et } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

ce qui donc

$$|FE_\xi| \geqslant |F| \quad \text{pour} \quad \xi < \Omega,$$

donc

$$|FE_\xi| = |F| \quad \text{pour} \quad \xi < \Omega,$$

puisque évidemment $|FE_\xi| \leqslant |F|$, pour $\xi < \Omega$.

On a donc pour tout ensemble $Z = E_\xi$ de la famille Ψ l'égalité $|FZ| = |F|$. La famille Ψ étant formée d'une infinité indénombrable de sous-ensembles disjoints de l'ensemble E, le lemme IV est démontré.

Nous allons maintenant à démontrer le théorème I. Il le suffira évidemment de démontrer dans le cas, où E est un ensemble linéaire borné de mesure extérieure positive.

Soit donc E un tel ensemble et admettons qu'il n'existe aucun aleph inaccessible $\leqslant 2^{\aleph_0}$. D'après le théorème de M. Ulam cité au début de cette Note et d'après le lemme IV il existe au moins un ensemble fermé F de mesure positive, jouissant de la propriété P suivante:

(P): Il existe une infinité indénombrable de sous-ensembles disjoints Z de E, tels que $|FZ| = |F|$.

Soient

$$F_1, F_2, \ldots, F_\omega, F_{\omega+1}, \ldots, F_\xi, \ldots \quad (\xi < \varphi) \tag{15}$$

tous les ensembles fermés de mesure positive jouissant de la propriété P.

Définissons par l'induction transfinie une suite transfinie extraite de la suite (15) par la convention suivante:

$F_{\alpha_1} = F_1$ et, pour $\lambda > 1$, F_{α_λ} est le premier terme de la suite (15) qui est disjoint avec chacun des ensembles F_{α_ξ}, où $\xi < \lambda$.

La suite (finie ou transfinie)

$$F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \ldots, F_{\alpha_\omega}, F_{\alpha_{\omega+1}}, \ldots, F_{\alpha_\xi}, \ldots \quad (\xi < \vartheta) \tag{16}$$

ainsi obtenue est au plus dénombrable, en tant que formée d'ensembles fermés disjoints de mesure positive. On peut donc ranger tous les termes de la suite (16) en une suite finie ou infinie (du type ω)

$$H_1, H_2, H_3, \ldots \tag{17}$$

Je dis que

$$|E| \leqslant |H_1| + |H_2| + |H_3| + \ldots \tag{18}$$

En effet, admettons que $|E| > |H_1| + |H_2| + \ldots$ L'ensemble

$$E^* = E - (H_1 + H_2 + H_3 + \ldots) \tag{19}$$

est donc de mesure extérieure positive et, d'après le théorème de M. Ulam et le lemme IV, il existe un ensemble fermé F de mesure positive, tel qu'on a $|FZ| = |F|$ pour une infinité indénombrable de sous-ensembles disjoints Z de E^*, donc aussi de E (puisque $E^* \subset E$). Comme il existe un sous-ensemble Z de E^* tel que $|FZ| = |F|$, on a $|FE^*| \geqslant |F|$. Or, d'après (19),

$$FE^* = FE - (FH_1 + FH_2 + \ldots) \subset F - (FH_1 + FH_2 + \ldots),$$

d'où

$$|F - (H_1 + H_2 + \ldots)| = |F - (FH_1 + FH_2 + \ldots)| \geqslant |FE^*| \geqslant |F| > 0,$$

et l'ensemble $F - (H_1 + H_2 + \ldots)$ étant mesurable (en tant qu'un G_δ) il existe un ensemble fermé F^* de mesure positive, tel que

$$F^* \subset F - (H_1 + H_2 + \ldots). \tag{20}$$

Soit Z un sous-ensemble de E, tel que $|FZ| = |F|$. D'après (20) on a $F^* \subset F$, donc, F et F^* étant mesurables:

$$|FZ| = |F^*Z| + |(F - F^*)Z|. \tag{21}$$

Or, on a $|FZ| = |F|$ et $|F| = |F^*| + |F - F^*|$: l'égalité (21) donne donc

$$|F^*Z| + |(F - F^*)Z| = |F^*| + |F - F^*|,$$

d'où, d'après les inégalités évidentes $|F^*Z| \leqslant |F^*|$ et $|(F - F^*)Z| \leqslant \leqslant |F - F^*|$, on trouve

$$|F^*Z| = |F^*|.$$

Tout ensemble $Z \subset E$ qui satisfait à la condition $|FZ| = |F|$ satisfait donc aussi à la condition $|F^*Z| = |F^*|$. La famille de tels sous-ensembles Z de E étant indénombrable, on conclut que l'ensemble F^* jouit de la propriété P. En tant qu'un ensemble fermé de mesure > 0, c'est donc un terme de la suite (15), soit $F^* = F_\mu$. D'après (20), l'ensemble F_μ serait disjoint avec tout ensemble de la suite (17) et (ce qui revient au même) avec tout ensemble de la suite (16). Or, c'est impossible, puisque, d'après la définition de la suite (16), F_μ serait dans ce cas un terme de cette suite, ce qui implique une contradiction, $F_\mu = F^*$ étant de mesure positive.

L'inégalité (18) est ainsi établie.

Les ensembles de la suite (17) jouissant de la propriété P, il existe pour tout n naturel une suite transfinie du type Ω, $\{E_\xi^n\}_{\xi<\Omega}$ de sous-ensembles disjoints de E, tels que

$$(22) \qquad |H_n E_\xi^n| = |H_n| \quad \text{pour} \quad \xi < \Omega.$$

Posons, pour $\xi < \Omega$:

$$(23) \qquad E_\xi = H_1 E_\xi^1 + H_2 E_\xi^2 + H_3 E_\xi^3 + \ldots$$

Les ensembles (17) étant disjoints et les ensembles E_ξ^n $(\xi < \Omega)$ étant disjoints pour n fixe, on voit sans peine que les ensemble E_ξ $(\xi < \Omega)$ sont des sous-ensembles disjoints de l'ensemble E. Or, d'après (23) et (22), on trouve, les ensembles (17) étant disjoints et mesurables:

$$|E_\xi| = |H_1 E_\xi^1| + |H_2 E_\xi^2| + \ldots = |H_1| + |H_2| + \ldots,$$

donc, d'après (18):

$$|E_\xi| \geqslant |E|, \quad \text{pour} \quad \xi < \Omega,$$

ce qui donne, d'après $E_\xi \subset E$ pour $\xi < \Omega$:

$$|E_\xi| = |E| \quad \text{pour} \quad \xi < \Omega.$$

Les ensembles E_ξ $(\xi < \Omega)$ satisfont donc aux conditions du théorème I qui est ainsi démontré.

Il est à remarquer que, *sans admettre aucune hypothèse sur le nombre* $2^{\aleph_0}$, on peut démontrer ce

Théorème II: *Tout ensemble linéaire infini E contient une infinité d'ensembles disjoints, dont chacun a la mesure extérieure égale à celle de l'ensemble E.*

En effet, M. N. Lusin a démontré récemment [1]) que si E est un ensemble linéaire de mesure extérieure positive, il existe un ensemble parfait Q de mesure positive et deux sous-ensembles disjoins de E, E_1 et E_2, tels que $|E_1 Q| = |E_2 Q| = |Q|$. Par le même raisonnement par lequel nous avons déduit de notre lemme IV notre theorème I, on déduit de cette proposition de M. Lusin que tout ensemble linéaire E qui n'est pas de mesure nulle contient deux ensembles disjoints, E_1 et E_1', dont chacun a la mesure extérieure égale à celle de l'ensemble E. L'ensemble E_1' contient donc deux ensembles disjoints, E_2 et E_2', dont chacun a la mesure extérieure égale à celle de E_1', donc aussi à celle de E. En repetant le même raisonnement avec E_2' et ainsi de suite, on obtient une suite infinie $E_1, E_2, E_3, \ldots$ de sous-ensembles disjoints de E, dont chacun a la mesure extérieure égale à celle de E, c. q. f. d.

Il résulte sans peine du théorème II que, pour les ensembles linéaires E, la condition $|E| = 0$ équivaut à la propriété (P_0) suivante:

(P_0): *Tout sous-ensemble de E est mesurable relativement à E* [2]).

Or, M. S. Eilenberg a démontré [3]) que la propriété (P_0) est équivalente à chacune de trois propriétés suivantes:

(P_1): *La mesure extérieure est une fonction additive de sous-ensembles de E.*

(P_2): *La mesure extérieure est une fonction complètement additive de sous-ensembles de E.*

(P_3): *Chaque fonction réelle définie sur E admet une extension à une fonction mesurable.*

Chacune des propriétés (P_0), (P_1), (P_2) et (P_3) est donc équivalente à l'égalité $|E| = 0$ (et, grâce au théorème de M. Lusin, nous savons maintenant démontrer cela sans faire appel à une hypothèse quelconque sur le nombre $2^{\aleph_0}$).

[1]) *C. R. Paris* t. 198, p. 1674 (Note du 7 Mai 1934).

[2]) c. à. d. est un produit de E et d'un ensemble mesurable.

[3]) *C. R. Soc. Sc. Varsovie* (Cl. III), XXV (1932), p. 95.

En rapport avec un théorème de M. S. Ruziewicz, M. Eilenberg a démontré encore [1]) la proposition suivante:

Pour qu'il existe pour toute fonction réelle $f(p)$ définie sur un ensemble E [2]) *une fonction mesurable $\varphi(x)$ telle que*

$$f(p) = \varphi(\psi(p)),$$

où $\psi(p)$ est une fonction réelle fixe, définie sur E, il faut et il suffit que

1°) *ψ soit une fonction à valeurs distinctes,*

2°) *$\psi(E)$ jouisse de la propriété (P_0).*

La condition 2° peut donc être remplacée ici par la condition que $|\psi(E)| = 0$.

[1]) l. c., p. 96, Théorème 3.

[2]) E peut être un ensemble abstrait arbitraire.

Über wesentlich unplättbare Kurven im dreidimensionalen Raume.

Von

Ch. Chojnacki (Warszawa).

Es werden in der vorliegenden Arbeit einige Verschlingungssätze für die lokal zusammenhängenden Kurven bewiesen. Sämtliche hier in Betracht kommende Kurven sind im euklidischen 3-dimensionalen Raume zu verstehen. U. a. wird gezeigt (Satz II), dass jede unabzählbare Klasse von lokal zusammenhängenden und *wesentlich unplättbaren* Kurven eine unabzählbare Teilklasse enthält, deren je zwei Kurven miteinander verschlungen sind [1]). Es wird im Ganzen hauptsächlich von der scharfsinnigen Beweismethode von A. Flores [2]) Gebrauch gemacht.

Seien M und N zwei zu den zweien unplättbaren Tetraederkurven von C. Kuratowski [3]) homöomorphe Kurven, und zwar:

M die Vereinigung von 9 Strecken, welche die Punkte $(-1, 0, 0)$, $(0, 0, 0)$ und $(1, 0, 0)$ mit den Punkten $(0, -1, 0)$, $(-1, 1, 0)$ und $(1, 1, 1)$ verbinden;

N die Vereinigung von 10 die Punkte $(-1, 1, 0)$, $(-1, -2, 0)$, $(1, -2, 0)$, $(1, 1, 1)$ und $(0, 0, 1)$ verbindenden Strecken.

Die beiden Kurven sind in ihren simplizialen Zerlegungen in obengenannte Strecken zu betrachten. Dementsprechend bezeichnen

[1]) Eine mir von Herrn B. Knaster mitgeteilte Vermutung.

[2]) A. Flores, *Über die Existenz n-dimensionaler Komplexe, die nicht in den R_{2n} einbettbar sind*, Ergebnisse Menger's Kolloquiums, Heft 5, S. 17—24 (Wien 1933).

[3]) C. Kuratowski, *Sur le problème des courbes gauches en Topologie*, Fund. Math. XV, (1930), S. 272, Fig. 1 und 2.