Posons $\psi(0)=0$, et, si n est un nombre naturel, posons

(2) $$\psi(x)=\frac{1}{2^{2n-2}}f_n(2^{2n-1}x-1) \quad \text{pour} \quad \frac{1}{2^{2n-1}}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2^{2n-2}}$$

et

(3) $$\psi(x)=[4f_n(0)-f_{n+1}(1)]x+\frac{f_{n+1}(1)}{2^{2n-1}}-\frac{f_n(0)}{2^{2n-2}} \text{ pour } \frac{1}{2^n}<x<\frac{1}{2^{2n-1}}.$$

Les fonctions $f_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ étant continues dans I et ne prenant que des valeurs de cet intervalle, on vérifie sans peine que la fonction $\psi(x)$ est continue dans l'intervalle I.

Soit maintenant n un nombre naturel donné. Je dis que (pour $0\leqslant x\leqslant 1$)

(4) $$f_n(x)=\varphi^{n-1}\psi\,\vartheta^{n-1}\chi(x)\ ^{1)}.$$

En effet, soit x un nombre de l'intervalle I. On a donc, d'après (1):

(5) $$\vartheta^{n-1}(\chi(x))=\frac{x+1}{2^{2n-1}},$$

donc, d'après $0\leqslant x\leqslant 1$:

$$\frac{1}{2^{2n-1}}\leqslant\vartheta^{n-1}\chi(x)\leqslant\frac{1}{2^{2n-2}}$$

ce qui donne, d'après (2) et (5):

$$\psi\vartheta^{n-1}\chi(x)=\frac{1}{2^{2n-2}}f_n(2^{2n-1}\vartheta^{n-1}\chi(x)-1)=\frac{1}{2^{2n-2}}f_n(x),$$

d'où, d'après (1), résulte la formule (4).

Notre lemme est ainsi démontré. Pour en déduire la proposition de MM. Schreier et Ulam, il suffit de prendre pour $f_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ une suite infinie formée de tous les polynomes en x (définis dans I) réduits à l'intervalle (0, 1) [2]) aux coefficients rationnels et de faire appel au théorème bien connu de Weierstrass sur l'approximation de fonctions continues par les polynomes.

[1]) $g^k(x)$ désigne la k-ième itération de la fonction $g(x)$ et $g^0(x)=x$.

[2]) c. à. d. tout polynome $P(x)$ doit être remplacé par la fonction $F(x)$ égale à $P(x)$, si $0\leqslant P(x)\leqslant 1$, égale à 0, si $P(x)<0$ et égale à 1, si $P(x)>1$.

Sur les ensembles jouissant de la propriété de Baire.

(Solution d'un problème de M. Szpilrajn).

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

M. E. Szpilrajn a posé récemment le problème suivant.

Divisons tous les ensembles linéaires jouissant de la propriété de Baire [1]) en classes, en rangeant en une même classe deux ensembles dans ce et seulement dans ce cas, s'il ne diffèrent que d'un ensemble toujours de première catégorie [2]).

Quelle est la puissance de la famille F de ces classes?

En admettant que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ je prouverai que la famille F est de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$.

Démonstration. Admettons que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$. Dans ce cas il existe une suite transfinie du type Ω,

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ldots,\ P_\omega,\ P_{\omega+1},\ldots,\ P_\xi,\ldots, \qquad (\xi<\Omega)$$

formée de tous les ensembles linéaires parfaits.

Soit (pour tout $\alpha<\Omega$) Γ_α un ensemble G_δ de mesure nulle dense dans P_α. Nous définirons maintenant par l'induction transfinie une suite transfinie $\{E_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ d'ensembles linéaires parfaits de mesure nulle comme il suit.

Soit E_1 un ensemble parfait de mesure nulle donné quelconque.

[1]) Pour qu'un ensemble E jouisse de la propriété de Baire (au sens restreint) il faut et il suffit qu'on ait pour tout ensemble parfait P la formule $EP=Q+K$, où Q est un ensemble mesurable B et K est un ensemble de 1^{re} catégorie relativement à P.

[2]) c. à. d. de 1^{re} catégorie sur tout ensemble parfait (Lusin).

Soit maintenant α un nombre ordinal donné quelconque, tel que $1<\alpha<\Omega$ et supposons que nous avons déjà défini tous les ensembles E_ξ, où $\xi<\alpha$. L'ensemble

$$S_\alpha=\sum_{\xi<\alpha}\Gamma_\xi+\sum_{\xi<\alpha}E_\xi \tag{1}$$

étant de mesure nulle (en tant qu'une somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles de mesure nulle, puisque $\alpha<\Omega$), il existe un ensemble parfait E_α de mesure nulle, tel que

$$E_\alpha S_\alpha=0. \tag{2}$$

Les ensembles E_α $(\alpha<\Omega)$ sont ainsi définis par l'induction transfinie et ils sont (d'après (1) et (2)) deux à deux disjoints.

Soit maintenant $s=\{a_\xi\}_{\xi<\Omega}$ une suite transfinie quelconque (du type Ω) formée de nombres 0 et 1 et posons

$$E(s)=\sum_{\xi<\Omega}a_\xi E_\xi \tag{3}$$

($a_\xi E_\xi$ désignant l'ensemble E_ξ si $a_\xi=1$ et l'ensemble vide, si $a_\xi=0$).

On voit sans peine que tout ensemble (3) jouit de la propriété de Baire. Soit, en effet, P un ensemble parfait donné quelconque. Il existe donc un nombre ordinal $\lambda<\Omega$, tel que $P=P_\lambda$. D'après (1) on a, pour $\lambda<\alpha<\Omega$: $\Gamma_\lambda\subset S_\alpha$, donc, d'après (2): $E_\alpha\Gamma_\lambda=0$, donc, d'après (3):

$$\Gamma_\lambda\cdot E(s)=\Gamma_\lambda\cdot\sum_{\xi\leqslant\lambda}a_\xi E_\xi$$

et

$$\begin{aligned}P_\lambda\cdot E(s)&=P_\lambda\Gamma_\lambda\cdot E(s)+(P_\lambda-\Gamma_\lambda)\cdot E(s)=\\&=\Gamma_\lambda\cdot\sum_{\xi\leqslant\lambda}a_\xi E_\xi+(P_\lambda-\Gamma_\lambda)\cdot E(s).\end{aligned} \tag{4}$$

L'ensemble $\Gamma_\lambda\cdot\sum_{\xi\leqslant\lambda}a_\xi E_\xi$ est évidemment mesurable B (un $G_{\delta\sigma}$), puisque $\lambda<\Omega$. Or, l'ensemble Γ_λ étant un G_δ dense dans P_λ, l'ensemble $P_\lambda-\Gamma_\lambda$, donc aussi l'ensemble $(P_\lambda-\Gamma_\lambda)\cdot E(s)$ est de 1[re] catégorie relativement à P_λ.

La formule (4) prouve donc que $P_\lambda\cdot E(s)$ est une somme d'un ensemble mesurable B et d'un ensemble de 1[re] catégorie relativement à P_λ. Lensemble $E(s)$ jouit donc de la propriété de Baire (au sens restreint).

Je dis maintenant que si s et s' sont deux suites transfinies différentes (du type Ω, formées de nombres 0 et 1), l'ensemble

$$[E(s)-E(s')]+[E(s')-E(s)] \tag{5}$$

n'est pas toujours de 1[re] catégorie. En effet, soit

$$s'=\{a'_\xi\}_{\xi<\Omega},$$

donc

$$E(s')=\sum_{\xi<\Omega}a'_\xi E_\xi, \tag{6}$$

et soit $a_\mu\neq a'_\mu$. On a donc soit $a_\mu=1$ et $a'_\mu=0$, soit $a_\mu=0$ et $a'_\mu=1$. Les ensembles E_ξ $(\xi<\Omega)$ étant disjoints deux à deux, il résulte de (3) et (6) qu'on a dans le premier cas

$$E_\mu\subset E(s)-E(s')$$

et dans le second

$$E_\mu\subset E(s')-E(s):$$

dans le deux cas l'ensemble (5) contient donc l'ensemble parfait E_μ et par suite n'est pas toujours de 1[re] catégorie.

Or, l'ensemble de toutes les suites transfinies du type Ω formées de nombres 0 ou 1 a évidemment la puissance $2^{\aleph_1}$ donc, d'après l'hypothèse que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, la puissance $2^{2^{\aleph_0}}$. Les ensembles (3) forment donc une famille de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ d'ensembles jouissant de la propriété de Baire (au sens restreint) et ils appartiennent évidemment dans notre classification tous aux classes différentes. Il en résulte tout de suite que la famille F est de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ c. q. f. d.

Il est à remarquer que sans admettre l'hypothèse du continu on peut démontrer que la puissance de la famille F est $\geqslant 2^{\aleph_1}$. Voici l'esquisse de la démonstration.

En s'appuyant sur le théorème de M. Zermelo on définit par l'induction transfinie deux suites transfinies du type Ω: une $\{\Gamma_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ formée d'ensembles G_δ de mesure nulle, et l'autre $\{E_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ formée d'ensembles parfaits de mesure nulle, de sorte qu'on ait $\Gamma_\alpha\supset\sum_{\xi<\alpha}\Gamma_\xi+\sum_{\xi<\alpha}E_\xi$ et $\Gamma_\alpha E_\alpha=0$ pour $\alpha<\Omega$. La suite $\{E_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ jouit, comme on voit sans peine, de la propriété suivante: toute somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de cette suite est un G_δ relativement à l'ensemble $S=\sum_{\alpha<\Omega}E_\alpha$ [1]).

[1]) Cf. ma Note dans les *C. R. Soc. Sc. Varsovie* XXV (Année 1932), p. 104.

Soit maintenant $E(s)$ un ensemble quelconque de la forme (3) et soit P un ensemble parfait donné quelconque. Si $E(s)$ est de deuxième catégorie sur P, il existe une portion Π de P sur laquelle $E(s)$ est partout de deuxième catégorie, et il existe un ensemble dénombrable de termes (non vides) de la somme (3), soit E_{α_i} $(i=1,2,...)$, tel que l'ensemble $H=\sum_{i=1}^{\infty} E_{\alpha_i}$ est dense dans Π. Or, H est, comme nous savons, un ensemble G_δ relativement à S et (l'ensemble H étant dense dans Π) il en résulte sans peine que l'ensemble $S-H$, donc (d'après $E(s)\subset S$) à plus forte raison l'ensemble $E(s)-H$ est de 1[re] catégorie sur Π. On a donc $E(s)=H+K$, où H est un F_σ et K est un ensemble de 1[re] catégorie par rapport à P. L'ensemble parfait P pouvant être quelconque, cela prouve que l'ensemble $E(s)$ jouit de la propriété de Baire.

Le raisonnement ultérieur est le même que plus haut.

Sur une propriété des ensembles linéaires quelconques.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant:

Théorème I: *S'il n'existe aucun aleph inaccessible $\leqslant 2^{\aleph_0}$, tout ensemble linéaire indénombrable E contient une infinité indénombrable d'ensembles disjoints, dont chacun a la mesure extérieure égale à celle de l'ensemble E.*

Nous déduirons ce théorème du théorème de M. S. Ulam, d'après lequel, s'il n'existe aucun aleph inaccessible $\leqslant 2^{\aleph_0}$, tout ensemble linéaire de mesure extérieure positive contient une infinité non dénombrable d'ensembles disjoints, dont chacun est de mesure extérieure positive [1]). Cette déduction est d'ailleurs beaucoup plus difficile qu'on pourrait le croire [2]).

Dans ce qui suit nous désignons par $|Z|$ la mesure extérieure de l'ensemble (linéaire) Z.

Appelons *ensemble élémentaire* toute somme d'un nombre fini d'intervalles fermés aux extrémités rationnelles. La famille de tous les ensembles élémentaires est évidemment dénombrable.

Lemme I. *Z étant un ensemble linéaire borné et ε un nombre positif, il existe toujours un ensemble élémentaire Δ, tel que*

$$|\Delta|<|Z|+\varepsilon$$

et

$$|\Delta Z|>|Z|-\varepsilon.$$

[1]) ***Fund. Math.*** t. XX, p. 223.

[2]) Beaucoup plus facile est une déduction analogue d'un théorème concernant la catégorie des ensembles: voir ma Note dans ***Fund. Math.*** t. XXII, p. 1.