Remarque sur les nombres dérivés.

Par

Vojtěch Jarník (Praha).

§ 1. Résultats.

$f(t)$ étant une fonction, définie dans l'intervalle $[a, b]$ [1]), désignons par $E(f; a, b)$ l'ensemble de toutes les valeurs $t \in [a, b)$ pour lesquelles

$$\bar{f}^{+}(t) = \limsup_{h \to 0+} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} < +\infty.$$

Théorème 1. *Si la fonction $f(t)$ est continue dans $[a, b]$, l'ensemble $E(f; a, b)$ ne peut pas être dénombrable.*

D'autre part, M. Mazurkiewicz [2]) a réussi de construire une fonction $f(t)$ de la première classe de Baire telle que $E(f; a, b) = 0$ [3]).

[1]) Il ne s'agit que des fonctions réelles et finies. Notations: $[a, b] = \underset{t}{E}(a \leqq t \leqq b)$, $[a, b) = E(a \leqq t < b)$ etc. Par les mots „ensemble dénombrable" je comprends toujours un ensemble tout au plus dénombrable; de même pour „fonction de classe α". $Z_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ est l'ensemble de tous les nombres ordinaux, correspondant aux ensembles bien ordonnés dénombrables. Le signe „sup" signifie la borne supérieure.

[2]) Voir ce volume, pp. 9—10.

[3]) Remarquons encore: si la fonction $f(t)$ est semi-continue supérieurement dans $[a, b]$, l'ensemble $E(f; a, b)$ est dense dans $[a, b]$. Démonstration: soit $a \leqq c < d \leqq b$; distinguons deux cas: 1. La fonction $f(t)$ est monotone dans $[c, d]$, alors $f'(t) \neq \pm\infty$ existe presque partout dans $[c, d]$, donc $E(f; c, d) \neq 0$. 2. La fonction $f(t)$ n'est pas monotone dans $[c, d]$. On sait que $f(t)$ atteint dans chaque sous-intervalle de $[c, d]$ sa valeur maximum. On ne peut pas avoir $f(x) = \underset{c \leqq t \leqq x}{\operatorname{Max}} f(t)$ pour chaque $x \in [c, d]$, la fonction $f(t)$ n'étant pas monotone dans $[c, d]$. Il existe donc deux nombres x, y $(c \leqq y < x \leqq d)$ tels que $f(y) = \underset{c \leqq t \leqq x}{\operatorname{Max}} f(t)$, d'où $\bar{f}^{+}(y) \leqq 0$, donc $E(f; c, d) \neq 0$.

Mais les deux cas extrêmes (non dénombrable et vide) que nous avons signalés ne sont que des cas exceptionnels; nous allons démontrer que, pour la plupart des fonctions bornées, l'ensemble $E(f; a, b)$ est dénombrable et dense dans $[a, b]$.

Soit C l'ensemble de toutes les fonctions $f = f(t)$, réelles et bornées dans $[0, 1]$. Pour $f \in C$, $g \in C$, nous définissons la distance $\varrho(f, g)$ par la rélation

$$\varrho(f, g) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t) - g(t)|;$$

alors C est un espace métrique complet. Soit C_s l'ensemble de toutes les fonctions $f \in C$ qui sont semi-continues supérieurement dans $[0, 1]$; pour $\alpha \in Z_0$ soit C^α l'ensemble de toutes les fonctions $f \in C$ qui sont de classe α de Baire dans $[0, 1]$; remarquons que la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions de l'espace C_s (resp. C^α) est elle-même une fonction de l'espace C_s (resp. C^α); donc, les espaces C_s, C^α sont complets. Nous allons démontrer les théorèmes suivants [4]):

Théorème 2. *Il existe un résiduel H de l'espace C tel que l'ensemble $E(f; 0, 1)$ soit dénombrable et dense dans $[0, 1]$ pour chaque $f \in H$.*

Théorème 3. *Soit $0 < \alpha \in Z_0$; alors il existe un résiduel H^α de l'espace C^α tel que l'ensemble $E(f; 0, 1)$ soit dénombrable et dense dans $[0, 1]$ pour chaque $f \in H^\alpha$.*

Théorème 4. *Il existe un résiduel H_s de l'espace C_s tel que l'ensemble $E(f; 0, 1)$ soit dénombrable pour chaque $f \in H_s$* [5]).

Au lieu de démontrer les théorèmes 2, 3, 4, nous allons démontrer le théorème suivant qui les contient évidemment comme des cas particuliers:

Théorème 5. *Soit D un sous-ensemble de l'espace C qui jouit des propriétés suivantes:*

1) Si $f \in D$, $g \in D$, on a aussi $f + g \in D$.

[4]) Soit R un espace métrique; un ensemble $A \subset R$ soit appelé un résiduel de l'espace R, si l'ensemble $R - A$ est de première catégorie relativement à l'espace R. Si $R \neq 0$ est un espace complet, on sait que R est de deuxième catégorie relativement à R, de sorte qu'aucun résiduel de l'espace R ne peut pas être vide.

[5]) D'après la remarque [3]), l'ensemble $E(f; 0, 1)$ est dense dans $[0, 1]$ même pour chaque $f \in C_s$.

2) E étant un sous-ensemble dénombrable et fermé, d'ailleurs quelconque, de l'intervalle $[0, 1]$ et a étant un nombre positif arbitraire, la fonction h, définie par les relations

$$h(t) = 0 \quad pour \quad t \in [0, 1] - E, \quad h(t) = a \quad pour \quad t \in E,$$

appartient à D [6]).

Alors il existe un résiduel A de l'espace D tel que l'ensemble $E(f; 0, 1)$ soit dénombrable et dense dans $[0, 1]$ pour chaque $f \in A$.

§ 2. Démonstration du théorème 1 [7]).

Soit $f(t)$ une fonction continue dans $[a, b]$. Supposons que $E(f; a, b)$ soit dénombrable; nous en allons déduire une contradiction: nous allons démontrer que cette supposition entraîne la conséquence suivante: N étant un nombre positif quelconque, on a

$$f(b) - f(a) > \tfrac{1}{2} N(b - a) - 1,$$

ce qui fournit la contradiction annoncée.

Soit donc $N > 0$, soit $E(f; a, b) = \{c_1, c_2, c_3, \ldots\}$ (donc $a \leqq c_i < b$). On peut faire correspondre à chaque nombre c_i un nombre d_i tel que

$$c_i < d_i < b, \quad d_i - c_i < 2^{-i-1} \cdot (b - a), \quad |f(d_i) - f(c_i)| < 2^{-i},$$

d'où

$$\sum (d_i - c_i) < \tfrac{1}{2}(b - a), \quad \sum_i |f(d_i) - f(c_i)| < 1.$$

A chaque nombre $t \in [a, b)$ nous allons faire correspondre un nombre $g(t) < b$ de la manière suivante:

1) Pour $t = c_i$ soit $g(t) = d_i$.

2) Pour $t \in [a, b) - E(f; a, b)$ soit $g(t)$ un nombre qui satisfait aux relations suivantes:

$$(1) \qquad t < g(t) < b, \quad f(g(t)) - f(t) > N(g(t) - t).$$

Maintenant, à chaque $\alpha \in Z_0$ nous allons faire correspondre un nombre réel t_α de la manière suivante: $t_0 = a$; pour $a \leqq t_\alpha < b$ soit $t_{\alpha+1} = g(t_\alpha)$; pour $t_\alpha = b$ soit $t_{\alpha+1} = b$; enfin, si α est un nombre limite,

[6]) On a alors $h \in C_s \subset C^1 \subset C^2 \subset \ldots \subset C$, de sorte que les espaces C_s, $C^\alpha (0 < \alpha \in Z_0)$, C jouissent des propriétés 1, 2.

[7]) Nous allons donner ici une démonstration directe de ce théorème, mais le théorème lui-même doit être regardé comme connu. En effet, supposons que $E(f; a, b)$ soit dénombrable; alors $f(t)$ (supposée continue) est monotone (voir p. ex. S. Saks, Théorie de l'intégrale, théorème 17, p. 137), donc dérivable presque partout, d'où la contradition.

soit $t_\alpha = \sup\limits_{\beta<\alpha} t_\beta$. Il existe évidemment un nombre $\gamma \in Z_0$ tel que l'on ait $t_\alpha < t_\gamma = b$ pour $0 \leqq \alpha < \gamma$ [8]); on a alors $a \leqq t_\beta < t_\alpha < b$ pour $0 \leqq \beta < \alpha < \gamma$.

Nous allons démontrer: pour $0 \leqq \alpha \leqq \gamma$, on a

$$f(t_\alpha) - f(a) \geqq N\Big(t_\alpha - a - \sum_{c_i<t_\alpha}(d_i - c_i)\Big) - \sum_{c_i<t_\alpha}|f(d_i) - f(c_i)|. \tag{2}$$

Démonstration: pour $\alpha = 0$, on obtient zéro aux deux membres de (2). Soit $0 < \beta \leqq \gamma$ et supposons la relation (2) remplie pour $0 \leqq \alpha < \beta$. Nous allons distinguer trois cas:

1) $\beta = \alpha + 1$, $t_\alpha \in [a, b) - E(f; a, b)$; on a d'après (1), (2)

$$f(t_{\alpha+1}) - f(a) \geqq N\Big(t_{\alpha+1} - a - \sum_{c_i<t_\alpha}(d_i - c_i)\Big) - \sum_{c_i<t_\alpha}|f(d_i) - f(c_i)|$$
$$\geqq N\Big(t_{\alpha+1} - a - \sum_{c_i<t_{\alpha+1}}(d_i - c_i)\Big) - \sum_{c_i<t_{\alpha+1}}|f(d_i) - f(c_i)|.$$

2) $\beta = \alpha + 1$, $t_\alpha = c_n$ (donc $t_{\alpha+1} = d_n$); on a d'après (2)

$$f(t_{\alpha+1}) - f(a) \geqq N\Big(t_\alpha - a - \sum_{c_i<t_\alpha}(d_i - c_i)\Big) - \sum_{c_i<t_\alpha}|f(d_i) - f(c_i)| - $$
$$- |f(d_n) - f(c_n)|$$
$$\geqq N\Big(t_{\alpha+1} - a - \sum_{c_i<t_{\alpha+1}}(d_i - c_i)\Big) - \sum_{c_i<t_{\alpha+1}}|f(d_i) - f(c_i)|.$$

3) β est un nombre limite; il existe donc une suite $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots$ telle que $\beta = \lim\limits_{n=\infty} \alpha_n$.

On a d'après (2) (pour $\alpha = \alpha_n$), en remarquant que $t_{\alpha_n} < t_\beta$:

$$f(t_{\alpha_n}) - f(a) \geqq N t_{\alpha_n} - N\Big(a + \sum_{c_i<t_\beta}(d_i - c_i)\Big) - \sum_{c_i<t_\beta}|f(d_i) - f(c_i)|;$$

[8]) En effet, si l'on avait $t_\gamma < b$ pour chaque $\gamma \in Z_0$, on aurait évidemment $t_\alpha < t_\beta$ pour $\alpha < \beta$; donc l'ensemble de tous les intervalles $(t_\alpha, t_{\alpha+1})$ $(\alpha \in Z_0)$ serait un ensemble non dénombrable d'intervalles disjoints, ce qui est impossible.

d'autre part $\lim\limits_{n=\infty} t_{\alpha_n} = \sup\limits_{n=1,2,\dots} t_{\alpha_n} = \sup\limits_{\alpha<\beta} t_\alpha = t_\beta$, d'où

$$f(t_\beta) - f(a) = \lim_{n=\infty} f(t_{\alpha_n}) - f(a) \geqq N t_\beta - N\Big(a + \sum_{c_i<t_\beta}(d_i - c_i)\Big) -$$
$$- \sum_{c_i<t_\beta}|f(d_i) - f(c_i)|.$$

Donc, la relation (2) est vraie pour $0 \leqq \alpha \leqq \gamma$; en y posant $\alpha = \gamma$, on obtient la relation cherchée:

$$f(b) - f(a) = f(t_\gamma) - f(a) \geqq$$
$$\geqq N\Big(b - a - \sum_i (d_i - c_i)\Big) - \sum_i |f(d_i) - f(c_i)| > \frac{1}{2} N(b - a) - 1.$$

§ 3. Démonstration du théorème 5ème.

Soit D un sous-ensemble de C qui satisfait aux conditions 1., 2. du théorème 5ème. Pour $0 \leqq a < b \leqq 1$ soit $A(a; b)$ l'ensemble de toutes les fonctions $f \in D$ pour lesquelles l'ensemble $E(f; a, b)$ n'est pas vide. Soit ensuite n un nombre entier positif; soit $f \in D$. Nous désignons par $E_n(f)$ l'ensemble de toutes les valeurs $t \in [0, 1)$ qui jouissent de la propriété suivante: il n'existe aucune valeur h telle que

$$0 < h < \frac{1}{n}, \quad t + h < 1, \quad \frac{f(t+h) - f(t)}{h} > n. \tag{3}$$

Soit enfin A_n l'ensemble de toutes les fonctions $f \in D$ pour lesquelles l'ensemble $E_n(f)$ est dénombrable. Nous allons montrer tout d'abord que le théorème 5ème est une conséquence des lemmes suivants:

Lemme 1. L'ensemble $D - A(a; b)$ est non dense [9]).

Lemme 2. L'ensemble $D - A_n$ est non dense [9]).

Supposons, en effet, que les lemmes 1. et 2. soient vrais. Soit $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ... la suite de tous les sous-intervalles à extrémités rationnelles de l'intervalle $[0, 1]$. Posons

$$A = \prod_{n=1}^{\infty} A(a_n; b_n) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} A_n;$$

[9]) Relativement à l'espace D.

alors A est un résiduel. Soit $f \epsilon A$; soit $0 \leqq a < b \leqq 1$; il existe un nombre n tel que $a < a_n < b_n < b$; à cause de $f \epsilon A(a_n; b_n)$, l'ensemble $E(f; a_n b_n)$ n'est pas vide; donc l'ensemble $E(f; 0, 1)$ est *dense dans* $[0, 1]$. D'autre part, soit $t \epsilon [0, 1) - \sum_{n=1}^{\infty} E_n(f)$[10]; à tout n (entier et positif) il correspond une valeur h telle que les relations (3) soient satisfaites; donc $\bar{f}^+(t) = +\infty$.

Alors $E(f; 0, 1) \subset \sum_{n=1}^{\infty} E_n(f)$, donc l'ensemble $E(f; 0, 1)$ est dénombrable, c. q. f. d.

Démonstration du lemme 1. Soit $0 \leqq a < b \leqq 1$. Soit K une sphère de l'espace D avec le centre f et le rayon r. Il faut démontrer l'existence d'une sphère $K' \subset K \cdot A(a, b)$. Choisissons un nombre d tel que $a < d < b$ et tel que les inégalités $a < t < d$ entraînent l'inégalité

$$f(t) < \limsup_{\tau \to a+} f(\tau) + \frac{r}{8}.$$

Chosissons ensuite un nombre c tel que

$$a < c < d, \quad f(c) > \limsup_{\tau \to a+} f(\tau) - \frac{r}{8}.$$

Posons $h(t) = 0$ pour $0 \leqq t \leqq 1$, $t \neq c$, $h(c) = \frac{1}{2} r$; d'après les propriétés 1., 2. de l'espace D on a $f + h \epsilon D$. Soit K' la sphère de l'espace D avec le centre $f + h$ et le rayon $\frac{1}{8} r$; donc $K' \subset K$. D'autre part, soit $g \epsilon K'$, donc $|g(t) - f(t) - h(t)| < \frac{1}{8} r$ pour $0 \leqq t \leqq 1$; on a donc

$$g(c) > \limsup_{\tau \to a+} f(\tau) - \frac{r}{8} - \frac{r}{8} + \frac{r}{2},$$

tandis que pour $c < t < d$ on aura

$$g(t) < \limsup_{\tau \to a+} f(\tau) + \frac{r}{8} + \frac{r}{8} < g(c),$$

d'où $\bar{g}^+(c) \leqq 0$, donc $g \epsilon A(a; b)$.

On a donc $K' \subset K \cdot A(a; b)$, c. q. f. d.

[10]) $E_n(f)$ est dénombrable à cause de $f \epsilon A_n$.

Démonstration du lemme 2. Soit n un nombre entier positif. Soit K une sphère de l'espace D avec le centre f et le rayon r. Il faut démontrer l'existence d'une sphère $K' \subset K \cdot A_n$.

A chaque nombre $t \epsilon [0, 1)$ nous ferons correspondre un nombre $\varphi(t)$ qui satisfait aux conditions suivantes:

$$a) \quad 0 < \varphi(t) - t < \frac{1}{n}, \ \varphi(t) - t < \frac{r}{8n}, \ \varphi(t) < 1,$$

$$f(\varphi(t)) > \limsup_{\tau \to t+} f(\tau) - \frac{r}{8},$$

$b)$ les relations $t < x < \varphi(t)$ entraînent l'inégalité $f(x) < \limsup_{\tau \to t+} f(\tau) + \frac{r}{8}$.

A chaque nombre $\alpha \epsilon Z_0$ nous faisons correspondre un nombre t_α par la définition suivante: $t_0 = 0$; pour $0 \leqq t_\alpha < 1$ soit $t_{\alpha+1} = \varphi(t_\alpha)$; pour $t_\alpha = 1$ soit $t_{\alpha+1} = 1$; enfin, si α est un nombre limite, soit $t_\alpha = \sup_{\beta < \alpha} t_\beta$. De la même manière comme dans la démonstration du théorème 1[er] on voit qu'il existe un nombre $\gamma \epsilon Z_0$ tel que l'on ait $0 \leqq t_\alpha < t_\beta < t_\gamma = 1$ pour $0 \leqq \alpha < \beta < \gamma$.

Posons $E = \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_\gamma\}$; donc E est *dénombrable*. Soit $t \epsilon [0, 1] - E$; on a $0 = t_0 < t < t_\gamma = 1$; il existe donc un nombre $\beta \epsilon Z_0$ $(0 < \beta \leqq \gamma)$ tel que l'on ait $t_\alpha < t < t_\beta$ pour $0 \leqq \alpha < \beta$. Le nombre β ne peut pas être un nombre limite[11]); on a donc $t_{\beta-1} < t < t_\beta$, d'où $(t_{\beta-1}, t_\beta) \subset [0, 1] - E$. Donc: $[0, 1] - E$ est un ensemble ouvert, E est un ensemble *fermé*. Posons $h(t) = 0$ pour $t \epsilon [0, 1] - E$, $h(t_\beta) = \frac{r}{2}$ pour $0 \leqq \beta \leqq \gamma$. L'espace D satisfaisant aux conditions 1. et 2. du théorème 5[ème], on a $f + h \epsilon D$.

Soit K' la sphère de l'espace D avec le centre $f + h$ et le rayon $\frac{1}{16} r$; donc $K' \subset K$. D'autre part, soit $g \epsilon K'$, donc $|g(t) - f(t) - h(t)| < \frac{1}{16} r$ pour $0 \leqq t \leqq 1$. Soit $t \epsilon [0, 1] - E$; nous avons vu qu'il existait alors un nombre $\beta \epsilon Z_0$ $(0 < \beta \leqq \gamma)$ tel que $t_{\beta-1} < t < t_\beta$.

[11]) Si β était un nombre limite, on aurait $t < t_\beta = \sup_{\alpha < \beta} t_\alpha$, donc $t < t_\alpha$ pour un certain nombre $\alpha < \beta$.

En observant que $t_\beta = \varphi(t_{\beta-1})$, on a d'après les propriétés $a)$ et $b)$ de la fonction $\varphi(t)$:

$$t_\beta < 1,\ 0 < t_\beta - t < t_\beta - t_{\beta-1} < \operatorname{Min}\left(\frac{1}{n}, \frac{r}{8n}\right),$$

$$\frac{g(t_\beta)-g(t)}{t_\beta - t} > \frac{1}{t_\beta - t}\left(-\frac{r}{8} + f(t_\beta) - f(t) + h(t_\beta) - h(t)\right)$$

$$> \frac{8n}{r}\left(-\frac{r}{8} - \frac{r}{4} + \frac{r}{2}\right) = n;$$

d'après la définition de $E_n(g)$ (voir (3)) on voit que $t \in [0,1] - E_n(g)$; on a donc $E_n(g) \subset E$. L'ensemble $E_n(g)$ est donc dénombrable, c'est-à-dire $g \in A_n$. On a donc $K' \subset K \cdot A_n$, c. q. f. d.

Sur les nombres dérivés.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

Cette note contient la solution d'un problème posé par M. Jarnik[1]).

Il existe pour $0 \leqq x < 1$ *une foncton* $f(x)$ *continue à droite* (*donc de classe* 1) *et telle que l'on a partout* $\overline{f}^+(x) = +\infty$[2]).

Déterminons le système de points $\{c_{n_1 \dots n_k}^{j_1 \dots j_k}\}$, $k = 1, 2 \dots$, $n_i = 1, 2 \dots$, $j_i = 1 \dots 2^{i(i-1)}$ de manière suivante:

$$c_{n_1}^1 = 1 - \frac{1}{2^{n_1 - 1}} \tag{1}$$

$$c_{n_1 \dots n_k, n_{k+1}}^{j_1 \dots j_k, j_{k+1}} = c_{n_1 \dots n_k}^{j_1 \dots j_k} + \left(1 - \frac{1}{2^{n_{k+1}-1}}\right)\frac{1}{2^{n_1 + \dots + n_k + k(k-1)}} + \frac{j_{k+1} - 1}{2^{n_1 + \dots + n_{k+1} + k(k+1)}}. \tag{2}$$

Evidemment $c_{n_1 \dots n_k}^{j_1 \dots j_k} < c_{n_1' \dots n_k'}^{j_1' \dots j_k'}$ si le premier nombre non nul de la suite: $n_1' - n_1$, $j_1' - j_1, \dots$ $n_k' - n_k$, $j_k' - j_k$ est positif. Pour un k fixe les points $c_{n_1 \dots n_k}^{j_1 \dots j_k}$ rangés d'après leur grandeur forment un ensemble bien ordonné; en désignant le suivant immédiat de $c_{n_1 \dots n_k}^{j_1 \dots j_k}$ par $\varphi(c_{n_1 \dots n_k}^{j_1 \dots j_k})$, on a:

$$\varphi(c_{n_1 \dots n_k}^{j_1 \dots j_k}) = c_{n_1 \dots n_k}^{j_1 \dots j_k + 1} \quad \text{si} \quad j_k < 2^{k(k-1)} \tag{3}$$

$$\varphi(c_{n_1 \dots n_k}^{j_1 \dots j_k}) = c_{n_1 \dots n_k + 1}^{j_1 \dots j_{k-1}, 1} \quad \text{si} \quad j_k = 2^{k(k-1)} \tag{4}$$

$$\varphi(c_{n_1 \dots n_k}^{j_1 \dots j_k}) - c_{n_1 \dots n_k}^{j_1 \dots j_k} = \frac{1}{2^{n_1 + n_2 + \dots + n_k + k(k-1)}} \tag{5}$$

$$c_{n_1 \dots n_k}^{j_1 \dots j_k} \leqq c_{n_1 \dots n_k, n_{k+1}}^{j_1 \dots j_k, j_{k+1}} < \varphi(c_{n_1 \dots n_k, n_{k+1}}^{j_1 \dots j_k, j_{k+1}}) < \varphi(c_{n_1 \dots n_k}^{j_1 \dots j_k}). \tag{6}$$

[1]) Comp. ce volume p. 1.

[2]) $\overline{f}^+(x)$ désigne le nombre dérivé supérieur, droit de $f(x)$