In der Folge (1) gibt es ein f_s so, daß

$$(4) \qquad |f_s(p) - \mu_1 F \mu(p)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad p \in Q_0$$

ist. Wir behaupten, daß

$$(5) \qquad |\Phi_s(p) - F(p)| < \varepsilon \qquad p \in K^{(n)}$$

ist. Es ist nämlich $\mu_1(p) \in Q_0$ also $\psi^s \mu_1(p) \in J_s$.

Laut (2) und (1^a) ist daher

$$\Phi_s(p) = \mu f_s \mu_1(p).$$

Dies gibt aber, mit Rücksicht auf (3) und (4) die gewünschte Ungleichung (5).

Dieser Satz, angewendet für $n=1$, ergibt die Lösung des am Anfang dieser Arbeit gestellten Problems:

Es gibt fünf Funktionen ($\mu(x)$, $\mu_1(x)$, $\psi(x)$, $\psi^{-1}(x)$, $\chi(x)$) so daß jede andere im Intervall $\langle 0, 1 \rangle$ erklärte, stetige Funktion, deren Werte demselben Intervall angehören, durch Zusammensetzen dieser fünf Funktionen, beliebig genau approximiert werden kann.

Sur l'approximation des fonctions continues par les superpositions de quatre fonctions.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

MM. J. Schreier et S. Ulam ont démontré dans ce volume un théorème, dont un cas particulier (pour l'espace linéaire) est la proposition suivante:

Il existe cinq fonctions définies et continues dans l'intervalle I ($0 \leqslant x \leqslant 1$) et dont les valeurs appartiennent à I, telles que toute autre fonction de même nature peut être approximée aussi près que l'on veut par une superposition (finie) de ces cinq fonctions.

Le but de cette Note est de donner une démonstration directe de cette proposition (même en y remplaçant le nombre 5 par 4). Nous la déduirons immédiatement du lemme suivant:

Lemme: *$f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$,... étant une suite infinie donnée de fonctions continues, définies dans l'intervalle I ($0 \leqslant x \leqslant 1$) et ne prenant que des valeurs de cet intervalle, il existe quatre fonctions de même nature, telles que toute fonction de la suite infinie considérée est une superposition (finie) de ces quatre fonctions.*

Démonstration. Définissons dans I les fonctions $\varphi(x)$, $\vartheta(x)$ et $\chi(x)$ par les formules

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi(x) = 4x \text{ pour } 0 \leqslant x < \frac{1}{4}, \quad \varphi(x) = 1 \text{ pour } \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 1, \\ \vartheta(x) = \dfrac{x}{4}, \quad \chi(x) = \dfrac{x+1}{2} \end{cases}$$

et définissons dans I la fonction $\psi(x)$ comme il suit.

Posons $\psi(0)=0$, et, si n est un nombre naturel, posons

(2) $$\psi(x)=\frac{1}{2^{2n-2}}f_n(2^{2n-1}x-1) \quad \text{pour} \quad \frac{1}{2^{2n-1}}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2^{2n-2}}$$

et

(3) $$\psi(x)=[4f_n(0)-f_{n+1}(1)]x+\frac{f_{n+1}(1)}{2^{2n-1}}-\frac{f_n(0)}{2^{2n-2}} \quad \text{pour} \quad \frac{1}{2^n}<x<\frac{1}{2^{2n-1}}.$$

Les fonctions $f_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ étant continues dans I et ne prenant que des valeurs de cet intervalle, on vérifie sans peine que la fonction $\psi(x)$ est continue dans l'intervalle I.

Soit maintenant n un nombre naturel donné. Je dis que (pour $0\leqslant x\leqslant 1$)

(4) $$f_n(x)=\varphi^{n-1}\psi\,\vartheta^{n-1}\chi(x)\ ^{1)}.$$

En effet, soit x un nombre de l'intervalle I. On a donc, d'après (1):

(5) $$\vartheta^{n-1}(\chi(x))=\frac{x+1}{2^{2n-1}},$$

donc, d'après $0\leqslant x\leqslant 1$:

$$\frac{1}{2^{2n-1}}\leqslant\vartheta^{n-1}\chi(x)\leqslant\frac{1}{2^{2n-2}}$$

ce qui donne, d'après (2) et (5):

$$\psi\vartheta^{n-1}\chi(x)=\frac{1}{2^{2n-2}}f_n(2^{2n-1}\vartheta^{n-1}\chi(x)-1)=\frac{1}{2^{2n-2}}f_n(x),$$

d'où, d'après (1), résulte la formule (4).

Notre lemme est ainsi démontré. Pour en déduire la proposition de MM. Schreier et Ulam, il suffit de prendre pour $f_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ une suite infinie formée de tous les polynomes en x (définis dans I) réduits à l'intervalle (0, 1) [2]) aux coefficients rationnels et de faire appel au théorème bien connu de Weierstrass sur l'approximation de fonctions continues par les polynomes.

[1]) $g^k(x)$ désigne la k-ième itération de la fonction $g(x)$ et $g^0(x)=x$.

[2]) c. à. d. tout polynome $P(x)$ doit être remplacé par la fonction $F(x)$ égale à $P(x)$, si $0\leqslant P(x)\leqslant 1$, égale à 0, si $P(x)<0$ et égale à 1, si $P(x)>1$.

Sur les ensembles jouissant de la propriété de Baire.

(Solution d'un problème de M. Szpilrajn).

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

M. E. Szpilrajn a posé récemment le problème suivant.

Divisons tous les ensembles linéaires jouissant de la propriété de Baire [1]) en classes, en rangeant en une même classe deux ensembles dans ce et seulement dans ce cas, s'il ne diffèrent que d'un ensemble toujours de première catégorie [2]).

Quelle est la puissance de la famille F de ces classes?

En admettant que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ je prouverai que la famille F est de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$.

Démonstration. Admettons que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$. Dans ce cas il existe une suite transfinie du type Ω,

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ldots,\ P_\omega,\ P_{\omega+1},\ldots,\ P_\xi,\ldots, \qquad (\xi<\Omega)$$

formée de tous les ensembles linéaires parfaits.

Soit (pour tout $\alpha<\Omega$) Γ_α un ensemble G_δ de mesure nulle dense dans P_α. Nous définirons maintenant par l'induction transfinie une suite transfinie $\{E_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ d'ensembles linéaires parfaits de mesure nulle comme il suit.

Soit E_1 un ensemble parfait de mesure nulle donné quelconque.

[1]) Pour qu'un ensemble E jouisse de la propriété de Baire (au sens restreint) il faut et il suffit qu'on ait pour tout ensemble parfait P la formule $EP=Q+K$, où Q est un ensemble mesurable B et K est un ensemble de 1re catégorie relativement à P.

[2]) c. à. d. de 1re catégorie sur tout ensemble parfait (Lusin).